Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Алексейчук, Условия однозначности проблемы моментов в классе q -распределений, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 48–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:04:32

УДК 519.21

Условия однозначности проблемы моментов в классе q -распределений

© 1999 г. А. Н. Алексейчук

Пусть K_q — класс распределений вероятностей, сосредоточенных на множестве степеней числа $q > 1$ с неотрицательными целыми показателями (q -распределений), $\mathbf{P} = \{p_k = P(q^k), k = 0, 1, \dots\}$ — распределение вероятностей из класса K_q , обладающее моментами любого порядка. Показано, что для того, чтобы распределение $\mathbf{P}$ однозначно определялось в классе K_q последовательностью своих моментов при условии, что $p_k > 0, k = 0, 1, \dots$, необходимо, а при условии

$$\sup_{k \rightarrow \infty} \lim (p_k q^{\binom{k}{2}})^{1/k} < \infty$$

достаточно, чтобы имели место соотношения

$$\inf_{k \rightarrow \infty} \lim p_{2k} q^{\binom{2k}{2}} = \inf_{k \rightarrow \infty} \lim p_{2k+1} q^{\binom{2k+1}{2}} = 0.$$

Полученные результаты применяются при исследовании предельного распределения числа решений системы случайных линейных однородных уравнений с равновероятной матрицей коэффициентов над конечным локальным кольцом главных идеалов.

1. Основные результаты

Пусть $\mathbf{P}$ — распределение вероятностей, принадлежащее классу K_q распределений, сосредоточенных на множестве $\{q^k, k = 0, 1, \dots\}, q > 1$. Пусть

$$p_k = \mathbf{P}\{q^k\}, \quad Q_k = \sum_{t=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} t \\ k \end{matrix} \right]_q p_t, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где

$$\left[\begin{matrix} t \\ k \end{matrix} \right]_q = \frac{(q^{-1})_t}{(q^{-1})_k (q^{-1})_{t-k}}, \quad (q^{-1})_t = \prod_{i=1}^t (1 - q^{-i}), \quad t \in \mathbf{N}_0, \quad k = 0, 1, \dots, t$$

(при $t = 0$ полагаем $(q^{-1})_t = 1$).

В [1] установлены соотношения

$$\begin{aligned} Q_k &= \prod_{j=0}^{k-1} (q^k - q^j)^{-1} \sum_{l=0}^k (-1)^l q^{\binom{l}{2}} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}_q m_{k-l}, \\ m_k &= \sum_{l=0}^k \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}_q Q_l \prod_{j=0}^{l-1} (q^l - q^j), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

между числами Q_k и начальными моментами

$$m_k = \sum_{t=0}^{\infty} p_t q^{tk}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

распределения вероятностей $\mathbf{P}$ и показано, что $\mathbf{P}$ однозначно определяется в классе K_q последовательностью своих моментов, если ряд

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k q^{\binom{k}{2}} z^k \quad (2)$$

сходится в точке $z = 1$.

В настоящей работе получены достаточные и близкие к ним необходимые условия однозначности проблемы моментов в классе K_q в предположении, что ряд $Q(z)$ имеет ненулевой радиус сходимости.

Обозначим θ наименьшее неотрицательное целое число, для которого ряд (2) сходится в точке $z = q^{-\theta}$. Описание распределений $\{\pi_k, k = 0, 1, \dots\} \in K_q$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{t=k}^{\infty} \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix}_q \pi_t = Q_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

т. е., в силу (1), имеющих те же начальные моменты, что и распределение $\mathbf{P}$, содержит следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\{\pi_k, k = 0, 1, \dots\}$ – распределение вероятностей из класса K_q , удовлетворяющее условию (3). Тогда для любого $t = \theta, \theta + 1, \dots$ имеет место равенство

$$\pi_t = \sum_{l=0}^{\theta-1} \pi_l \sum_{k=l}^{\theta-1} \frac{q^{-\binom{t-k}{2}} (-1)^{t-k}}{(q^{-1})_{t-k} (q^{-1})_{k-l}} + \sum_{k=0}^{t-\theta} \frac{Q(-q^{-(t-k)}) q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k (q^{-1})_{t-k}}. \quad (4)$$

