Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Е. Ефимов, Оценка экспонента некоторых множеств неотрицательных матриц, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 79–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm394>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:50:33

УДК 519.12

Оценка экспонента некоторых множеств неотрицательных матриц

© 1999 г. Д. Е. Ефимов

Экспонентом множества $\mathcal{A}$ неотрицательных $k \times k$ матриц называется такое минимальное n , что для любой выборки с возвращением $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ все элементы матрицы $A_1 \dots A_n$ положительны. В статье получены верхние оценки экспонента некоторых множеств матриц с использованием сингулярных чисел матриц. Найдена также оценка экспонента множества матриц, полученных с помощью операции обобщенного кронекерова произведения матриц. Эти результаты используются для оценки длины покрытия группы в заданной системе образующих.

1. Введение

Квадратная неотрицательная матрица A называется примитивной, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $A^n > 0$, то есть все элементы матрицы A^n положительны. Экспонентом примитивной матрицы A называется величина

$$\gamma(A) = \min\{n \in \mathbb{N} : A^n > 0\}.$$

Следуя [1], множество $\mathcal{A}$ неотрицательных $k \times k$ матриц будем называть классно примитивным, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любой выборки с возвращением $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ имеет место неравенство $A_1 A_2 \dots A_n > 0$. Минимальное из таких чисел n назовем экспонентом множества $\mathcal{A}$ и обозначим через $\gamma(\mathcal{A})$.

В [1] вводится понятие индекса неразложимости и доказывается следующий результат для множества $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ неотрицательных матриц: если индекс неразложимости каждой матрицы A_i , $i = 1, \dots, N$, не меньше некоторого фиксированного числа r , где $r \geq 1$, то для экспонента этого множества справедлива оценка

$$\gamma(\mathcal{A}) \leq \begin{cases} (k-1)/r, & \text{если } r \text{ делит } k-1, \\ [(k-1)/r] + 1, & \text{если } r \text{ не делит } k-1. \end{cases}$$

Во втором параграфе получены верхние оценки экспонента некоторых множеств матриц с использованием теории сингулярных чисел матриц. В третьем параграфе обобщено понятие кронекерова произведения матриц и доказана оценка экспонента множества матриц, полученных при помощи этой операции. Эти результаты используются для получения оценки длины покрытия группы в системе образующих.

2. Оценка экспонента множества матриц

Обозначим через A^* матрицу, сопряженную матрице A . Всюду ниже сингулярные числа матрицы A (неотрицательные квадратные корни собственных чисел матрицы A^*A) $\sigma_1(A), \dots, \sigma_k(A)$ занумерованы в порядке невозрастания их величин (см. [2]).

Пусть $C(k)$ — множество $k \times k$ матриц над полем комплексных чисел,

$$r(n) = \text{rang}(A_1 - L)(A_2 - L) \dots (A_n - L)$$

и

$$\varepsilon(A, B) = \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

— евклидово расстояние между матрицами.

Теорема 1. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — последовательность матриц из $C(k)$,

$$B_n = \prod_{t=1}^n A_t,$$

и при любом $n \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_t^t = L,$$

не зависящий от n . Пусть также $\sigma_j(A_n - L) \leq \sigma_j$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$ и $\sigma_j < 1$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, k$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = L, \quad \varepsilon(L, B_n) \leq \left(\sum_{j=1}^{r(n)} \sigma_j^{2n} \right)^{1/2}.$$

Для доказательства потребуются следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\sigma_j(A_i) \leq \sigma_j$ при любом $j = 1, \dots, k$ и любом $i = 1, \dots, l$. Обозначим через $\sigma_{l,1}, \dots, \sigma_{l,k}$ — сингулярные числа матрицы

$$B_l = \prod_{i=1}^l A_i,$$

причем $\sigma_{l,1} \geq \sigma_{l,2} \geq \dots \geq \sigma_{l,k}$.

Тогда

$$\sum_{j=1}^m \sigma_{l,j}^u \leq \sum_{j=1}^m \sigma_j^{lu}$$

для любого $m = 1, \dots, k$ и любого действительного $u \geq 0$.

Доказательство повторяет доказательство аналогичного неравенства для последовательности степеней линейного оператора (см. [3], стр. 508).

Лемма 2. Пусть $L^2 = A_i L = L A_i = L$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\prod_{t=1}^n A_t - L = \prod_{t=1}^n (A_t - L). \quad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n .

