Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степанов, Полиномиальные инварианты конечных групп над полями простой характеристики, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 3, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:40:51

Полиномиальные инварианты конечных групп над полями простой характеристики

© 1999 г. С. А. Степанов

Пусть R — коммутативное кольцо с единичным элементом 1 и $G = S_n$ — симметрическая группа степени $n \geq 1$. Пусть A_{mn}^G обозначает подалгебру инвариантов алгебры полиномов $A_{mn} = R[x_{11}, \dots, x_{1n}; \dots; x_{m1}, \dots, x_{mn}]$ относительно G . Из классического результата Нетер следует, что если каждое целое число, не равное нулю, обратимо в R , то A_{mn}^G порождается поляризованными элементарными симметрическими полиномами. Как недавно было показано Ричменом, этот результат остается в силе при условии, что $n!$ обратимо в R . Цель настоящей статьи дать короткое доказательство результата Ричмена, основанное на использовании формулы Варинга и тесно связанное с первоначальным доказательством Нетер.

Работа выполнена при поддержке Университета Билкента, Анкара, Турция.

1. Введение

Пусть m, n — положительные целые числа, R — коммутативное кольцо с единичным элементом 1 и

$$A_{mn} = R[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{1n}, \dots, x_{mn}]$$

— алгебра полиномов от mn переменных x_{ij} над R . Симметрическая группа $G = S_n$ действует на алгебре A_{mn} как группа R -автоморфизмов по правилу

$$gx_{ij} = x_{i,g(j)}, \quad g \in G.$$

Обозначим A_{mn}^G подалгебру инвариантов алгебры A_{mn} относительно группы G и определим поляризованные элементарные симметрические полиномы $u_{r_1, \dots, r_m} \in A_{mn}^G$ от n векторных переменных

$$(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, (x_{1n}, \dots, x_{mn})$$

с помощью формального равенства

$$\prod_{j=1}^n (1 + x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m) = 1 + \sum_{1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m}. \quad (1)$$

Если R — Нетерин, то из теоремы Гильберта–Нетер [4, 6] следует, что A_{mn}^G — конечно порожденная коммутативная R -алгебра и A_{mn} конечно порождается как

модуль над A_{mn}^G . Более того, каждое целое число обратимо в R , инварианты $u_{r_1, \dots, r_m}$ составляют полную систему образующих алгебры A_{mn}^G над R (см. [1], стр. 9; [2], стр. 62; [14], стр. 37). Другими словами, каждый элемент u алгебры A_{mn}^G может быть записан в виде полинома от $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, с коэффициентами из R . Приведенная выше система, порождающая инварианты, содержит $\binom{m+n}{m} - 1$ элементов, связанных между собой различными алгебраическими соотношениями (см. [3], стр. 68 и [12]). Этот результат недавно был обобщен Ричменом [8] следующим образом.

Теорема 1. Пусть $G = S_n$ и $n!$ обратимо в R . Тогда A_{mn}^G порождается как R -алгебра поляризованными элементарными симметрическими полиномами

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n,$$

степени, не большей n .

В частности, если R — поле простой характеристики $p > n$, то $n!$ обратимо в R , и мы приходим к следующему результату.

Следствие 1. Пусть R — поле и $G = S_n$. Если характеристика R равна нулю или $p > n$, где p — простое число, то A_{mn}^G порождается как R -алгебра поляризованными элементарными симметрическими полиномами $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$.

В этой статье мы приводим простое короткое доказательство теоремы 1, основанное на поляризации классической формулы Варинга и тесно связанное с одним из двух первоначальных доказательств Нетер для случая, когда R — поле характеристики 0. Несколько примеров, приведенных в заключительном разделе статьи показывают, что нельзя отказаться от ограничений на R , наложенных в теореме 1.

Более обще, пусть $A = R[x_1, \dots, x_m]$ — конечно порождаемая коммутативная R -алгебра, G — конечная группа R -алгебры автоморфизмов A и A^G — подалгебра инвариантов группы G . Если $z_1, \dots, z_m$ — коммутирующие переменные, то положим

$$F(z_1, \dots, z_m) = \prod_{\tau \in G} (1 + \tau(x_1)z_1 + \tau(x_2)z_2 + \dots + \tau(x_m)z_m).$$

Если каждое целое число, отличное от нуля, обратимо в R , то из теоремы Нетер следует, что A^G порождается как R -алгебра коэффициентами $F(z_1, \dots, z_m)$. Результат теоремы 1 и стандартные аргументы, основанные на использовании оператора Рейнольдса и отображения Нетер (см. [6]; [10], стр. 63; [14], стр. 275), приводят к следующей теореме.

