Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 33–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:28:40

УДК 519.2

О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде

© 1999 г. В. И. Афанасьев

Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями, T — момент вырождения $\{\xi_n\}$, а T_x — момент первого достижения полуоси (x, ∞) . Найдены асимптотические распределения при $x \rightarrow \infty$ случайных величин $T_x/\ln^2 x$, T_x/T , $T/\ln^2 x$, рассматриваемых при условии $\{T_x < \infty\}$.

1. Пусть последовательности случайных величин

$$\pi_n = \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \pi_n^{(2)}, \dots\}, \quad \pi_n^{(i)} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} = 1, \quad i, n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

одинаково распределены и независимы при разных n . Введем производящие функции

$$f_n(s) = \pi_n^{(0)} + \pi_n^{(1)}s + \pi_n^{(2)}s^2 + \dots, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ неотрицательных целочисленных случайных величин называется ветвящимся процессом в случайной среде $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, если

$$\mathbf{M}(s^{\xi_{n+1}} \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n) = (f_n(s))^{\xi_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

(для простоты изложения будем считать, что $\xi_0 = 1$).

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$, где

$$X_i = \ln f'_{i-1}(1), \quad \eta_i = f''_{i-1}(1)/(2f'_{i-1}(1)^2), \quad i \in \mathbf{N}.$$

Будем предполагать, что процесс $\{\xi_n\}$ является критическим, т.е. $\mathbf{M}X_1 = 0$, и выполнены условия:

- (а) конечны $\mathbf{M}X_1^2$, $\mathbf{M}\eta_1$, $\mathbf{M}X_1\eta_1$, причем $\mathbf{M}X_1^2 = \sigma^2 > 0$;
- (б) производящие функции $f_n(s)$ дробно-линейны;
- (с) $\mathbf{M} \exp(-X_1) < \infty$.

Пусть T_x — момент первого достижения уровня $x > 0$ процессом $\{\xi_n\}$, т.е.

$$T_x = \inf\{n: \xi_n > x\}.$$

В [1] установлено, что если выполнены условия (a), (b), (c), то при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T_x < \infty) = \mathbf{P}\left(\sup_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > x\right) \sim \frac{c_0}{\ln x}, \quad (1)$$

где c_0 — положительная постоянная.

В настоящей работе устанавливаются следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и выполнены условия (a), (b), (c), тогда при любом фиксированном $u \in [0, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\sigma^2 T_x / \ln^2 x \leq u \mid T_x < \infty) = K(\pi \sqrt{u}/2),$$

где

$$K(u) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 u^2}$$

— функция распределения Колмогорова.

Пусть T — момент вырождения $\{\xi_n\}$, т.е.

$$T = \inf\{n: \xi_n = 0\}.$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 при любом фиксированном $u \in [0, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}(T_x/T \leq u \mid T_x < \infty) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{u}{1-u}}\right).$$

Теорема 3. В условиях теоремы 1 при любом фиксированном $u \in (0, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2 x} \leq u \mid T_x < \infty\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi u}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{u}\right).$$

Доказательства этих теорем существенно опираются на следующие факты, установленные в [1]: в условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\{\ln(\xi_{[nt]} + 1)/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, \infty) \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t \wedge \tau), t \in [0, \infty)\}, \quad (2)$$

$$\{\ln(\xi_{[tT]} + 1)/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t)/\alpha, t \in [0, 1]\}, \quad (3)$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, \infty)$ или $D[0, 1]$ с топологией Скорохода, $W^+(t)$ — броуновская извилина [2] при $t \in [0, 1]$, а при $t > 1$ стандартное броуновское движение, начинающееся из $W^+(1)$,

$$\tau = \inf\{t > 0: W^+(t) = 0\},$$

$W_0^+(t)$ — броуновская экскурсия [2], α — случайная величина, равномерно распределенная на $(0, 1)$ и не зависящая от W_0^+ .