При $n = 1$ равенство (1) очевидно. Предположим, что равенство (1) верно для $n - 1$, то есть

$$\prod_{t=1}^{n-1} A_t - L = \prod_{t=1}^{n-1} (A_t - L).$$

Докажем равенство для n . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \prod_{t=1}^n (A_t - L) &= \left(\prod_{t=1}^{n-1} (A_t - L) \right) (A_n - L) = \left(\prod_{t=1}^{n-1} A_t - L \right) (A_n - L) \\ &= \prod_{t=1}^n A_t - L A_n - \prod_{t=1}^{n-1} A_t L + L^2 = \prod_{t=1}^n A_t - \prod_{t=1}^{n-1} A_t L \\ &= \prod_{t=1}^n A_t - \prod_{t=1}^{n-2} A_t L = \dots = \prod_{t=1}^n A_t - L. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть предел A^t при $t \rightarrow \infty$ существует и равен L . Тогда

$$AL = LA = L^2 = L.$$

Доказательство. Ясно, что

$$AL = A \lim_{t \rightarrow \infty} A^t = \lim_{t \rightarrow \infty} A^{t+1} = L.$$

Другие равенства доказываются аналогично.

Будем обозначать $\text{tr } A$ след матрицы A .

Доказательство теоремы 1. Пусть $\sigma_{n,1} \geq \sigma_{n,2} \geq \dots \geq \sigma_{n,k}$ — сингулярные числа матрицы $\prod_{t=1}^n (A_t - L)$, упорядоченные по невозрастанию. Из [4] (см. упражнение 1, стр. 196 в [4]) следует, что

$$\varepsilon(B_n, L) = \sqrt{\text{tr}(B_n - L)(B_n - L)^*}.$$

Из лемм 2 и 3 следует, что

$$B_n - L = \prod_{t=1}^n (A_t - L).$$

Отсюда,

$$\varepsilon(B_n, L) = \left(\text{tr} \prod_{t=1}^n (A_t - L) \left(\prod_{t=1}^n (A_t - L) \right)^* \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^k \sigma_{n,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Количество ненулевых сингулярных чисел равно рангу:

$$\text{rang}(B_n - L) = \text{rang} \left(\prod_{t=1}^n (A_t - L) \right) = r(n).$$

Поэтому

$$\varepsilon(B_n, L) = \left(\sum_{j=1}^{r(n)} \sigma_{n,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Из леммы 1 при $m = r(n)$ и $u = 2$ следует, что

$$\varepsilon^2(B_n, L) = \sum_{j=1}^{r(n)} \sigma_{n,j}^2 \leq \sum_{j=1}^{r(n)} \sigma_j^{2n}.$$

По условию теоремы $\sigma_j < 1$ при любом $j = 1, \dots, k$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(B_n, L) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = L.$$

Лемма 4. Существует унитарная $k \times k$ матрица U , приводящая любую дважды стохастическую $k \times k$ матрицу P к вполне распавшемуся виду, то есть

$$U^* P U = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}_{k-1} \\ 0_{k-1}^\dagger & T(P) \end{pmatrix},$$

где $T(P)$ — некоторая $(k-1) \times (k-1)$ матрица, а $\vec{0}_{k-1}$ и $0_{k-1}^\dagger$ — строка и столбец из $k-1$ нулей.

Доказательство проводится прямым построением искомой матрицы U . Обозначим через

$$\|\vec{a}\| = \left(\sum_{i=1}^k |a_i| \right)^{1/2}$$

норму вектора-строки $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k)$, пусть также $\vec{a}_i$ — i -я строка, $a_i^\dagger$ — i -й столбец матрицы A .

Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского–Шварца, можно доказать следующую лемму.

