Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Закон больших чисел для перманентов случайных стохастических матриц, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 3, 91–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:08:39

УДК 519.2

Закон больших чисел для перманентов случайных стохастических матриц

© 1999 г. А. Н. Тимашев

Рассматривается класс всех квадратных $(0, 1)$ -матриц размера $n \times n$, имеющих в каждой строке r единиц, $2 \leq r \leq n$. Для матрицы P , выбираемой случайно равномерно из этого класса, получены достаточные условия асимптотического совпадения с вероятностью, стремящейся к единице, перманента $\text{per } P$ с его средним значением в схеме серий, когда при $n \rightarrow \infty$ параметр $r = r(n) \rightarrow \infty$ так, что $\sqrt{n} = o(r)$. Аналогичная задача решается для случайных стохастических матриц размера $n \times n$, строки которых являются независимыми в совокупности одинаково распределенными n -мерными случайными величинами, имеющими симметричное распределение Дирихле с параметром ν при условии, что при $n \rightarrow \infty$ параметр $\nu = \nu(n) > 0$ меняется так, что $n\nu^2 \rightarrow \infty$.

1. Введение

Рассмотрим класс всех квадратных $(0, 1)$ -матриц размера $n \times n$, имеющих в каждой строке r единиц, $2 \leq r \leq n$. Число таких матриц равно $\binom{n}{r}^n$. Зададим на этом классе равномерное распределение, приписав каждой матрице вероятность, равную $\binom{n}{r}^{-n}$. Пусть P — матрица, случайно выбранная из этого класса. Рассмотрим случайную величину, равную перманенту $\text{per } P$ матрицы P .

Для подсчета математического ожидания $E \text{per } P$ и второго момента $E(\text{per } P)^2$ перманента матрицы P используем метод, реализованный О'Нейлом ([1], стр. 79–80). Упорядочим некоторым способом все подстановки симметрической группы σ_n порядка n . Пусть $\sigma_n = \{s_1, s_2, \dots, s_{n!}\}$ и $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n!}$ — соответствующие подстановочные матрицы. Положим $\xi_i = 1$, если на местах, соответствующих единицам матрицы Π_i , в матрице P стоят единицы, и $\xi_i = 0$ в противном случае, $i = 1, 2, \dots, n!$. Тогда

$$P\{\xi_i = 1\} = \left(\frac{r}{n}\right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n!,$$

и поэтому из равенства

$$\text{per } P = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n!}$$

следует, что

$$E \text{per } P = n! \left(\frac{r}{n}\right)^2. \quad (1)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\text{per } P)^2 &= \mathbf{E} \text{ per } P + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n!} \mathbf{P}\{\xi_i = \xi_j = 1\} \\ &= n! \left(\frac{r}{n}\right)^n + 2 \left(\frac{r}{n}\right)^n \sum_{1 \leq i < j \leq n!} \left(\frac{r-1}{n-1}\right)^{n-l_{ij}}, \end{aligned}$$

где $l_{ij} = n - \rho(s_i, s_j)$ при $i \neq j$ и

$$\rho(s_i, s_j) = \text{card}\{\nu \mid 1 \leq \nu \leq n; s_i(\nu) \neq s_j(\nu)\}$$

— расстояние между подстановками s_i и s_j , $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Известно ([1], стр. 80), что $\rho(s_i, s_j) \geq 1$ при $i \neq j$ и поэтому $l_{ij} \leq n-1$; кроме того, для фиксированной подстановки s_i число подстановок s_j таких, что $\rho(s_i, s_j) = n-l$, выражается формулой

$$\frac{n!}{l!} \sum_{m=0}^{n-l} \frac{(-1)^m}{m!}, \quad l = 0, 1, \dots, n.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\text{per } P)^2 &= n! \left(\frac{r}{n}\right)^n + \left(\frac{r}{n}\right)^n \sum_{i=1}^{n!} \sum_{l=0}^{n!} \sum_{j: \rho(s_i, s_j)=n-l} \mathbf{P}\{\xi_i = \xi_j = 1\} \\ &= n! \left(\frac{r}{n}\right)^n \sum_{m=0}^n (n)_m \left(\frac{r-1}{n-1}\right)^m S_m, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$S_m = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