В частности, вектор

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{\theta-1}) \quad (5)$$

является неотрицательным решением системы линейных неравенств

$$\sum_{l=0}^{\theta-1} x_l \sum_{k=l}^{\theta-1} \frac{q^{-\binom{t-k}{2}} (-1)^{t-k}}{(q^{-1})_{t-k} (q^{-1})_{k-l}} + \sum_{k=0}^{t-\theta} \frac{Q(-q^{-(t-k)}) q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k (q^{-1})_{t-k}} \geq 0, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (6)$$

Обратно, для любого неотрицательного решения (5) системы неравенств (6) последовательность $\{\pi_t, t = 0, 1, \dots\}$, определяемая с помощью соотношения (4), является распределением вероятностей, удовлетворяющим условию (3).

Следствие 1. В условиях теоремы 1 распределение вероятностей $\mathbf{P}$ однозначно определяется своими моментами в классе K_q в том и только том случае, когда система неравенств (6) имеет единственное неотрицательное решение.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия однозначности проблемы моментов в классе K_q в терминах вероятностей p_k , $k = 0, 1, \dots$

Теорема 2. При выполнении соотношений

$$\sup_{k \rightarrow \infty} \lim (p_k q^{\binom{k}{2}})^{1/2} < \infty, \quad (7)$$

$$\inf_{k \rightarrow \infty} \lim p_{2k} q^{\binom{2k}{2}} = \inf_{k \rightarrow \infty} \lim p_{2k+1} q^{\binom{2k+1}{2}} = 0 \quad (8)$$

распределение $\mathbf{P}$ определяется последовательностью своих моментов в классе K_q однозначно.

В п. 2 показано, что (7) равносильно существованию ненулевого радиуса сходимости ряда (2).

Отметим, что при выполнении условия

$$p_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

соотношения (8) необходимо имеют место, если моменты m_k , $k = 0, 1, \dots$, однозначно определяют распределение вероятностей $\mathbf{P}$.

Действительно, предположим, что, например,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{2k} q^{\binom{2k}{2}} > 0.$$

Тогда в силу (9) существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$p_{2k} q^{\binom{2k}{2}} (q^{-1})_{2k} > \varepsilon$$

для всех $k = 0, 1, \dots$. Используя тождество [2, стр. 32]

$$\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \frac{q^{-\binom{t}{2}}}{(q^{-1})_t} = \prod_{t=0}^{\infty} (1 - q^{-t}) = 0,$$

находим, что

$$\sum_{t=k}^{\infty} \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix}_q \left(p_t - \varepsilon \frac{(-1)^t q^{-\binom{t}{2}}}{(q^{-1})_t} \right) = \sum_{t=k}^{\infty} \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix}_q p_t, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда в силу (1) следует, что распределения вероятностей $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$ и $\left\{ p_k - \varepsilon \frac{(-1)^k q^{-\binom{k}{2}}}{(q^{-1})_k}, k = 0, 1, \dots \right\}$ обладают одинаковыми начальными моментами.

Несколько более слабое достаточное условие

$$p_k q^{\binom{k}{2}} \geq \varepsilon > 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

неоднозначности проблемы моментов в классе K_q получено И.Н. Коваленко (не опубликовано).

В качестве приложения результатов сформулированных выше теорем рассмотрим предельное распределение числа решений системы случайных линейных однородных уравнений

$$Ax = 0 \quad (10)$$

над конечным локальным кольцом главных идеалов R , где A — равновероятная матрица размера $(n + s) \times n$ над R , s — фиксированное целое число.

Пусть $|R| = q^N$, $R/J(R) = \text{GF}(q)$, где $J(R)$ — радикал [3, стр. 94] кольца R . Обозначим $\nu_{n,s}^{(N)}$ — число решений системы линейных уравнений (10). Тогда [4]

$$\begin{aligned} \rho_s^{(N)}(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\nu_{n,s}^{(N)} = q^k) = (q^{-1})_\infty \sum_{r=s_0}^k q^{-r(sN+k)} \\ &\times \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_N) \in B_{r,s,k}} \frac{q^{\sum_{1 \leq j < i \leq N} (i-j)\beta_i\beta_j}}{(q^{-1})_{\beta_1} \dots (q^{-1})_{\beta_N} (q^{-1})_{\beta_{N-s}}}, \quad k = s_0N, s_0N + 1, \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$(q^{-1})_\infty = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{-i}), \quad s_0 = \max\{-s, 0\},$$

и

$$B_{r,s,k} = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbf{Z}^N \mid \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, N, \beta_N \geq s, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \beta_i = r + s, \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i(N-i) = Nr - k \right\}.$$

В [5, стр. 167] показано, что распределение вероятностей

$$\{\rho_s^{(N)}(k + s_0N), k = 0, 1, \dots\} \quad (12)$$

обладает моментами любого порядка.