Лемма 5. Пусть $C \in \mathbf{C}(k)$ и $A = BCD$, максимальное значение нормы строки матрицы B равно b , а столбца матрицы D равно d . Тогда

$$\max\{|a_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, k\} \leq bd\sigma_1(C).$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}$ — такое множество неотрицательных $k \times k$ матриц, что для любой $A \in \mathcal{A}$ существует $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = L$ и $\sigma_1(A - L) \leq \sigma_1 < 1$. Пусть L — положительная матрица, l — ее минимальный элемент и

$$b = \sup\{\|\vec{a}_i - \vec{l}_i\| \mid A \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, k\}, \quad d = \sup\{\|a_j^\dagger - l_j^\dagger\| \mid A \in \mathcal{A}, j = 1, \dots, k\}.$$

Тогда $\mathcal{A}$ классно примитивно и

$$\gamma(\mathcal{A}) \leq \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_1 = 0, \\ 2, & \text{если } \sigma_1 > 0, \quad bd < l, \\ \lfloor (\ln l - \ln b - \ln d) / \ln \sigma_1 \rfloor + 3, & \text{если } \sigma_1 > 0, \quad bd \geq l. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $\sigma_1 = 0$. Тогда $\varepsilon(A, L) = 0$ и $A = L > 0$ при любой $A \in \mathcal{A}$. Значит, $\gamma(\mathcal{A}) = 1$.

Докажем оценку для случая $bd < l$ от противного. Если существуют A_1, A_2 из $\mathcal{A}$ такие, что $A_1 A_2$ содержит нулевые элементы, то $A_1 A_2 - L$ содержит элемент, больший, либо равный по модулю l . Согласно лемме 5 это невозможно.

Докажем оценку для случая $\sigma_1 > 0$ и $bd \geq l$ от противного.

Пусть для $n \geq \lfloor (\ln l - \ln b - \ln d) / \ln \sigma_1 \rfloor + 3$ существует набор $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ такой, что $c_{rs} = 0$, где $A_1 A_2 \dots A_n = (c_{ij}) = C$. Тогда при $B = (b_{ij}) = C - L$ справедливо неравенство

$$l \leq |-l_{rs}| = |c_{rs} - l_{rs}| = |b_{rs}|. \quad (3)$$

По лемме 5

$$|c_{rs} - l_{rs}| \leq bd \sigma_1 ((A_2 - L) \dots (A_{n-1} - L)). \quad (4)$$

По теореме Неймана-Хорна (см. [3], стр. 507) для сингулярных чисел имеют место неравенства

$$\sigma_1 \left(\prod_{j=2}^{n-1} (A_j - L) \right) \leq \prod_{j=2}^{n-1} \sigma_1 (A_j - L) \leq \sigma_1^{n-2}.$$

По определению логарифма $\sigma_1 = \exp(\ln \sigma_1)$. Подставив это выражение в неравенство (4), получаем, что

$$|c_{rs} - l_{rs}| \leq bd \sigma_1 ((A_2 - L) \dots (A_{n-1} - L)) \leq bd \exp((n-2) \ln \sigma_1).$$

Поскольку $\ln \sigma_1 < 0$, $n \geq \lfloor (\ln l - \ln b - \ln d) / \ln \sigma_1 \rfloor + 3$ и экспонента — строго возрастающая функция, справедлива оценка

$$|c_{rs} - l_{rs}| < bd \exp \left(\left(\frac{\ln l - \ln b - \ln d}{\ln \sigma_1} + 2 - 2 \right) \ln \sigma_1 \right).$$

После арифметических преобразований в правой части неравенства получаем, что

$$|c_{rs} - l_{rs}| < bd \exp(\ln l - \ln b - \ln d) = bd \frac{l}{bd} = l.$$

Сопоставив это неравенство с неравенством (3), получаем противоречие.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A}$ — множество дважды стохастических матриц размера $k \times k$ и $\sigma_2(A) \leq \sigma_2 < 1$ для любой $A \in \mathcal{A}$, L — матрица размера $k \times k$ с элементами $1/k$,

$$b = \sup\{\|\vec{a}_i - \vec{l}_i\| \mid A \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, k\}, \quad d = \sup\{\|a_j^\dagger - l_j^\dagger\| \mid A \in \mathcal{A}, j = 1, \dots, k\}.$$

Тогда множество $\mathcal{A}$ классно примитивно и

$$\gamma(\mathcal{A}) \leq \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_2 = 0, \\ 2, & \text{если } \sigma_2 > 0, \quad bd < k^{-1}, \\ \lfloor (\ln k + \ln b + \ln d) / \ln \sigma_2^{-1} \rfloor + 3, & \text{если } \sigma_2 > 0, \quad bd \geq k^{-1}. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем, что множество $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию теоремы 2. Из дважды стохастичности следует, что $AL = LA = A$ для любой $A \in \mathcal{A}$.