2. В этом разделе будут доказаны условные функциональные предельные теоремы, касающиеся случайного блуждания с нулевым сносом. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем

$$\mathbf{M}X_1 = 0, \quad \mathbf{D}X_1 = \sigma^2, \quad 0 < \sigma^2 < \infty.$$

Рассмотрим случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пусть $\mathcal{T}$ — момент достижения полуоси $(-\infty, 0]$, т. е.

$$\mathcal{T} = \inf\{n > 0: S_n \leq 0\}.$$

Известно [4, гл. XII, §7], что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (4)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\mathbf{P}(S_k > 0) - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (5)$$

и (см. [5])

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, \infty)\}. \quad (6)$$

Усилим соотношение (6).

Теорема 4. Пусть $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Тогда

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{\mathcal{T}t}{n}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t, \tau \in [0, \infty)\}.$$

Доказательство. Ввиду соотношения (6) достаточно показать, что сходятся конечномерные распределения последовательности двумерных случайных процессов

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{t\mathcal{T}}{n}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\},$$

а для этого достаточно показать, что при любых фиксированных $k \in \mathbf{N}$, неотрицательных $t_1, t_2, \dots, t_k, a$ и действительных $x_1, x_2, \dots, x_k$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{S_{[nt_i]}}{\sigma\sqrt{n}} \leq x_i, i = 1, \dots, k, \frac{\mathcal{T}}{n} > a \mid \mathcal{T} > n \right) \\ = \mathbf{P} (W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k, \tau > a). \end{aligned} \quad (7)$$

Если $a \in [0, 1]$, то это соотношение следует из (6), поскольку $\tau > 1$. Если же $a > 1$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{S_{[nt_i]}}{\sigma\sqrt{n}} \leq x_i, i = 1, \dots, k, \frac{\mathcal{T}}{n} > a \mid \mathcal{T} > n \right) \\ = \frac{\mathbf{P}(\mathcal{T} > an)}{\mathbf{P}(\mathcal{T} > n)} \mathbf{P} \left(\frac{S_{[na(t_i/a)]}}{\sigma\sqrt{na}} \leq \frac{x_i}{\sqrt{a}}, i = 1, \dots, k \mid \mathcal{T} > na \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя к (8) соотношения (4), (6), получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{S_{[nt_i]}}{\sigma\sqrt{n}} \leq x_i, i = 1, \dots, k, \frac{\mathcal{T}}{n} > a \mid \mathcal{T} > n \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+(t_i/a) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Согласно лемме 1 из [1] при $a > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{P}(W^+(t_i/a) \leq x_i/\sqrt{a}, i = 1, \dots, k) = \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, k, \tau > a).$$

Из двух последних соотношений следует утверждение теоремы 4.

Из доказанного результата вытекают следующие две теоремы.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{S_{[t\mathcal{T}]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), W^+(t\tau), t \in [0, \infty)\}.$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} Y_n &= \left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}, \\ \Phi_n &= \left\{ \frac{t\mathcal{T}}{n}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}, \\ Z_n &= \left\{ \frac{S_{[t\mathcal{T}]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $D_0[0, \infty)$ — подмножество $D[0, \infty)$, состоящие из всех неубывающих неотрицательных функций. Ясно, что Y_n и Φ_n — случайные элементы $D[0, \infty)$ и $D_0[0, \infty)$ соответственно, а (Y_n, Φ_n) — случайный элемент $D[0, \infty) \times D_0[0, \infty)$ с топологией произведения. В силу теоремы 4

$$(Y_n, \Phi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y, \Phi), \quad (9)$$

где $Y = \{W^+(t), t \in [0, \infty)\}$, $\Phi = \{t\tau, t \in [0, \infty)\}$.

Очевидно, что $\mathbf{P}(Y \in C[0, \infty)) = \mathbf{P}(\Phi \in C[0, \infty)) = 1$.