Теорема 2. Если $|G|!$ обратимо в R , то A^G порождается как R -алгебра коэффициентами $F(z_1, \dots, z_m)$. Другими словами, A^G порождается над R инвариантными полиномами от $x_1, \dots, x_m$ степени, не большей $|G|$.

Этот результат приводит к эффективному алгоритму для вычисления полной системы порождающих полиномиальных инвариантов при условии, что $|G|!$ обратимо в R . Существует другое конструктивное доказательство теоремы 1, основанное на других аргументах и также восходящее к Нетер (см. [9] и [10], стр. 29). Верхняя граница степеней множества порождающих полиномов для алгебры инвариантов, приведенная в теореме 3, известна как граница Нетер (см. [9]; [10], стр. 28 и [11]). В последнем разделе статьи будет показано, что условия теоремы 3 не могут быть

ослаблены. В частности, будет показано, что граница Нетер неверна, если R — поле характеристики 2 и $G = S_2$. Другие результаты и задачи теории полиномиальных инвариантов в случае простой характеристики можно найти в [9] и [11].

2. Порождающие инварианты симметрической группы

Пусть $G = S_n$ — симметрическая группа степени $n \geq 1$, действующая на R -алгебре $A_{mn} = R[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{1n}, \dots, x_{mn}]$ как группа R -автоморфизмов, A_{mn}^G — подалгебра инвариантов G в A_{mn} и $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, — поляризованные элементарные симметрические полиномы в A_{mn}^G .

Пусть $v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}$ — инвариантный полином в A_{mn}^G вида

$$v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m}.$$

Если $m = 1$, то согласно известной формуле Варинга (см. [13], стр. 13 и [2], стр. 99)

$$v_{\sigma} = \sum_{j=1}^n x_j^{\sigma} = \sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = \sigma} c(s_1, \dots, s_n) u_1^{s_1} \dots u_n^{s_n}, \quad (2)$$

где $c_{s_1, \dots, s_n}$ — целые числа вида

$$c(s_1, \dots, s_n) = (-1)^{s_2 + 2s_3 + \dots + (n-1)s_n} \frac{\sigma(s_1 + \dots + s_n - 1)!}{s_1! \dots s_n!}.$$

Следующий результат можно рассматривать как обобщение формулы Варинга на случай, когда $m > 1$ (см. также [12]).

Предложение 1. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ — неотрицательные целые числа,

$$v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m}$$

— полином из A_{mn}^G степени $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_m$ и $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, — поляризованный элементарный симметрический полином от векторов $(x_{1j}, \dots, x_{mj})$, $1 \leq j \leq n$. Пусть $s_1, \dots, s_n$ и $s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}$ — неотрицательные целые числа такие, что $s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = \sigma$ и $s_{1\nu} + \dots + s_{m\nu} = \nu s_{\nu}$ для $1 \leq \nu \leq n$, пусть также

$$w_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}} = \sum \frac{s_{\nu}!}{\sigma_{\nu 1}! \dots \sigma_{\nu s_{\nu}}!} \prod_{\tau=1}^{s_{\nu}} u_{r_{1\tau}, \dots, r_{m\tau}}^{\sigma_{\nu \tau}},$$

где суммирование проводится по всем неотрицательным целым числам

$$r_{1\tau}, \dots, r_{m s_{\nu}}, \quad \sigma_{\nu 1}, \dots, \sigma_{\nu s_{\nu}}$$

таким, что

$$r_{\mu 1} \sigma_{\nu 1} + \dots + r_{m s_{\nu}} \sigma_{\nu s_{\nu}} = s_{\mu \nu}, \quad \sigma_{\nu 1} + \dots + \sigma_{\nu s_{\nu}} = s_{\nu}, \\ r_{1\tau} + \dots + r_{m\tau} = \nu, \quad 1 \leq \mu \leq m, \quad 1 \leq \nu \leq n, \quad 1 \leq \tau \leq s_{\nu}.$$