и

$$(n)_0 = 1, \quad (n)_m = n(n-1) \dots, (n-m+1), \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Исходя из равенств (1), (2) и (3), в работе устанавливается закон больших чисел для перманента случайной матрицы P , аналогичный доказанным О'Нейлом законам больших чисел для перманентов случайных $(0, 1)$ -матриц с заданным числом единиц, а также с одинаковым числом единиц в каждой строке и каждом столбце [2, 3] (см. также [1], стр. 79–85). Заметим, что если все элементы матрицы P разделить на r , то получится случайная стохастическая матрица P' , для которой $\text{per } P' = r^{-n} \text{per } P$, так что с учетом (1) и (2)

$$\mathbf{E} \text{ per } P' = \frac{n!}{r^n}$$

и

$$\mathbf{E}(\text{per } P')^2 = \frac{n!}{r^n n^n} \sum_{m=0}^n (n)_m \left(\frac{r-1}{n-1}\right)^m S_m.$$

Класс матриц вида P рассматривается в [4], где сформулирован результат, аналогичный классической теореме Эрдеша–Реньи, оценивающий вероятность положительности перманента случайной $(0, 1)$ -матрицы с заданным числом единиц ([1],

стр. 85). Таким образом, указанная аналогия распространяется и на закон больших чисел. Заметим, что актуальность рассматриваемой проблематики отмечалась в [5].

Пусть далее C — случайная стохастическая матрица размера $n \times n$, строки которой являются независимыми в совокупности n -мерными одинаково распределенными случайными величинами, имеющими симметричное распределение Дирихле с параметром $\nu > 0$. Плотность такого распределения имеет вид [6]

$$p(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{\Gamma(n\nu)}{(\Gamma(\nu))^n} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\nu-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j\right)^{\nu-1}, \quad (4)$$

если $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n-1$, и $x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 1$, и $p(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ в противном случае. Здесь Γ — гамма-функция Эйлера.

Доказывается закон больших чисел для перманента $\text{per } C$ случайной стохастической матрицы C при $n \rightarrow \infty$ в схеме серий, когда $\nu = \nu(n) > 0$ и $n\nu^2 \rightarrow \infty$. Заметим, что в случае $\nu = 1$ в [7] показано, что с вероятностью единица $S(C) \rightarrow 1 - \gamma$ при $n \rightarrow \infty$, где $S(C)$ — пропускная способность дискретного канала без памяти с матрицей переходных вероятностей C и $\gamma = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера.

2. Дискретный случай

Лемма 1. При $0 < p \leq 1$ справедливо тождество

$$\sum_{m=0}^n (n)_m S_m p^m = n! p^n \sum_{m=0}^n \frac{(p^{-1} - 1)^m}{m!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Доказательство. Положим

$$\varphi_n(p) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n (n)_m S_m p^m, \quad n = 0, 1, \dots,$$

тогда

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(p) z^n = (1 - pz)^{-1} \exp((1 - p)z)$$

при $|z| < p^{-1}$. Пусть

$$u(z) = (1 - pz)^{-1}, \quad v(z) = \exp(1 - p)z,$$

тогда согласно формуле Лейбница

$$\phi^{(n)}(z) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} u^{(m)}(z) v^{(n-m)}(z).$$

Поскольку

$$u^{(m)}(z) = m! p^m (1 - pz)^{-(m+1)}$$

и

$$v^{(n-m)}(z) = (1 - p)^{n-m} \exp((1 - p)z),$$

при $z = 0$ получаем, что

$$\phi^{(n)}(0) = \sum_{m=0}^n (n)_m S_m p^m = n! p^n \sum_{m=0}^n \frac{(p^{-1} - 1)^m}{m!}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{E}(\text{per } P)^2 = (n!)^2 \left(\frac{r(r-1)}{n(n-1)} \right)^n \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left(\frac{n-r}{r-1} \right)^m, \quad r = 2, 3, \dots, n. \quad (6)$$

Доказательство. Положим $p = (r-1)/(n-1)$, тогда $0 < p \leq 1$, если $2 \leq r \leq n$, и поэтому согласно (5) из (2) следует (6). Лемма 2 доказана.