Рассмотрим отображение $D[0, \infty) \times D_0[0, \infty)$ в $D[0, \infty)$

$$\Psi(y, \varphi) = \{y(\varphi(t)), t \in [0, \infty)\}, \quad y \in D[0, \infty), \quad \varphi \in D_0[0, \infty).$$

Покажем, что если $y, \varphi \in C[0, \infty)$, то оно является непрерывным. Если y_n сходится к y , а φ_n к φ в топологии Скорохода и $y, \varphi \in C[0, \infty)$, то обе эти сходимости равномерны на любом конечном отрезке $[0, u]$, $u > 0$. Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, u]} |\Psi(y_n, \varphi_n) - \Psi(y, \varphi)| &\leq \sup_{t \in [0, u]} |y_n(\varphi_n(t)) - y(\varphi_n(t))| + \sup_{t \in [0, u]} |y(\varphi_n(t)) - y(\varphi(t))| \\ &\leq \sup_{t \in [0, u]} |y_n(t) - y(t)| + \sup_{t \in [0, u]} |y(\varphi_n(t)) - y(\varphi(t))|, \end{aligned}$$

где $a = \sup_n \varphi_n(u)$.

Отсюда вытекает равномерная сходимость $\Psi(y_n, \varphi_n)$ к $\Psi(y, \varphi)$ на отрезке $[0, u]$ (поскольку функция $y(t)$ равномерно непрерывна на $[0, a]$). Из равномерной сходимости на любом конечном отрезке $[0, u]$, $u > 0$, следует сходимость в топологии Скорохода. Осталось заметить, что Z_n — случайный элемент $D[0, \infty)$ и $Z_n = \Psi(Y_n, \Phi_n)$. Поэтому из (9) вытекает, что

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \Psi(Y, \Phi) = \{W^+(t\tau), t \in [0, \infty)\}.$$

Теорема 5 доказана.

Замечание 1. Теорема 5 позволяет изучать случайное блуждание при условии, что $\{\mathcal{T} > n\}$, сразу в двух временных шкалах: абсолютной и относительной (относительно времени достижения отрицательной полуоси). В [5] не совсем строго показано, что

$$\left\{ \frac{S_{[t\mathcal{T}]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t\tau), t \in [0, 1]\},$$

причем процесс $\{W^+(t\tau), t \in [0, 1]\}$ имеет такие же конечномерные распределения, как $\{W_0^+(t)/\alpha, t \in [0, 1]\}$, где α — случайная величина, равномерно распределенная на $(0, 1)$ и не зависящая от W_0^+ .

Введем остановленное случайное блуждание

$$\tilde{S}_n = \begin{cases} S_n, & \text{если } n < \mathcal{T}, \\ 0, & \text{если } n \geq \mathcal{T}. \end{cases}$$

Теорема 6. Пусть $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t \wedge \tau), t \in [0, \infty)\}.$$

Доказательство. Положим

$$\tilde{Y}_n = \left\{ \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\}.$$

Используя обозначения из доказательства теоремы 5, запишем, что

$$\tilde{Y}_n = \begin{cases} Y_n(t), & \text{если } t < \Phi_n(1), \\ 0, & \text{если } t \geq \Phi_n(1). \end{cases}$$

Покажем, что отображение $D[0, \infty) \times D_0[0, +\infty)$ в $D[0, \infty)$

$$\tilde{\Psi}(y, \varphi) = \begin{cases} y(t), & \text{если } t < \varphi(1), \\ 0, & \text{если } t \geq \varphi(1). \end{cases}$$

где $y \in D[0, \infty)$, $\varphi \in D_0[0, \infty)$, является непрерывным, если $y, \varphi \in C[0, \infty)$. Если y_n сходится к y , а φ_n к φ в топологии Скорохода и x, φ принадлежат $C[0, \infty)$, то обе эти

сходимости равномерны на любом конечном отрезке $[0, u]$, $u > 0$. Теперь заметим, что

$$\sup_{t \in [0, u]} |\tilde{\Psi}(y_n, \varphi_n) - \tilde{\Psi}(y, \varphi)| \leq \sup_{t \in [0, u]} |y_n(t) - y(t)| + \sup_{t \in [a_n, b_n]} |y(t)|,$$

где

$$a_n = \varphi_n(1) \wedge \varphi(1), \quad b_n = \varphi_n(1) \vee \varphi(1).$$

Отсюда следует равномерная сходимость $\tilde{\Psi}(y_n, \varphi_n)$ к $\tilde{\varphi}(y, \varphi)$ на любом конечном отрезке $[0, u]$, $u > 0$, а следовательно, сходимость в топологии Скорохода. Осталось заметить, что $\tilde{Y}_n = \tilde{\Psi}(Y_n, \Phi_n)$, поэтому из (9) вытекает, что

$$\tilde{Y}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\Psi}(Y, \Phi) = \{W^+(t \wedge \tau), t \in [0, \infty)\}.$$

Теорема 6 доказана.