Тогда

$$v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = \frac{\sigma_1! \dots \sigma_m!}{\sigma!} \sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = \sigma} c(s_1, \dots, s_n) \sum \prod_{i=1}^n v_{s_1 \nu_i, \dots, s_m \nu_i}, \quad (3)$$

где внутренняя сумма берется по всем неотрицательным целым числам

$$s_{\mu \nu_1}, \dots, s_{\mu \nu_n}$$

таким, что

$$\begin{aligned} s_{\mu \nu_1} + \dots + s_{\mu \nu_n} &= \sigma_\mu, \\ s_{1 \nu_i} + \dots + s_{m \nu_i} &= i s_i, \quad 1 \leq \mu \leq m, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Доказательство. Положим в (2)

$$x_j = x_{1j} z_1 + \dots + x_{mj} z_m, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Поскольку

$$(x_{1j} z_1 + \dots + x_{mj} z_m)^\sigma = \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \dots \sigma_m!} x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m},$$

справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^n (x_{1j} z_1 + \dots + x_{mj} z_m)^\sigma = \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \dots \sigma_m!} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq n} \prod_{s=1}^{\nu} (x_{1j_s} z_1 + \dots + x_{mj_s} z_m) = \sum_{r_1 + \dots + r_m = \nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m}$$

и, следовательно, с учетом (2),

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (x_{1j} z_1 + \dots + x_{mj} z_m)^\sigma \\ &= \sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = \sigma} c(s_1, \dots, s_n) \prod_{\nu=1}^n \left(\sum_{r_1 + \dots + r_m = \nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m} \right)^{s_\nu}. \end{aligned}$$

В результате получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \dots \sigma_m!} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m} \\ &= \sum_{s_1 + sl_2 + \dots + ns_n = \sigma} c(s_1, \dots, s_n) \prod_{\nu=1}^n \left(\sum_{r_1 + \dots + r_m = \nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m} \right)^{s_\nu}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\left(\sum_{r_1 + \dots + r_m = \nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m} \right)^{s_\nu} = \sum_{s_{1\nu} + \dots + s_{m\nu} = \nu s_\nu} w_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}} z_1^{s_{1\nu}} \dots z_m^{s_{m\nu}},$$

где

$$w_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}} = \sum \frac{s_\nu!}{\sigma_{\nu 1}! \dots \sigma_{\nu s_\nu}!} \prod_{\tau=1}^{s_\nu} u_{r_{1\tau}, \dots, r_{m\tau}}^{\sigma_{\nu\tau}}$$

и суммирование ведется по всем целым неотрицательным

$$\sigma_{\nu 1}, \dots, \sigma_{\nu s_\nu}, \quad r_{1\tau}, \dots, r_{m\tau}, \quad 1 \leq \tau \leq s_\nu,$$

таким, что

$$\begin{aligned} r_{\mu 1} \sigma_{\nu 1} + \dots + r_{\mu s_\nu} \sigma_{\nu s_\nu} &= s_{\nu\tau}, & 1 \leq \mu \leq m, \\ r_{1\tau} + \dots + r_{m\tau} &= \nu, & 1 \leq \tau \leq s_\nu, \\ \sigma_{\nu 1} + \dots + \sigma_{\nu s_\nu} &= s_\nu. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m} \\ = \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \left(\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = \sigma} c(s_1, \dots, s_n) \sum_S \prod_{i=1}^n w_{s_{1\nu_i}, \dots, s_{m\nu_i}} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m}, \end{aligned}$$

где вторая внутренняя сумма берется по множеству S всех целых неотрицательных $s_{\mu\nu_1}, \dots, s_{\mu\nu_n}, \leq \mu \leq m$, таких, что

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu_1} + \dots + s_{\mu\nu_n} &= \sigma_\mu, & 1 \leq \mu \leq m, \\ s_{1\nu_i} + \dots + s_{m\nu_i} &= i s_i, & 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к равенству

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} = \frac{\sigma_1! \dots \sigma_m!}{\sigma!} \sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = \sigma} c(s_1, \dots, s_n) \sum_S \prod_{i=1}^n w_{s_{1\nu_i}, \dots, s_{m\nu_i}},$$

где множество S определено в предыдущей формуле. Это равенство доказывает теорему.