Теорема 3. *Распределение вероятностей (12) однозначно определяется последовательностью своих моментов в классе K_q тогда и только тогда, когда $N \leq 2$.*

Доказательство. Случай $N = 1$ рассмотрен в [1]. При $N = 2$, $k = s_0N, s_0N + 1, \dots$ на основании (11)

$$\begin{aligned} \rho_s^{(2)}(k) &= (q^{-1})_\infty \sum_{r=\lceil k/2 \rceil}^{\min\{k, k+s\}} q^{-r(2s+k)} \frac{q^{(2r-k)(s+k-r)}}{(q^{-1})_{2r-k} (q^{-1})_{s+k-r} (q^{-1})_{k-r}} \\ &< \frac{q^{-ks-k^2}}{(q^{-1})_\infty^2} \sum_{r=0}^k q^{2r(k-r)} \leq \frac{q^{-ks-k^2}}{(q^{-1})_\infty^2} q^{-k/2} (k+1). \end{aligned}$$

Следовательно, при $k = 0, 1, \dots$

$$\rho_s^{(2)}(k + 2s_0) q^{\binom{k}{2}} < \frac{k + 2s_0 + 1}{(q^{-1})_\infty^2} q^{-2s_0(s+s_0)} q^{-k/2 - k(s+2s_0)},$$

где правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, в силу теоремы 2 распределение вероятностей (12) определяется своими моментами в классе K_q однозначно.

При $N \geq 3$, $k = s_0N, s_0N+1, \dots$, оценим сумму (11) слагаемым, соответствующим значению $r = [k/N]$. В результате получим неравенства

$$\rho_s^{(N)}(k) > (q^{-1})^\infty q^{-[k/N](sN+k)} > 0,$$

из которых следует, что $\rho_s^{(N)}(k + s_0N)q^{\binom{k}{2}} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, соотношения (8) не выполняются, и, следовательно, при $N \geq 3$ распределение вероятностей (12) не определяется однозначно последовательностью своих моментов.

2. Доказательство теорем 1 и 2

Установим ряд вспомогательных утверждений.

Предположим, что ряд (2) сходится в круге $|z| < R$, где $R > 0$.

Лемма 1. Для того чтобы последовательность $\{\pi_k, k = 0, 1, \dots\}$ неотрицательных чисел удовлетворяла условию (3), необходимо и достаточно, чтобы для всех $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$, имело место равенство

$$Q(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \pi_t \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i z). \quad (13)$$

Доказательство. Докажем необходимость. Поскольку при $|z| < R$ ряд (2) сходится абсолютно, в силу (3) при $|z| < R$ абсолютно сходится двойной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} t \\ k \end{matrix} \right]_q q^{\binom{k}{2}} z^k \pi_t.$$

Переставляя члены этого ряда и используя тождество [2, стр. 50]

$$\sum_{k=0}^t \left[\begin{matrix} t \\ k \end{matrix} \right]_q q^{\binom{k}{2}} z^k = \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i z), \quad (14)$$

получаем, что

$$Q(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \pi_t \left(\sum_{k=0}^t \left[\begin{matrix} t \\ k \end{matrix} \right]_q q^{\binom{k}{2}} z^k \right) = \sum_{t=0}^{\infty} \pi_t \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i z). \quad (15)$$

Докажем достаточность. В силу (13), (14) двойной ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^t \pi_t \left[\begin{matrix} t \\ k \end{matrix} \right]_q q^{\binom{k}{2}} z^k$$

сходится абсолютно при $|z| < R$. Следовательно,

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{t=k}^{\infty} \pi_t \left[\begin{matrix} t \\ k \end{matrix} \right]_q \right) q^{\binom{k}{2}} z^k, \quad |z| < R,$$

откуда вытекает (3).