3. Рассмотрим случайное блуждание $\{S_n\}$ с нулевым сносом. Пусть $\mathcal{T}_x$ — момент первого достижения уровня $x > 0$ последовательностью $\{S_n\}$, т.е.

$$\mathcal{T}_x = \inf\{n: S_n > x\}.$$

В работах [6, 7] установлено, что при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_x < \mathcal{T}) \sim \frac{c_3}{x}, \quad (10)$$

где

$$c_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\mathbf{P}(S_k > 0) - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (11)$$

Исследование случайного блуждания при условии $\{\mathcal{T}_x < \mathcal{T}\}$ осуществлялось в работах [7, 8]. В следующей теореме устанавливается, что $\mathcal{T}_x$ имеет порядок x^2 при условии, что $\{\mathcal{T}_x < \mathcal{T}\}$ и $x \rightarrow \infty$.

Теорема 7. Пусть $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Тогда при любом фиксированном $u \in [0, \infty)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 \mathcal{T}_x}{x^2} \leq u \mid \mathcal{T}_x < \mathcal{T} \right) = K \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{u} \right),$$

где $K(\cdot)$ — функция распределения Колмогорова.

Доказательству теоремы 7 предпошлим две леммы.

Лемма 1. У случайных процессов $\{W^+(t \wedge \tau), t \in [0, \infty)\}$ и $\{W_0^+((\alpha^2 t) \wedge 1)/\alpha, t \in [0, \infty)\}$, где α — случайная величина, равномерно распределенная на $(0, 1)$ и не зависящая от W_0^+ , совпадают конечномерные распределения.

Доказательство. Вспомним определение броуновской экскурсии W_0^+ и броуновской извилины W^+ . Пусть W — стандартное броуновское движение и

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sup\{t: t \in [0, 1], W(t) = 0\}, & \tau_2 &= \inf\{t: t \geq 1, W(t) = 0\}, \\ \Delta_1 &= 1 - \tau_1, & \Delta_2 &= \tau_2 - \tau_1. \end{aligned}$$

Тогда по определению

$$W_0^+(t) = \frac{|W(\tau_1 + t\Delta_2)|}{\sqrt{\Delta_2}}, \quad , \quad t \in [0, 1], \quad (12)$$

$$W^+(t) = \frac{|W(\tau_1 + t\Delta_1)|}{\sqrt{\Delta_1}}, \quad t \in [0, 1]. \quad (13)$$

Доопределим $W^+(t)$ по той же формуле (13) до момента τ первого достижения нуля, а после τ знак модуля уберем. Нетрудно понять, что в силу свойства автомодельности броуновского движения мы получим то же определение $W^+(t)$ при $t > 1$, что и данное ранее (см. текст после соотношения (3)). Выразим τ через Δ_1 и Δ_2 :

$$\tau_1 + \tau\Delta_1 = \tau_2 \Rightarrow \tau = \Delta_2/\Delta_1.$$

В [9] доказано, что случайная величина $\alpha = \sqrt{\Delta_1/\Delta_2}$ имеет равномерное распределение на $(0, 1)$ и не зависит от W_0^+ . Осталось заметить, что в силу формул (12), (13)