Если $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_m \leq n + 1$, то

$$v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = \frac{\sigma_1! \dots \sigma_m!}{\sigma!} \sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = \sigma} c(s_1, \dots, s_n) \prod_{i=1}^n v_{s_{1\nu_i}, \dots, s_{m\nu_i}}$$

содержит только поляризованные элементарные симметрические полиномы

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n.$$

Кроме того, коэффициенты полинома $v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}$ являются рациональными числами со знаменателями, не делящимися ни на одно простое число $p > \sigma$. Из этого замечания вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Если число $n!$ обратимо в R и $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_m \leq n + 1$, то

$$v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m}$$

есть полином над R от поляризованных элементарных симметрических полиномов $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, степени, не большей n .

Покажем теперь, что любой инвариант из A_{mn}^G можно представить как полином над R от $v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}$.

Предложение 2. Пусть f — одночлен из A_{mn} и

$$v = \sum_{u \in \{\tau(f) \mid \tau \in G\}} u.$$

Тогда v — полином над R от инвариантов

$$v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ — неотрицательные целые числа такие, что $0 \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_m \leq \deg f$.

Доказательство. Запишем f в виде $f = f_1 \dots f_n$, где каждый из множителей f_j есть одночлен в $R[x_{1j}, \dots, x_{mj}]$. Положим

$$d(f) = \max_{1 \leq j \leq n} \deg f_j$$

и докажем утверждение индукцией по $\delta(f) = \deg f - d(f)$. Предположим вначале, что $\delta(f) = 0$. Тогда

$$f = f_j = x_{1j}^{\alpha_1} \dots x_{mj}^{\alpha_m},$$

для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $0 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq \deg f$, поэтому

$$v = \sum_{u \in \{\tau(f) \mid \tau \in G\}} u = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{\alpha_1} \dots x_{mj}^{\alpha_m}.$$

Предположим теперь, что $\delta(f) > 0$ и пусть $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ таково, что $d(f) = \deg f_j < \deg f$. Определим v_j и v'_j , полагая

$$v_j = \sum_{u \in \{\tau(f_j) \mid \tau \in G\}} u, \quad v'_j = \sum_{u' \in \{\tau(f/f_j) \mid \tau \in G\}} u'.$$

По предположению индукции v_j и v'_j являются полиномами от

$$v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}, \quad 0 \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_m \leq \deg f.$$

Для каждого $\rho \in G$ определим U_ρ как множество всех пар (u, u') таких, что

$$u \in \{\tau(f_j) \mid \tau \in G\}, \quad u' \in \{\tau(f/f_j) \mid \tau \in G\}, \quad uu' = \rho(f),$$

и заметим, что отображение

$$U_{id} \rightarrow U_\rho, \quad (u, u') \rightarrow (\tau(u), \tau(u'))$$

есть биекция. Таким образом, $|U_\rho| = |U_{id}|$ для всех $\rho \in G$. Заметим также, что $d(uu') \geq d(f)$ для всех $u \in \{\tau(f_j) \mid \tau \in G\}$ и $u' \in \{\tau(f/f_j) \mid \tau \in G\}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $uu' \in \{\tau(f) \mid \tau \in G\}$. Поэтому

$$v_j v'_j = |U_{id}| \sum_{u \in \{\tau(f) \mid \sigma \in G\}} u + \sum_{f': \deg f' = \deg f, d(f') > d(f)} \sum_{u \in \{\tau(f') \mid \tau \in G\}} u.$$

По предположению индукции, инвариант

$$v_j v'_j - |U_{id}| \sum_{u \in \{\tau(f) \mid \sigma \in G\}} u = \sum_{f': \deg f' = \deg f, d(f') > d(f)} \sum_{u \in \{\tau(f') \mid \tau \in G\}} u.$$