Лемма 2. Если ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} a_t \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i z), \quad a_t \in \mathbb{C}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

абсолютно сходится в точке $x > 0$, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно в любом замкнутом круге $|z| \leq r$, где $r < x$. В частности, сумма данного ряда является аналитической в круге $|z| < x$ функцией.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из соотношений

$$|a_t| x^t q^{\binom{t}{2}} < |a_t| x^t q^{\binom{t}{2}} \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^{-i} x^{-1}) = |a_t| \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i x) < |a_t| x^t q^{\binom{t}{2}} \prod_{i=0}^{\infty} (1 + q^{-i} x^{-1}),$$

$$\left| a_t \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i z) \right| \leq |a_t| \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i r),$$

справедливых при $|z| \leq r$, $t = 0, 1, \dots$.

Следствие 2. Ряды (2) и $\sum_{k=0}^{\infty} p_k q^{\binom{k}{2}} z^k$ имеют одинаковые радиусы сходимости.

Следующее утверждение является частным случаем следствия 3.38 из [6].

Лемма 3. Пусть $\{a_t, t = 0, 1, \dots\}$ и $\{b_t, t = 0, 1, \dots\}$ — числовые последовательности. Тогда, если для любого $t = 0, 1, \dots$ выполняется соотношение

$$a_t = \sum_{k=0}^t \frac{b_k}{(q^{-1})_{t-k}},$$

то

$$b_t = \sum_{k=0}^t \frac{a_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k}$$

для всех $t = 0, 1, \dots$. Верно и обратное.

Доказательство теоремы 1. Пусть распределение вероятностей $\{\pi_k, k = 0, 1, \dots\}$ удовлетворяет условию (3). В силу леммы 1 при $|z| < q^{-\theta}$ имеет место (13). Полагая (13) $z = -q^{-t}$, $t = \theta, \theta + 1, \dots$, получим равенства

$$Q(-q^{-t}) = \sum_{k=0}^t \pi_k \frac{(q^{-1})_t}{(q^{-1})_{t-k}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (16)$$

Положим

$$b_t = \sum_{k=0}^t \frac{\pi_k}{(q^{-1})_{t-k}}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (17)$$

В силу (16) справедливо равенство

$$b_t = \frac{Q(-q^{-t})}{(q^{-1})_t}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (18)$$

Применяя к последовательностям $\{\pi_t, t = 0, 1, \dots\}, \{b_t, t = 0, 1, \dots\}$ лемму 3, получим, что

$$\pi_t = \sum_{k=0}^t \frac{b_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

в частности,

$$\pi_t = \sum_{k=0}^{\theta} \frac{b_k q^{-\binom{t-k}{2}} (-1)^{t-k}}{(q^{-1})_{t-k}} + \sum_{k=0}^{t-\theta} \frac{b_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (20)$$

Подставляя в (20) вместо $b_k, k = 0, 1, \dots, \theta - 1$, и $b_{t-k}, k = 0, 1, \dots, t - \theta$, выражения (17) и (18) соответственно, получим (4). Непосредственно из (4) следует, что вектор (5) является решением системы неравенств (6).

Предположим теперь, что вектор $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{\theta-1})$ есть неотрицательное решение системы неравенств (6). Тогда все члены последовательности $\{\pi_t, t = 0, 1, \dots\}$, определяемой с помощью соотношения (4), суть неотрицательные числа. Пусть

$$b_t = \sum_{k=0}^t \frac{\pi_k}{(q^{-1})_{t-k}}, \quad a_t = \sum_{k=0}^t \frac{p_k}{(q^{-1})_{t-k}}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Тогда (4) может быть записано в виде

$$\pi_t = \sum_{k=t-\theta+1}^t \frac{b_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k} + \sum_{k=0}^{t-\theta} \frac{Q(-q^{-(t-k)}) q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k (q^{-1})_{t-k}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (22)$$

Из определения чисел $Q_k, k = 0, 1, \dots$, по доказанному вытекает справедливость равенств

$$p_t = \sum_{k=t-\theta+1}^t \frac{a_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k} + \sum_{k=0}^{t-\theta} \frac{Q(-q^{-(t-k)}) q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k (q^{-1})_{t-k}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (23)$$

Далее, в силу (21) и леммы 3 имеют место равенства

$$\pi_t = \sum_{k=0}^t \frac{b_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

$$p_t = \sum_{k=0}^t \frac{a_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (25)$$