Как уже отмечалось,

$$\varepsilon(A^t, L) = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t - L)(A^t - L)^*}.$$

Отсюда, раскрыв скобки в правой части равенства, получаем, что

$$\varepsilon(A^t, L) = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A^{*t}) - \operatorname{tr} L}.$$

Учитывая неравенство для следов матриц $\operatorname{tr}(A^{*t} A^t) \leq \operatorname{tr}(A^* A)^t$ (см. [3], стр. 508), получаем равенство

$$\varepsilon(A^t, L) = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A^{*t}) - 1}.$$

Из определения сингулярных чисел следует, что

$$\varepsilon(A^t, L) = \left(\sum_{j=1}^k \sigma_j^{2t}(A) - 1 \right)^{1/2}.$$

Поскольку все матрицы из $\mathcal{A}$ дважды стохастические, первое сингулярное число каждой матрицы равно 1. Отсюда,

$$\varepsilon(A^t, L) = \left(1 + \sum_{j=2}^k \sigma_j^{2t}(A) - 1 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=2}^k \sigma_j^{2t}(A) \right)^{1/2} \leq \sigma_2^t(A) \sqrt{k-1} \leq \sigma_2^t \sqrt{k-1}.$$

По условию теоремы $\sigma_2 < 1$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(A^t, L) = 0,$$

и по определению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = L$$

для любой $A \in \mathcal{A}$.

Найдем $\sigma_1(A - L)$. Поскольку умножение на унитарную матрицу не меняет сингулярные числа, для U согласно лемме 4 верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} \sigma_1(A - L) &= \sigma_1(U^*(A - L)U) = \sigma_1(U^*AU - U^*LU) \\ &= \sigma_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}_{k-1} \\ 0_{k-1}^\dagger & T(A) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}_{k-1} \\ 0_{k-1}^\dagger & 0_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix} \right) = \sigma_2(A), \end{aligned}$$

где $T(A)$ — матрица размера $(k-1) \times (k-1)$, определенная в лемме 4, а $0_{(k-1) \times (k-1)}$ — матрица размера $(k-1) \times (k-1)$, состоящая из нулей. Получаем ограничение сверху $\sigma_1(A - L) \leq \sigma_2 < 1$.

Значит множество матриц $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию теоремы 2. Подставив в формулу (2) значения

$$\min\{l_{ij} : i, j = 1, \dots, k\} = 1/k, \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

и поменяв знаки числителя и знаменателя, получим, что

$$\gamma(\mathcal{A}) \leq \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_2 = 0, \\ 2, & \text{если } \sigma_2 > 0, \quad bd < k^{-1}, \\ \lfloor (\ln k + \ln b + \ln d) / \ln \sigma_2^{-1} \rfloor + 3, & \text{если } \sigma_2 > 0, \quad bd \geq k^{-1}. \end{cases}$$

Пусть A — неотрицательная матрица, $\mathcal{Q}(A)$ — множество дважды стохастических матриц $Q = \|q_{ij}\|$ размера $k \times k$ со свойством $q_{ij} = 0$, если $a_{ij} = 0$. Пусть $\mathcal{A}$ — множество неотрицательных матриц. Тогда множество $\{\mathcal{Q}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ конечно.

Обозначим L матрицу размера $k \times k$ с элементами $1/k$.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{A}$ — множество неотрицательных матриц размера $k \times k$ и $\mathcal{Q}(A) \neq \emptyset$ для любой $A \in \mathcal{A}$. Пусть существует такое $\sigma_2 < 1$, что для любой $A \in \mathcal{A}$ найдется $Q_0(A) \in \mathcal{Q}(A)$ такая, что $\sigma_2(Q_0(A)) \leq \sigma_2$, $\vec{b}_i(a)$ — i -я строка матрицы $Q_0(A) - L$,

$$b = \sup\{\|\vec{b}_i(A)\| \mid A \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, k\},$$

$d_j^\perp(A)$ — j -й столбец матрицы $Q_0(A) - L$,

$$d = \sup\{\|d_j^\perp(A)\| \mid A \in \mathcal{A}, j = 1, \dots, k\}.$$

Тогда

$$\gamma(\mathcal{A}) \leq \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_2 = 0, \\ 2, & \text{если } \sigma_2 > 0, \quad bd < k^{-1}, \\ \lfloor (\ln k + \ln b + \ln d) / \ln \sigma_2^{-1} \rfloor + 3, & \text{если } \sigma_2 > 0, \quad bd \geq k^{-1}. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что из неравенства $Q_0(A_1)Q_0(A_2)\dots Q_0(A_n) > 0$ следует, что $A_1A_2\dots A_n > 0$. Теперь оценка следует из теоремы 3.