есть полином над R от $v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}$, $0 \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_m \leq \deg f$. Мощность U_{id} не превосходит мощности $\{\tau(f_j) \mid \tau \in G\}$, которая в свою очередь не превосходит мощности $\{x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} \mid 1 \leq j \leq n\}$, так что $1 \leq |U_{id}| \leq n$. Так как число $n!$ обратимо в R , мы заключаем, что

$$\sum_{u \in \{\tau(f) \mid \tau \in G\}} u$$

есть полином над R от $v_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}$, $0 \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_m \leq \deg f$. Это завершает доказательство.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $G = S_n$ — симметрическая группа степени n . Предположим, что f есть одночлен в A_{mn} и $w \in A_{mn}^G$ есть полиномиальный инвариант G . Так как $\tau(w) = w$ для любого $\tau \in G$, полиномы w и $\tau(w)$ имеют одинаковые коэффициенты. Это показывает, что каждый полиномиальный инвариант G есть R -линейная комбинация инвариантов

$$v = \sum_{u \in \{\tau(f) \mid \tau \in G\}} u,$$

где f пробегает значения одночленов, появляющихся в w .

Пусть $(i_1, i_2, \dots, i_\mu)$ — последовательность элементов $i_1, \dots, i_\mu \in \{1, \dots, n\}$. Вначале докажем, что каждый инвариант w_μ вида

$$w_\mu = \sum_{j=1}^n x_{i_1, j} \dots x_{i_\mu, j}$$

есть полином над R от поляризованных элементарных симметрических полиномов

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n.$$

Если $\mu \leq n+1$, это утверждение следует из предложения 1. Предположим теперь, что $\mu > n+1$, и проведем доказательство индукцией по μ . Для $j = 1, \dots, n$ положим

$$\tilde{x}_{i_s, j} = \begin{cases} x_{i_s, j}, & \text{если } s \leq n, \\ x_{i_{n+1}, j} x_{i_{n+2}, j} \dots x_{i_{\mu+1}, j}, & \text{если } s = n+1, \end{cases}$$

и рассмотрим

$$w_{\mu+1} = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{i_1,j} \dots \tilde{x}_{i_n,j} \tilde{x}_{i_{n+1},j}.$$

Пусть $\tilde{A}_{mn} = R[\tilde{x}_{11}, \dots, \tilde{x}_{m1}; \dots; \tilde{x}_{1n}, \dots, \tilde{x}_{mn}]$, и $\tilde{A}_{mn}^G$ — подалгебра инвариантов из $\tilde{A}_{mn}$. Из следствия 2 следует, что $w_{\mu+1}$ — полином над R от поляризованных элементарных симметрических полиномов

$$\tilde{u}_{r_1, \dots, r_m} \in \tilde{A}_{mn}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n.$$

Поскольку каждый полином $\tilde{u}_{r_1, \dots, r_m}$ имеет вид

$$\tilde{u}_{r_1, \dots, r_m} = \sum_{\tilde{u} \in \{\tau(\tilde{f}) | \tau \in G\}} \tilde{u}$$

при некотором одночлене $\tilde{f} \in \tilde{A}_{mn}$ степени, не большей n , в силу предложения 2 он может быть записан как полином над R от инвариантов

$$\tilde{v}_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{1j}^{\sigma_1} \dots \tilde{x}_{mj}^{\sigma_m}$$

степени, не большей n . Поэтому

$$\tilde{v}_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_j},$$

где $1 \leq s_1 + \dots + s_m \leq \mu$. Согласно предположению индукции каждый инвариант $\tilde{v}_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}$ есть полином над R от $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, так что $w_{\mu+1}$ — также полином над R от поляризованных элементарных симметрических полиномов $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$.

Для завершения доказательства заметим, что каждый элемент $v \in A_{mn}^G$ может быть записан, в силу предложения 2, как полином над R от инвариантов w_μ .

4. Примеры

Пример 1. Пусть $m = 3$ и $n = 2$. Покажем, что кубический полином

$$v_{111} = x_{11}x_{21}x_{31} + x_{12}x_{22}x_{32},$$

инвариантный относительно группы $G = S_2$, не может быть представлен как полином от инвариантов $u_{100}, u_{010}, u_{001}, u_{200}, u_{110}, u_{101}, u_{020}, u_{011}, u_{002}$ над F_2 , простым полем характеристики 2. По предложению 1

$$2v_{111} = 2u_{100}u_{010}u_{001} - (u_{100}u_{011} + u_{010}u_{101} + u_{001}u_{110}),$$