$$\begin{aligned} W^+(t \wedge \tau) &= \frac{|W(\tau_1 + (t \wedge \tau)\Delta_1)|}{\sqrt{\Delta_1}} = \frac{|W(\tau_1 + ((t \wedge \tau)\Delta_1/\Delta_2)\Delta_2)|}{\sqrt{\Delta_2}} \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \\ &= W_0^+((t \wedge \tau)\Delta_1/\Delta_2) \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} = W_0^+((t\alpha^2) \wedge 1)/\alpha. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для простого симметричного случайного блуждания при $u \in [0, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{I}_x}{x^2} \leq u \mid \mathcal{I}_x < \mathcal{I} \right) = K \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{u} \right).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $u \in (0, \infty)$ и $x = N$ — натуральное число. Очевидно, событие $\{\mathcal{I}_N > uN^2, \mathcal{I}_N < \mathcal{I}\}$ означает, что случайное блуждание впервые достигает границы отрезка $[0, N+1]$ в точке $N+1$ и при этом время достижения границы больше uN^2 . Поэтому в силу классической формулы для вероятности разорения (см., например, [3], гл. XIV, §5)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{I}_N > uN^2, \mathcal{I}_N < \mathcal{I}) &= \sum_{m \in M} \frac{1}{N+1} \sum_{1 \leq k < (N+1)/2} \cos^{m-2} \left(\frac{\pi k}{N+1} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{N+1} \right) \sin \left(\frac{\pi Nk}{N+1} \right) \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{1 \leq k < (N+1)/2} (-1)^{k+1} \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N+1} \right) \sum_{m \in M} \cos^{m-2} \left(\frac{\pi k}{N+1} \right) \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{1 \leq k < (N+1)/2} (-1)^{k+1} \left(\cos \frac{\pi k}{N+1} \right)^{[uN^2]-1}, \end{aligned}$$

где область суммирования $M = \{m: m > uN^2, m = N = 1 \pmod{2}\}$.

При любом фиксированном $k \in \mathbf{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{\pi k}{N+1} \right) \right)^{[uN^2]-1} = e^{-\pi^2 k^2 u/2}.$$

Кроме того, поскольку $\cos(\pi k/(N+1))$ убывает по k при $k \in [1, (N+1)/2)$, при любом $l \in \mathbf{N}$ и $N > (2l-1) \vee (1/\sqrt{u})$

$$\left| \sum_{l \leq k < (N+1)/2} (-1)^{k+1} \left(\cos \frac{\pi k}{N+1} \right)^{[uN^2]-1} \right| \leq \left(\cos \frac{\pi l}{N+1} \right)^{[uN^2]-1}.$$

Отсюда следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_N > uN^2, \mathcal{T}_N < \mathcal{T}) \sim \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-\pi^2 k^2 u/2}. \quad (14)$$

Известно [3, гл. XIV, §2], что для простого симметричного случайного блуждания

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_N < \mathcal{T}) = \frac{1}{2(N+1)}. \quad (15)$$

Из соотношений (14), (15) следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{T}_N > uN^2 \mid \mathcal{T}_N < \mathcal{T}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-\pi^2 k^2 u/2} = 1 - K(\pi\sqrt{u}/2).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть $x \in (0, \infty)$, $u \in [0, \infty)$. Вспоминая определение остановленного случайного блуждания $\{\tilde{S}_n\}$, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sigma^2 \mathcal{T}_x}{x^2} \leq u, \mathcal{T}_x < \mathcal{T}\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2}x^2} \tilde{S}_k > x\right). \quad (16)$$

Для произвольного $\varepsilon \in (0, \infty)$ запишем представление

$$\mathbf{P}\left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2}x^2} \tilde{S}_k > x\right) = P_1(x, \varepsilon) + P_2(x, \varepsilon), \quad (17)$$

где

$$P_1(x, \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2}x^2} \tilde{S}_k, \mathcal{T} > \varepsilon x^2\right), \quad P_2(x, \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2}x^2} \tilde{S}_k, \mathcal{T} \leq \varepsilon x^2\right).$$

Полагая $n = \varepsilon x^2$, находим, что

$$P_1(x, \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2}\varepsilon^{-1}n} \tilde{S}_k > \sqrt{n/\varepsilon} \mid \mathcal{T} > n\right) \mathbf{P}(\mathcal{T} > n).$$