Определение 1. Назовем неотрицательную матрицу m -регулярной, если в каждой строке и в каждом столбце она содержит ровно m ненулевых элементов.

Для m -регулярной матрицы A в случае $m > 0$ введем матричную функцию $G(A)$, полагая

$$g_{ij} = \begin{cases} 1/m, & b_{ij} > 0, \\ 0, & b_{ij} = 0. \end{cases}$$

Следствие. Пусть $\mathcal{A}$ — множество m -регулярных $k \times k$ матриц, $m > 0$, $\sigma_2(G(A)) \leq \sigma_2 < 1$ при любой $A \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\gamma(\mathcal{A}) \leq \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_2 = 0, \\ 2, & \text{если } \sigma_2 > 0, \quad m > k/2, \\ \lfloor (\ln(k - m) - \ln m) / \ln \sigma_2^{-1} \rfloor + 3, & \text{если } \sigma_2 > 0, \quad m \leq k/2. \end{cases}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что $G(A) \in \mathcal{Q}(A)$. Таким образом, если взять $Q_0(A) = G(A)$, то выполняются условия теоремы 4.

Осталось найти супремумы значений норм строк и столбцов матриц $G(A) - L$. В данном случае нормы строк и столбцов совпадают и не зависят от A , поэтому

$$b = d = \sqrt{m(1/m - 1/k)^2 + (k - m)1/k^2}.$$

После арифметических преобразований в правой части получим, что

$$b = d = \sqrt{(k - m)/mk}.$$

Подставив это значение в оценку из теоремы 4, получим оценку, указанную в формулировке следствия.

3. Оценка экспонента обобщенного кронекерова произведения матриц

Определение 2. Пусть A — квадратная $k \times k$ матрица, $\mathcal{B} = \{B_{ij}\}$ — упорядоченное множество из k^2 матриц размера $l \times l$. Назовем обобщенным кронекеровым произведением матрицы A и множества матриц $\mathcal{B}$ матрицу $C = A \circ \mathcal{B}$ вида

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B_{11} & a_{12}B_{12} & \dots & a_{1k}B_{1k} \\ a_{21}B_{21} & a_{22}B_{22} & \dots & a_{2k}B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}B_{k1} & a_{k2}B_{k2} & \dots & a_{kk}B_{kk} \end{pmatrix}.$$

Частный случай обобщенного кронекерова произведения с матрицей A , все элементы которой равны 1, использовался в [5].

Теорема 5. Пусть множество матриц $\mathcal{A}$ классно примитивно с экспонентом $\gamma(\mathcal{A})$, множество $\mathcal{D}$ классно примитивно с экспонентом $\gamma(\mathcal{D})$. Пусть

$$\mathcal{C} = \{C = A \circ \mathcal{B} \mid A \in \mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

Тогда $\mathcal{C}$ классно примитивно и

$$\gamma(C) \leq \max\{\gamma(\mathcal{A}), \gamma(\mathcal{D})\}.$$

Доказательство. В матрице $C_1 C_2 \dots C_n$ при $n \geq \max\{\gamma(\mathcal{A}), \gamma(\mathcal{D})\}$ рассмотрим блок размера $l \times l$. Пусть

$$C_m = A_m \circ \mathcal{B}_m, \quad A_m = \|a_{ij}^{(m)}\| \in \mathcal{A}$$

и матрица $B_{ij}^{(m)}$ находится на ij -м месте в упорядоченном множестве матриц $\mathcal{B}_m$. Положим

$$D_{ij} = \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \dots \sum_{i_{n-1}=1}^k a_{ii_1}^{(1)} a_{i_1 i_2}^{(2)} \dots a_{i_{n-1} j}^{(n)} B_{ii_1}^{(1)} B_{i_1 i_2}^{(2)} \dots B_{i_{n-1} j}^{(n)}.$$

Матрица $B_{ii_1}^{(1)} B_{i_1 i_2}^{(2)} \dots B_{i_{n-1} j}^{(n)}$ положительна, так как $n \geq \gamma(\mathcal{D})$. С другой стороны, существует набор $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ такой, что $a_{ii_1}^{(1)} a_{i_1 i_2}^{(2)} \dots a_{i_{n-1} j}^{(n)} > 0$ поскольку $n \geq \gamma(\mathcal{A})$. Следовательно, $D_{ij} > 0$ при любых i, j . Отсюда и $C_1 C_2 \dots C_n$ положительна, что и требовалось доказать.