и поскольку образующие $u_{100}, u_{010}, u_{001}, u_{110}, u_{101}, u_{011}$ алгебры

$$\mathbb{Q}[x_{11}, x_{21}, x_{31}; x_{12}, x_{22}, x_{32}]^G$$

алгебраически независимы над $\mathbf{Q}$, это разложение единственно. Следовательно, v_{111} нельзя представить над F_2 как полином от

$$u_{100}, u_{010}, u_{001}, u_{200}, u_{110}, u_{101}, u_{020}, u_{011}, u_{002}.$$

Таким образом, граница Нетер неверна, если характеристика равна 2. Поэтому условия теорем 1 и 2 нельзя ослабить. Кроме того, мы видим, что

$$u_{100}, u_{010}, u_{001}, u_{011}, u_{101}, u_{110}$$

алгебраически зависимы над F_2 .

Покажем теперь, что полином $f_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$ вида

$$f_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = x_{11}^{\sigma_1} x_{21}^{\sigma_2} x_{31}^{\sigma_3} + x_{12}^{\sigma_1} x_{22}^{\sigma_2} x_{32}^{\sigma_3}$$

может быть представлен как полином от

$$u_{001}, u_{010}, u_{100}, u_{002}, u_{011}, u_{020}, u_{101}, u_{110}, u_{200}$$

и v_{111} с целыми коэффициентами.

Сначала покажем, что любой полином

$$f_{\sigma_1\sigma_2} = x_{11}^{\sigma_1} x_{21}^{\sigma_2} + x_{12}^{\sigma_1} x_{22}^{\sigma_2}$$

есть полином от $u_{01}, u_{10}, u_{02}, u_{11}, u_{20}$ над $\mathbf{Z}$. Действительно, справедливы равенства

$$x_{11} + x_{12} = u_{10}, \quad x_{21} + x_{22} = u_{01}$$

и

$$x_{11}^2 + x_{12}^2 = u_{10}^2 - 2u_{20}, \quad x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} = u_{01}u_{10} - u_{11}, \quad x_{21}^2 + x_{22}^2 = u_{01}^2 - 2u_{02}.$$

При $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 > 2$ без потери общности можно считать, что $\sigma_2 \geq 2$. В таком случае

$$\begin{aligned} f_{\sigma_1\sigma_2} &= (x_{21} + x_{22})f_{\sigma_1\sigma_2-1} - (x_{11}^{\sigma_1} x_{21}^{\sigma_2-1} x_{22} + x_{21}^{\sigma_1} x_{22}^{\sigma_2-1} x_{21}) \\ &= (x_{21} + x_{22})f_{\sigma_1\sigma_2-1} - x_{21}x_{22}f_{\sigma_1,\sigma_2-2} = u_{01}f_{\sigma_1\sigma_2-1} - u_{02}f_{\sigma_1\sigma_2-2}, \end{aligned}$$

и мы можем использовать индукцию по двум параметрам m и σ .

Аналогично, при $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 > 3$ без потери общности можно считать, что $\sigma_3 \geq 2$. В этом случае

$$\begin{aligned} f_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} &= (x_{31} + x_{32})f_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3-1} - (x_{11}^{\sigma_1} x_{21}^{\sigma_2} x_{31}^{\sigma_3-1} x_{32} + x_{21}^{\sigma_1} x_{22}^{\sigma_2} x_{32}^{\sigma_3-1} x_{31}) \\ &= u_{001}f_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3-1} - u_{002}f_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2}, \end{aligned}$$

и утверждение получается с использованием индукции по m и σ .

Пример 2. Пусть $m = 4$ и $n = 2$. Покажем, что многочлен четвертой степени

$$v_{1111} = x_{11}x_{21}x_{31}x_{41} + x_{12}x_{22}x_{32}x_{42},$$

инвариантный относительно группы $G = S_2$, не может быть представлен над F_2 как полином от

$$u_{r_1,r_2,r_3,r_4}, \quad 1 \leq r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq 4.$$

Предположим противное, пусть

$$\begin{aligned} v_{1111} = & au_{1000}u_{0100}u_{0010}u_{0001} \\ & + b(u_{1000}u_{0100}u_{0011} + u_{1000}u_{0010}u_{0101} + u_{1000}u_{0001}u_{0110}) \\ & + b(u_{0100}u_{0001}u_{1010} + u_{0100}u_{0010}u_{1001} + u_{0010}u_{0001}u_{1100}) \\ & + c(u_{1100}u_{0011} + u_{1010}u_{0101} + u_{1001}u_{0110}), \end{aligned}$$