Используя соотношение (4) и теорему 6, получаем, что при $x \rightarrow \infty$

$$P_1(x, \varepsilon) \sim \frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon}x} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u\sigma^{-2}\varepsilon^{-1}]} W^+(t \wedge \tau) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Но в силу леммы 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u\sigma^{-2}\varepsilon^{-1}]} W^+(t \wedge \tau) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}} \right) &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u\sigma^{-2}\varepsilon^{-1}]} \frac{W_0^+((\alpha^2 t) \wedge 1)}{\alpha} > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}} \right) \quad (18) \\ &= \int_0^1 \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u\sigma^{-2}\varepsilon^{-1}]} W_0^+((z^2 t) \wedge 1) > \frac{z}{\sigma\sqrt{\varepsilon}} \right) dz \\ &= \sigma\sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/(\sigma\sqrt{\varepsilon})} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, uy^2]} W_0^+(t \wedge 1) > y \right) dy. \end{aligned}$$

Итак,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} xP_1(x, \varepsilon) = c_1\sigma \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, uy^2]} W_0^+(t \wedge 1) > y \right) dy. \quad (19)$$

Данный интеграл конечен, поскольку он не превосходит

$$\int_0^\infty \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t) > y \right) dy = \mathbf{M} \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t) = \sqrt{\pi/2} \quad (20)$$

(последнее соотношение установлено в [10]). Далее,

$$P_2(x, \varepsilon) \leq \mathbf{P} \left(\sup_{k \leq \mathcal{T}} S_k > x, \mathcal{T} \leq \varepsilon x^2 \right),$$

а в работе [8] (см. [8], соотношение (12)) показано, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x \mathbf{P} \left(\sup_{k \leq \mathcal{T}} S_k > x, \mathcal{T} \leq \varepsilon x^2 \right) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} xP_2(x, \varepsilon) = 0. \quad (21)$$

Из соотношений (17), (19), (21) следует, что при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2}x^2} \tilde{S}_k > x \right) \sim \frac{c_1\sigma}{x} \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, uy^2]} W_0^+(t \wedge 1) > y \right) dy. \quad (22)$$

Из соотношений (10), (16), (22) получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 \mathcal{T}_x}{x^2} \leq u \mid \mathcal{T}_x < \mathcal{T} \right) = \frac{c_1\sigma}{c_3} \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, uy^2]} W_0^+(t \wedge 1) > y \right) dy.$$

Поскольку ввиду (5) и (11)

$$\frac{c_1\sigma}{c_3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

доказанный результат можно переписать в виде

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 \mathcal{I}_x}{x^2} \leq u \mid \mathcal{I}_x < \mathcal{I} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, uy^2]} W_0^+(t \wedge 1) > y \right) dy. \quad (23)$$

Выражение справа как функция от u является собственной функцией распределения, так как его предел при $u \rightarrow \infty$ равен (см. (20))

$$\sqrt{2/\pi} \mathbf{M} \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t) = 1.$$

Сравнивая для простого симметричного случайного блуждания соотношение (23) и лемму 2, получаем, что при всех $u \in [0, \infty)$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, uy^2]} W_0^+(t \wedge 1) > y \right) dy = K \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{u} \right). \quad (24)$$

Теорема 7 доказана.

4. Перейдем к доказательству теорем 1–3.

Доказательство теоремы 1. Установим эквивалентное утверждение: при любом фиксированном $u \in [0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T_x}{\ln^2(x+1)} \leq u \mid T_x < \infty \right) = K \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{u} \right). \quad (25)$$

Очевидно, при $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T_x}{\ln^2(x+1)} \leq u, T_x < \infty \right) &= \mathbf{P} \left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2} \ln^2(x+1)} \xi_k > x \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2} \ln^2(x+1)} \ln(\xi_k + 1) > \ln(x+1) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Найдем асимптотику при $x \rightarrow \infty$

$$P(x) = \mathbf{P} \left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2} x^2} \ln(\xi_k + 1) > x \right).$$

При всех $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$P(x) = \tilde{P}_1(x, \varepsilon) + \tilde{P}_2(x, \varepsilon), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(x, \varepsilon) &= \mathbf{P} \left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2} x^2} \ln(\xi_k + 1) > x, T > \varepsilon x^2 \right), \\ \tilde{P}_2(x, \varepsilon) &= \mathbf{P} \left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2} x^2} \ln(\xi_k + 1) > x, T \leq \varepsilon x^2 \right). \end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon x^2 = n$, получаем, что

$$\tilde{P}_1(x, \varepsilon) = \mathbf{P} \left(\sup_{k \leq u\sigma^{-2}\varepsilon^{-1}n} \ln(\xi_k + 1) > \sqrt{n/\varepsilon} \mid T > n \right) \mathbf{P}(T > n). \quad (28)$$