Из (22)–(25) следует, что для всех $t = \theta, \theta + 1, \dots$ имеет место соотношение

$$\sum_{k=0}^{t-\theta} \frac{a_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k} = \sum_{k=0}^{t-\theta} \frac{b_{t-k} q^{-\binom{k}{2}} (-1)^k}{(q^{-1})_k}. \quad (26)$$

Последовательно подставляя в (26) $t = \theta, \theta + 1, \dots$, получим, что

$$a_t = b_t, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (27)$$

По доказанному имеет место равенство (16) с заменой π_k на p_k , т.е. выполняется соотношение

$$a_t = \frac{Q(-q^{-t})}{(q^{-1})_t}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (28)$$

В силу (21), (27), (28), имеют место равенства

$$Q(-q^{-t}) = b_t(q^{-1})_t = \sum_{k=0}^t \frac{\pi_k(q^{-1})_t}{(q^{-1})_{t-k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 + q^i(-q^{-t})), \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (29)$$

Покажем, что функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 + q^i z)$$

является аналитической в круге $|z| < q^{-\theta}$. Тогда в силу (29) аналитические функции $f(z)$ и $Q(z)$, $|z| < q^{-\theta}$, совпадают на множестве $\{-q^{-t}, t = \theta + 1, \theta + 2, \dots\}$, имеющем предельную точку 0, и, следовательно, справедливо равенство (13), из которого в силу леммы 1 вытекает, что последовательность $\{\pi_k, k = 0, 1, \dots\}$ удовлетворяет (3).

На основании леммы 2 достаточно показать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 + q^i x)$ сходится в каждой точке x , $0 < x < q^{-\theta}$.

В силу (22), (23) имеет место равенство

$$\pi_t = p_t + \sum_{k=0}^{\theta-1} \frac{(b_k - a_k)q^{-(\frac{t-k}{2})}(-1)^k}{(q^{-1})_{t-k}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots$$

В соответствии с леммой 1 ряд $\sum_{t=0}^{\infty} p_t \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i x)$ сходится в круге $|x| < q^{-\theta}$, поэтому достаточно показать, что для любого $k = 0, 1, \dots, \theta - 1$ ряд $\sum_{t=\theta}^{\infty} \frac{q^{-(\frac{t-k}{2})}}{(q^{-1})_{t-k}} \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i x)$ сходится при $0 < x < q^{-\theta}$. При $x > 0$ оценим сумму указанного ряда следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{t=\theta}^{\infty} \frac{q^{-(\frac{t-k}{2})}}{(q^{-1})_{t-k}} \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i x) &\leq \sum_{t=k}^{\infty} \frac{q^{-(\frac{t-k}{2})}}{(q^{-1})_{t-k}} \prod_{i=0}^{t-1} (1 + q^i x) \\ &< \prod_{i=0}^{\infty} (1 + q^{-i} x^{-1}) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^{-(\frac{t}{2})} x^{t+k} q^{(\frac{t+k}{2})}}{(q^{-1})_t} \\ &= \prod_{i=0}^{\infty} (1 + q^{-i} x^{-1}) q^{(\frac{k}{2})} x^k \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^k x)^t}{(q^{-1})_t}. \end{aligned}$$

Поскольку при $k = 0, 1, \dots, \theta - 1$, $0 < x < q^{-\theta}$, справедливо неравенство $|q^k x| < 1$, рассматриваемый ряд сходится в точке x , что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Пусть имеют место (7), (8) и распределение вероятностей $\{\pi_k, k = 0, 1, \dots\}$ удовлетворяет (3). По теореме 1 имеют место равенства

$$\pi_t = p_t + \sum_{l=0}^{\theta-1} (\pi_l - p_l) \sum_{k=l}^{\theta-1} \frac{q^{-(\frac{t-k}{2})}(-1)^{t-k}}{(q^{-1})_{t-k}(q^{-1})_{k-l}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (30)$$

Положим $\varepsilon_l = p_l - \pi_l$, $l = 0, 1, \dots, \theta - 1$, и покажем, что $\varepsilon_l = 0$ для всех $l = 0, 1, \dots, \theta - 1$.