Рассмотрим сначала случай, когда $r = 2$. В этом случае при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\text{per } P)^2 = \frac{1}{2} (n!)^2 n^{-2n} \left(\frac{2n}{n-1} \right)^n e^{n-2} (1 + o(1)) = \frac{\pi n}{e} \left(\frac{2}{e} \right)^n (1 + o(1)).$$

Действительно, при $r = 2$ согласно (6)

$$\mathbf{E}(\text{per } P)^2 = (n!)^2 n^{-2n} \left(\frac{2n}{n-1} \right)^n \sum_{m=0}^n \frac{(n-2)^m}{m!}.$$

Положим $\lambda = n - 2$, $n \geq 3$, и пусть ξ — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ . Тогда

$$e^{-(n-2)} \sum_{m=0}^n \frac{(n-2)^m}{m!} = \mathbf{P}\{\xi \leq \lambda + 2\} = \mathbf{P}\left\{ \frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \right\} = \frac{1}{2} + o(1)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$. Отсюда при $r = 2$ получаем формулу для $\mathbf{E}(\text{per } P)^2$, приведенную выше.

Лемма 3. *При $n \rightarrow \infty$ и $3 \leq r \leq n$*

$$\mathbf{E}(\text{per } P)^2 = (n!)^2 n^{-2n} (r(r-1))^n \exp((n-1)/(r-1)) (1 + o(1)). \quad (7)$$

Доказательство. При $r = n$ равенство (7), очевидно, выполняется. Пусть $3 \leq r < n$, тогда $\lambda = (n-r)/(r-1) > 0$. Если ξ — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ , то

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{n-r}{r-1}\right) \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left(\frac{n-r}{r-1}\right)^m &= \mathbf{P}\{\xi \leq (r-1)\lambda + r\} \\ &= \mathbf{P}\{(\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda} \leq (r-2)\sqrt{\lambda} + r/\sqrt{\lambda}\}. \end{aligned}$$

Предположим сначала, что $r = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, тогда $\lambda \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому при $r \geq 3$

$$\mathbf{P}\{(\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda} \leq (r-2)\sqrt{\lambda} + r/\sqrt{\lambda}\} = 1 + o(1).$$

Теперь предположим, что $r \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, тогда в силу неравенства Маркова для неотрицательной случайной величины ξ

$$\mathbf{P}\{\xi \leq n\} \geq 1 - \frac{\lambda}{n} = 1 - \frac{n-r}{n(r-1)} = 1 + o(1).$$

Таким образом, при условиях леммы 3 $\mathbf{P}\{\xi \leq n\} = 1 + o(1)$, и поэтому из (6) следует (7). Лемма 3 доказана.

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$ и $r = r(n) \rightarrow \infty$ так, что $\sqrt{n} = o(r)$. Тогда последовательность случайных величин $\eta_n = \text{per } P / \mathbf{E} \text{ per } P$ сходится по вероятности к единице.

Доказательство. Ясно, что

$$\eta_n = \frac{\text{per } P}{\mathbf{E} \text{ per } P} = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{r}\right)^n \text{per } P, \quad (8)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $r \geq 3$ согласно (7)

$$\mathbf{E} \eta_n^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n \exp((n-1)/(r-1))(1 + o(1)).$$

Если $\sqrt{n} = o(r)$, то

$$n \ln n \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{n-1}{r-1} = o(1),$$

и поэтому

$$\mathbf{E} \eta_n^2 = 1 + o(1).$$

Так как $\mathbf{E} \eta_n = 1$, то $\mathbf{D} \eta_n = o(1)$, и если $\varepsilon > 0$, то согласно неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\{|\eta_n - 1| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-2} \mathbf{D} \eta_n.$$