где $a, b, c \in F_2$. Заметим, что

$$\begin{aligned} u_{1000} &= x_{11} + x_{21}, & u_{0100} &= x_{21} + x_{22}, \\ u_{0010} &= x_{31} + x_{32}, & u_{0001} &= x_{41} + x_{42}, \\ u_{1100} &= x_{11}x_{22} + x_{12}x_{12}, \\ u_{1010} &= x_{11}x_{32} + x_{12}x_{31}, \\ u_{1001} &= x_{11}x_{42} + x_{12}x_{41}, \\ u_{0110} &= x_{21}x_{32} + x_{22}x_{31}, \\ u_{0101} &= x_{21}x_{42} + x_{22}x_{41}, \\ u_{0011} &= x_{31}x_{42} + x_{32}x_{41}. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти равенства по x_{11} и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial u_{1000}}{\partial x_{11}} = 1, \quad \frac{\partial u_{0100}}{\partial x_{11}} = 0, \quad \frac{\partial u_{0010}}{\partial x_{11}} = 0, \quad \frac{\partial u_{0001}}{\partial x_{11}} = 0$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1100}}{\partial x_{11}} &= x_{22}, & \frac{\partial u_{1010}}{\partial x_{11}} &= x_{32}, & \frac{\partial u_{1001}}{\partial x_{11}} &= x_{42}, \\ \frac{\partial u_{0110}}{\partial x_{11}} &= 0, & \frac{\partial u_{0101}}{\partial x_{11}} &= 0, & \frac{\partial u_{0011}}{\partial x_{11}} &= 0, \end{aligned}$$

получаем, что

$$\begin{aligned} x_{21}x_{31}x_{41} = & au_{0100}u_{0010}u_{0001} + b(u_{0100}u_{0011} + u_{0010}u_{0101} + u_{0001}u_{0110}) \\ & + b(u_{0100}u_{0001}x_{32} + u_{0100}u_{0010}x_{42} + u_{0010}u_{0001}x_{22}) \\ & + c(u_{0011}x_{22} + u_{0101}x_{32} + u_{0110}x_{42}). \end{aligned}$$

Полагая теперь в последнем равенстве

$$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{12} = x_{22} = x_{32} = x_{42} = 1,$$

приходим к равенству $1 = 8a + 24b + 6c$, которое невозможно в F_2 .

Наконец, из предложения 2 следует, что

$$\begin{aligned} 6v_{1111} = & 6u_{1000}u_{0100}u_{0010}u_{0001} \\ & - 2(u_{1000}u_{0100}u_{0011} + u_{1000}u_{0010}u_{0101} + u_{1000}u_{0001}u_{0110}) \\ & - 2(u_{0100}u_{0001}u_{1010} + u_{0100}u_{0010}u_{1001} + u_{0010}u_{0001}u_{1100}) \\ & + (u_{1100}u_{0011} + u_{1010}u_{0101} + u_{1001}u_{0110}), \end{aligned}$$

так что полиномы $u_{1100}, u_{1010}, u_{1001}, u_{0110}, u_{0101}, u_{0011}$ алгебраически зависимы над F_2 . С другой стороны, эти полиномы алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Пример 3. Предыдущий пример можно обобщить следующим образом. Пусть m — целое число, $m > n \geq 2$, и p — простой делитель n . Пусть F_p — простое конечное поле характеристики $p > 0$ и

$$v_{11\dots 11} = \sum_{j=1}^n x_{1j} \dots x_{mj}$$

— однородный полином степени m . Покажем, что полином $v_{11\dots 11}$ нельзя представить как полином от инвариантов

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n,$$

над полем F_p .