Поскольку $\pi_t \geq 0$, $t \in \mathbf{N}_0$, в силу (30) справедливо неравенство

$$p_t q^{\binom{t}{2}} \geq (-1)^t \sum_{l=0}^{\theta-1} \varepsilon_l \sum_{k=l}^{\theta-1} \frac{q^{-\binom{k+1}{2}} (-1)^k q^{tk}}{(q^{-1})_{t-k} (q^{-1})_{k-l}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (31)$$

Из (31) получаем, что

$$p_t q^{\binom{t}{2} - (\theta-1)t} \geq (-1)^t \sum_{l=0}^{\theta-1} \varepsilon_l \sum_{k=l}^{\theta-1} \frac{q^{-\binom{k+1}{2}} (-1)^k q^{-(\theta-1-k)t}}{(q^{-1})_{t-k} (q^{-1})_{k-l}} \quad (32)$$

для всех $t = \theta, \theta + 1, \dots$

Переходя в (32) к нижнему пределу при $2t \rightarrow \infty$, $2t + 1 \rightarrow \infty$, в силу (8) получаем соотношение

$$0 = \sum_{l=0}^{\theta-1} \varepsilon_l \frac{q^{-\binom{\theta}{2}} (-1)^{\theta-1}}{(q^{-1})_{\infty} (q^{-1})_{\theta-1-l}}, \quad (33)$$

то есть

$$\sum_{l=0}^{\theta-1} \frac{\varepsilon_l}{(q^{-1})_{\theta-1-l}} = 0. \quad (34)$$

В силу (33) имеет место равенство

$$\sum_{l=0}^{\theta-1} \varepsilon_l \sum_{k=l}^{\theta-1} \frac{q^{-\binom{k+1}{2}} (-1)^k q^{-(\theta-1-k)t}}{(q^{-1})_{t-k} (q^{-1})_{k-l}} = \sum_{l=0}^{\theta-2} \varepsilon_l \sum_{k=l}^{\theta-2} \frac{q^{-\binom{k+1}{2}} (-1)^k q^{-(\theta-1-k)t}}{(q^{-1})_{t-k} (q^{-1})_{k-l}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots,$$

из которого с учетом (32) получаем неравенства

$$p_t q^{\binom{t}{2} - (\theta-2)t} \geq (-1)^t \sum_{l=0}^{\theta-2} \varepsilon_l \sum_{k=l}^{\theta-2} \frac{q^{-\binom{k+1}{2}} (-1)^k q^{-(\theta-2-k)t}}{(q^{-1})_{t-k} (q^{-1})_{k-l}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots \quad (35)$$

На основании (35) и (8) с помощью предельного перехода при $2t, 2t + 1 \rightarrow \infty$ получим соотношения

$$\sum_{l=0}^{\theta-2} \frac{\varepsilon_l}{(q^{-1})_{\theta-2-l}} = 0,$$

$$p_t q^{\binom{t}{2} - (\theta-3)t} \geq (-1)^t \sum_{l=0}^{\theta-3} \varepsilon_l \sum_{k=l}^{\theta-3} \frac{q^{-\binom{k+1}{2}} (-1)^k q^{-(\theta-3-k)t}}{(q^{-1})_{t-k} (q^{-1})_{k-l}}, \quad t = \theta, \theta + 1, \dots$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим в итоге систему равенств

$$\sum_{l=0}^{\theta-j} \frac{\varepsilon_l}{(q^{-1})_{\theta-j-l}} = 0, \quad j = 1, \dots, \theta,$$

из которой непосредственно следует, что $\varepsilon_l = 0$ для всех $l = 0, 1, \dots, \theta - 1$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Алексейчук А.Н., Об однозначности проблемы моментов в классе q -распределений. *Дискретная математика* (1998) **10**, №1, 95–110.
2. Эндрюс Г., *Теория разбиений*. Наука, Москва, 1982.
3. Ламбек И., *Кольца и модули*. Мир, Москва, 1971.
4. Алексейчук А.Н., Предельные распределения длины и ранга модуля, порожденного столбцами случайной равновероятной матрицы над конечным цепным кольцом. *Кибернетика и системный анализ* (1998) **5**, 112–118.
5. Коваленко И.Н., Левитская А.А., Савчук М.Н., *Избранные задачи вероятностной комбинаторики*. Наукова думка, Киев, 1986.
6. Айгнер М., *Комбинаторная теория*. Мир, Москва, 1982.

Статья поступила 22.12.1998.