Если положить

$$\varepsilon = \varepsilon_n = \sqrt[3]{\mathbf{D} \eta_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то $\varepsilon_n > 0$ при $3 \leq r < n$ и $\varepsilon_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, так что

$$\varepsilon_n^{-2} \mathbf{D} \eta_n = \varepsilon_n \rightarrow 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n - 1| \geq \varepsilon_n\} = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если $n \rightarrow \infty$ и $r^2/n \rightarrow \alpha \in (0, \infty)$, то

$$\mathbf{E}(\text{per } P)^2 = (n!)^2 \left(\frac{r}{n}\right)^{2n} \exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) (1 + o(1)),$$

поскольку в этом случае

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{n-1}{r-1} = \frac{1}{2\alpha} + o(1).$$

Если же $r = o(\sqrt{n})$ при $n \rightarrow \infty$, то $(\mathbf{E} \text{ per } P)^2 = o(\mathbf{E}(\text{per } P)^2)$ согласно (7).

Замечание 2. Условие $\sqrt{n} = o(r)$ теоремы 1 означает, что $n^{3/2} = o(N)$, где $N = rn$ — число единиц в матрице P . Известно ([1], стр. 83), что для справедливости закона больших чисел для перманентов случайных $(0, 1)$ -матриц размера $n \times n$ с заданным числом N единиц достаточно, чтобы $N > n^{3/2+\varepsilon}$, где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и $n^\varepsilon \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Это подтверждает указанную выше аналогию в формулировках законов больших чисел для случайной матрицы P , имеющей r единиц в каждой строке, и случайной $(0, 1)$ -матрицы размера $n \times n$, содержащей $N = rn$ единиц.

3. Непрерывный случай

Пусть $C = \|c_{ij}\|$ — случайная стохастическая матрица размера $n \times n$, определенная выше. Распределение каждой строки этой матрицы совпадает с распределением случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)$, где

$$\xi_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i$$

и $(n-1)$ -мерный случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ имеет плотность вида (4).

Заметим, что (см. [6])

$$\mathbf{E}\xi_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

и что в случае $\nu = 1$ вектор $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ имеет равномерное распределение на $(n-1)$ -мерном симплексе

$$\Omega_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_i \geq 0; i = 1, \dots, n-1; x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 1\}$$

с плотностью $p(x_1, \dots, x_{n-1}) = (n-1)!$, если $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega_{n-1}$, и $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ в противном случае. По определению

$$\text{per } C = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} c_{1i_1} \dots c_{ni_n},$$

где суммирование проводится по всем $n!$ перестановкам $(i_1, \dots, i_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$. Поскольку строки матрицы C независимы в совокупности,

$$\mathbf{E} \text{ per } C = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \mathbf{E} c_{1i_1} \dots \mathbf{E} c_{ni_n}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что

$$\mathbf{E} \text{ per } C = \frac{n!}{n^n}. \quad (11)$$

При наших условиях все двумерные случайные векторы вида (ξ_i, ξ_j) , $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, имеют одинаковое распределение, и поэтому (см. [6])

$$\mathbf{E}(\xi_i \xi_j) = \mathbf{E}(\xi_1 \xi_2) = \frac{\nu}{n(n\nu + 1)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

и

$$\mathbf{E}\xi_i^2 = \mathbf{E}\xi_1^2 = \frac{\nu + 1}{n(n\nu + 1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Лемма 4. Справедливо равенство

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = \frac{n!}{n^n} \left(\frac{\nu+1}{n\nu+1} \right)^n \sum_{m=0}^n (n)_m S_m \left(\frac{\nu}{\nu+1} \right)^m. \quad (12)$$

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные использованным при обосновании формулы (2), получаем, что

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = n! \sum_{m=0}^n (n)_m S_m (\mathbf{E}(\xi_1 \xi_2))^m (\mathbf{E} \xi_1^2)^{n-m}. \quad (13)$$