Предположим противное, пусть при некоторых $a_{s_1, \dots, s_n} \in F_p$

$$v_{11\dots 11} = \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=m} a_{s_1, \dots, s_n} \sum_R \prod_{\nu=1}^n \prod_{\sigma_\nu=1}^{s_\nu} u_{r_{1\sigma_\nu}, \dots, r_{m\sigma_\nu}},$$

где суммирование во второй сумме проводится по множеству R всех целых неотрицательных

$$r_{1\sigma_\nu}, \dots, r_{m\sigma_\nu}, \quad 1 \leq \nu \leq n,$$

таких, что

$$\begin{aligned} r_{1\sigma_\nu} + \dots + r_{m\sigma_\nu} &= \nu, \quad 1 \leq \sigma_\nu \leq s_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq n, \\ r_{i\sigma_1} + \dots + r_{i\sigma_n} &= 1, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Без потери общности предположим, что если $k \leq n$ — наименьшее положительное целое число такое, что $s_k \geq 1$, то

$$r_{1\sigma_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_k = 1, \\ 0, & \text{если } 2 \leq \sigma_k \leq s_k. \end{cases}$$

Дифференцируя приведенное выше равенство по x_{11} и учитывая, что

$$\frac{\partial u_{r_1, \dots, r_m}}{\partial x_{11}} = \begin{cases} 0, & \text{если } r_1 = 0, \\ u_{0, r_2, \dots, r_m}^{(1, 0, \dots, 0)}, & \text{если } r_1 = 1, \end{cases}$$

где $u_{0, r_2, \dots, r_m}^{(1, 0, \dots, 0)}$ — соответствующий элементарный симметрический полином от векторов $(x_{2j}, \dots, x_{mj})$, $1 \leq j \leq n$, получаем, что

$$x_{21} \dots x_{m1} = \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=m} a_{s_1, \dots, s_n} \sum_{j=1}^n \Psi_{s_1, \dots, s_n}^{(j)}, \quad (4)$$

где

$$\Psi_{s_1, \dots, s_n}^{(j)} = \sum_R \prod_{\sigma_k=2}^{s_k} u_{0, r_{2\sigma_k}, \dots, r_{m\sigma_k}} \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^n \prod_{\sigma_\nu=1}^{s_\nu} u_{0, r_{2\sigma_\nu}, \dots, r_{m\sigma_\nu}} \right),$$

и множество R определено выше. Обозначим $\omega_{0,r_2,\dots,r_m}$ значение $u_{0,r_2,\dots,r_m}$ в точке

$$(x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{1n}, \dots, x_{mn}) = (1, \dots, 1; \dots; 1, \dots, 1).$$

Поскольку $m > n \geq 2$, каждая двоичная последовательность $(0, r_2, \dots, r_m)$, встречающаяся в последнем равенстве, содержит l ненулевых элементов при некотором $1 \leq l \leq n$. В этом случае

$$\omega_{0,r_2,\dots,r_m} = n(n-1) \dots (n-l+1),$$

и полагая в (4)

$$x_{11} = \dots = x_{m1} = \dots = x_{1n} = \dots = x_{mn} = 1,$$

получаем равенство

$$1 = n \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=m} b_{s_1,\dots,s_n},$$

которое невозможно в F_p для любого простого p , делящего n .

Список литературы

1. Benson D. J., *Polynomial Invariants of Finite Groups*. Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1993.
2. Bourbaki N., *Elements of Mathematics, Algebra II*. Springer, Berlin, 1990.
3. Dieudonne J. A., Carrel J. B., *Invariant Theory, Old and New*. Academic Press, New York, 1971.
4. Hilbert D., Über die vollen Invariantensystem. *Math. Ann.* (1893) **42**, 313–373.
5. Mumford D., *Geometric Invariant Theory*. Springer, Berlin, 1993.
6. Noether E., Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. *Math. Ann.* (1916) **77**, 89–92.
7. Noether E., Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linear Gruppen der Charakteristik p . *Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen* (1926), 28–35.
8. Richman D. R., Explicit generators of the invariants of finite groups. *Adv. Math.* (1996) **124**, 49–76.
9. Schmid B. J., *Finite Groups and Invariant Theory*. Lect. Notes Math. (1991) **1478**.
10. Smith L., *Polynomial Invariants of Finite Groups*. A. K. Peters, Wellesley, MA, 1995.
11. Smith L., Polynomial invariants of finite groups. A survey of recent developments. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1997) **34**, 211–250.
12. Stepanov S. A., On vector invariants of the symmetric group. *Discrete Math. Appl.* (1996) **6**, 135–147.
13. Waring E., *Meditationes Algebraicae*. Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1782.
14. Weyl H., *The Classical Groups*. Inst. Adv. Study, Princeton, 1946.

Статья поступила 25.05.1999.