В [11] показано, что в условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}}, \quad (29)$$

где c_2 — положительная постоянная, причем в [1] (см. [1], соотношение (39)) установлено, что

$$c_0 = c_2 \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (30)$$

где c_0 — постоянная из (1). Применяя к (28) соотношения (2) и (29), получаем, что при $x \rightarrow \infty$

$$\tilde{P}_1(x, \varepsilon) \sim \frac{c_2}{\sqrt{\varepsilon}x} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u\sigma^{-2}\varepsilon^{-1}]} W^+(t \wedge \tau) > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}} \right).$$

Учитывая теперь соотношение (18), находим, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} x \tilde{P}_1(x, \varepsilon) = c_2 \sigma \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, uy^2]} W_0^+(t \wedge 1) > y \right) dy,$$

откуда в силу (24) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} x \tilde{P}_1(x, \varepsilon) = c_2 \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} K \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{u} \right). \quad (31)$$

В [1] (см. [1], соотношения (35), (40), (41)) показано, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{k \in \mathbf{N}} \ln(\xi_k + 1) > x, T \leq \varepsilon x^2 \right) = 0, \quad (32)$$

следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x \tilde{P}_2(x, \varepsilon) = 0. \quad (33)$$

Из соотношений (27), (31), (33) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x P(x) = c_2 \sigma \sqrt{\pi/2} K(\pi\sqrt{u}/2). \quad (34)$$

Поэтому ввиду соотношения (26) при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T_x}{\ln^2(x+1)} \leq u, T_x < \infty \right) \sim \frac{c_2 \sigma}{\ln(x+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} K \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{u} \right).$$

Применяя теперь соотношения (1) и (30), получаем (25). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $x \in (1, \infty)$, $u \in [0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_x \leq uT, T_x < \infty) &= \mathbf{P}(T_x \leq uT) = \mathbf{P}\left(\sup_{k \leq uT} \xi_k > x\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \xi_{[tT]} > x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) > \ln(x + 1)\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Найдем асимптотику при $x \rightarrow \infty$ вероятности

$$\tilde{P}(x) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) > x\right).$$

Для произвольного $\varepsilon \in (0, \infty)$ запишем представление

$$\tilde{P}(x) = Q_1(x, \varepsilon) + Q_2(x, \varepsilon), \quad (36)$$

где

$$Q_1(x, \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \xi_{[tT]} > x, T > \varepsilon x^2\right), \quad Q_2(x, \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \xi_{[tT]} > x, T \leq \varepsilon x^2\right).$$

Полагая $\varepsilon x^2 = n$, получаем, что

$$Q_1(x, \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \xi_{[tT]} > \sqrt{n/\varepsilon} \mid T > n\right) \mathbf{P}(T > n).$$

Отсюда в силу соотношений (3) и (29) следует, что при $x \rightarrow \infty$

$$Q_1(x, \varepsilon) \sim \frac{c_2}{\sqrt{\varepsilon}x} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t)/\alpha > 1/(\sigma\sqrt{\varepsilon})\right).$$

Но

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t)/\alpha > \frac{1}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right) &= \int_0^1 \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t) > \frac{z}{\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right) dz \\ &= \sigma\sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/(\sigma\sqrt{\varepsilon})} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t) > y\right) dy. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} xQ_1(x, \varepsilon) = c_2\sigma \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t) > y\right) dy = c_2\sigma \mathbf{M} \sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t).$$

В [8] (см. лемму 2 в [8]) установлено, что при $u \in [0, 1)$

$$\mathbf{M} \sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{u}{1-u}}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} x Q_1(x, \varepsilon) = c_2 \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{u}{1-u}} \right). \quad (37)$$

Ввиду соотношения (32)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x Q_2(x, \varepsilon) = 0. \quad (38)$$

Из соотношений (36)–(38) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tilde{P}(x) = c_2 \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{u}{1-u}} \right). \quad (39)$$