Подставляя в (13) значения $\mathbf{E}(\xi_1 \xi_2)$ и $\mathbf{E} \xi_1^2$, приведенные выше, получаем (12). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Справедливо равенство

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = \frac{(n!)^2}{n^{2n}} \left(1 - \frac{1}{1+n\nu} \right)^n \sum_{m=0}^n \frac{\nu^{-m}}{m!}. \quad (14)$$

Доказательство. Формула (14) следует из (5) и (12), если положить $p = \nu/(\nu+1) \in (0, 1)$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $n \rightarrow \infty$ и $\nu = \nu(n) > 0$ меняется так, что $n\nu \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = \frac{(n!)^2}{n^{2n}} \left(1 - \frac{1}{1+n\nu} \right)^n \exp(1/\nu) \left(1 + O\left(\frac{1}{n\nu}\right) \right). \quad (15)$$

Доказательство. Положим $\lambda = 1/\nu > 0$, и пусть ξ — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ . Тогда в силу неравенства Маркова для неотрицательной случайной величины ξ

$$\sum_{m=0}^n \frac{\nu^{-m}}{m!} = \exp(1/\nu) \mathbf{P}\{\xi \leq n\} \geq \exp(1/\nu) \left(1 - \frac{1}{n\nu} \right),$$

и поэтому при условиях леммы 6

$$\sum_{m=0}^n \frac{\nu^{-m}}{m!} = \exp(1/\nu) \left(1 + O\left(\frac{1}{n\nu}\right) \right). \quad (16)$$

Формула (15) следует из (14) и (16). Лемма 6 доказана.

Теорема 2. Пусть $n \rightarrow \infty$ и $\nu = \nu(n) > 0$ меняется так, что $n\nu^2 \rightarrow \infty$. Тогда последовательность случайных величин $\theta_n = \text{per } C / \mathbf{E} \text{per } C$ сходится по вероятности к единице.

Доказательство. При условиях теоремы 2

$$\left(1 - \frac{1}{1+n\nu} \right)^n = \exp(-1/\nu) \left(1 + O\left(\frac{1}{n\nu^2}\right) \right) = \exp(-1/\nu)(1 + o(1)),$$

поскольку из условия $n\nu^2 \rightarrow \infty$ следует, что $n\nu \rightarrow \infty$. Следовательно, с учетом (11) и (15)

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = \frac{(n!)^2}{n^{2n}}(1 + o(1)) = (\mathbf{E}(\text{per } C))^2(1 + o(1)),$$

и поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{D} \text{ per } C = o(\mathbf{E} \text{ per } C)^2.$$

Полагая

$$\theta_n = \frac{\text{per } C}{\mathbf{E} \text{ per } C} = \frac{n^n}{n!} \text{ per } C,$$

находим, что $\mathbf{E}\theta_n = 1$ и $\mathbf{D}\theta_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассуждая далее так же, как при доказательстве теоремы 1, получаем утверждение теоремы.

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
2. O'Neil P., Asymptotic in random $(0, 1)$ -matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1970) **25**, №2, 290–296.
3. O'Neil P., Asymptotic and random matrices with row-sum and column-sum restrictions. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1969) **75**, №6, 1276–1282.
4. Shevelev V. S., On projection of the Erdős-Renyi theorem about permanent of stochastic quadratic $(0, 1)$ -matrices into the subset of stochastic $(0, 1)$ -matrices with equal row sums. *Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов*. ТВП, Москва, 1996, с. 177–178.
5. Сачков В. Н., Комбинаторные свойства неотрицательных матриц. *Пробл. киберн.* (1978) **26**, 37–50.
6. Уилкс С., *Математическая статистика*. Наука, Москва, 1967.
7. Амбросимов А. С., Тимашев А. Н., Закон больших чисел для пропускной способности каналов без памяти со случайной переходной матрицей. *Пробл. передачи информации* (1995) **31**, №3, 24–34.

Статья поступила 07.05.1998.