Из соотношений (35), (39) получаем, что при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T_x \leq uT, T_x < \infty) \sim \frac{c_2 \sigma}{\ln x} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{u}{1-u}} \right),$$

откуда в силу (1) и (30) следует утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Установим эквивалентное утверждение: при любом фиксированном $u \in (0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2(x+1)} \leq u \mid T_x < \infty \right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi u}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{k^2}{u} \right). \quad (40)$$

Очевидно, при $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2(x+1)} > u, T_x < \infty \right) &= \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2(x+1)} > u, \sup_{k \in \mathbf{N}} \xi_k > x \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2(x+1)} > u, \sup_{t \in [0,1]} \xi_{[tT]} > x \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2(x+1)} > u, \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) > \ln(x+1) \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Найдем асимптотику при $x \rightarrow \infty$ вероятности

$$Q(x) = \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2x^2} > u, \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) > x \right).$$

Полагая $2\sigma^{-2}x^2u = n$, получаем, что

$$Q(x) = \mathbf{P} \left(T > n, \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{[tT]} + 1) > \frac{\sigma \sqrt{n}}{\sqrt{2u}} \right).$$

Откуда в силу соотношений (3) и (29) при $x \rightarrow \infty$

$$Q(x) \sim \frac{c_2 \sigma}{\sqrt{2ux}} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t)/\alpha > \frac{1}{\sqrt{2u}} \right).$$

Следовательно, ввиду (41) при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2(x+1)} > u, T_x < \infty \right) \sim \frac{c_2 \sigma}{\sqrt{2u} \ln x} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t)/\alpha > \frac{1}{\sqrt{2u}} \right).$$

Применяя теперь соотношения (1) и (30), находим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2(x+1)} > u \mid T_x < \infty \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t)/\alpha > \frac{1}{\sqrt{2u}} \right). \quad (42)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t)/\alpha > \frac{1}{\sqrt{2u}} \right) &= \int_0^1 \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > \frac{z}{\sqrt{2u}} \right) dz \\ &= \sqrt{2u} \int_0^{1/\sqrt{2u}} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > y \right) dy, \end{aligned}$$

соотношение (42) можно переписать в виде

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sigma^2 T}{2 \ln^2(x+1)} \leq u \mid T_x < \infty \right) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{2u}} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > y \right) dy, \quad (43)$$

причем справа стоит собственная функция распределения (см. (20)). Функция распределения

$$F(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi u}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{k^2}{u} \right)$$

упоминается в [7]. Покажем, что правая часть (43) совпадает с $F(x)$. Для этого достаточно показать, что совпадают производные этих функций. В предложении 3.1 в [10] установлено, что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) \leq y \right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k^2 y^2} (1 - 4k^2 y^2),$$

поэтому производная правой части (43) равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} u^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2/u} (1 - 2k^2/u).$$

Очевидно, такой же вид имеет $F'(u)$. Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Афанасьев В.И., О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1999) **11**, №2, 86–102.
2. Durrett R.T., Iglehart D.L., Miller D.R., Weak convergence to brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №1, 117–129.
3. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т.1, Мир, Москва, 1984.
4. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т.2, Мир, Москва, 1984.
5. Hooghiemstra G., Conditioned limit theorems for waiting-time processes of the $M/G/1$ queue. *J. Appl. Probab.* (1983) **20**, №3, 675–688.
6. Shimura M., A class of conditional limit theorems related to ruin problem. *Ann. Probab.* (1983) **11**, №1, 40–45.
7. Doney R.A., A note on conditioned random walk. *J. Appl. Probab.* (1983) **20**, №2, 409–412.
8. Афанасьев В.И., О функционалах от случайного блуждания до момента первого достижения отрицательной полуоси. *Теория вероятностей и ее применения* (1986) **31**, №4, 773–777.
9. Durrett R.T., Iglehart D.L., Functionals of brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №1, 130–135.
10. Chung K.L., Excursions in Brownian motion. *Ark. Mat.* (1976) **14**, №1, 155–177.
11. Козлов М.В., Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813–825.

Статья поступила 03.07.1998.