Эта теорема имеет применения в теории групп, а именно, для вычисления длины покрытия группы в заданной системе образующих.

Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые определения (все они взяты из [6]) и обозначения.

Пусть G — произвольная конечная группа, M — любое ее подмножество и $H = \langle M \rangle$ — подгруппа группы G , порожденная множеством M . Так как $|H| < \infty$, каждый ее элемент h представляется в виде произведения элементов из M . Минимальное число l сомножителей среди всех таких представителей элемента h назовем длиной элемента h группы H в системе образующих M и обозначим $l(h; M)$. Число

$$l(H; M) = \max_{h \in H} l(h, M)$$

назовем длиной группы H в системе образующих M .

Условимся подмножества из группы G умножать как комплексы: AB есть множество всех элементов вида ab , где $a \in A$, $b \in B$. Тогда системе образующих M группы H можно сопоставить последовательность подмножеств из H : $M, M^2, M^3, \dots$. Множество M^i назовем i -м слоем группы H в системе образующих M .

Так как $|H| < \infty$, то найдется конечное число слоев M^i , объединение которых совпадает с H . Минимальное число таких слоев назовем шириной группы H в системе образующих M и обозначим $d(H; M)$.

Нам потребуется ввести также определение квазидлины покрытия группы в множестве систем образующих.

Определение 3. Пусть G — группа, $\mathcal{S}$ — некоторый набор подмножеств группы G . Множество $\mathcal{S}$ будем называть классно примитивным, если существует такое $n \in \mathbf{N}$, что для любой выборки с возвращением $S_1, S_2, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ имеет место равенство $S_1 S_2 \dots S_n = G$.

Минимальное из таких чисел n назовем квазидлиной покрытия группы G в множестве систем образующих $\mathcal{S}$ и обозначим через $\tilde{l}(G, \mathcal{S})$.

Будем обозначать $[G : H]$ — индекс подгруппы H в группе G . Напомним, что если H — нормальный делитель G , то G можно представить как объединение непересекающихся смежных классов

$$G = \bigcup_{m=1}^{[G:H]} g^{(m)} H.$$

Занумеруем все элементы конечной группы G , $|G| = k$, числами от 1 до k . Обозначим $A(S) = (a_{ij})$ матрицу размера $k \times k$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } g_i^{-1} g_j \in S, \\ 0, & \text{если } g_i^{-1} g_j \notin S. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что задача о квазидлине покрытия конечной группы G в множестве систем образующих $\mathcal{S}$ сводится к подсчету экспонента множества матриц $\mathcal{A} = \{A(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$. Поэтому из теоремы 5 получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть G — конечная группа, S — система образующих, H — нормальный делитель G ,

$$G = \bigcup_{m=1}^{[G:H]} g^{(m)} H,$$

$L = G \mid H$ — фактор-группа G по H . Обозначим $S_0 = \{gH\}$ те классы, в которые попали элементы из S ,

$$S_{ij} = H \cap S(g^{(j)})^{-1}g^{(i)}, \quad i, j = 1, \dots, [G : H],$$

и $\mathcal{S}$ — множество, состоящее из непустых подмножеств S_{ij} группы G . Пусть $d(L; S_0) = 1$. Тогда

$$l(G; S) \leq \max\{\tilde{l}(L; \{S_0\}), \tilde{l}(H; \mathcal{S})\}.$$

Данная теорема позволяет свести задачу о длине покрытия группы, имеющей нормальный делитель, к квазидлине покрытия фактор-группы и квазидлине покрытия нормального делителя в некотором множестве систем образующих.

Список литературы

1. Сачков В.Н., Ошкин И.Б., Экспоненты классов неотрицательных матриц. *Дискретная математика* (1993) 5, №2, 150–159.
2. Johnson C.R., Nylen P., Yamamoto's theorem for generalized singular values. *Linear Algebra Appl.* (1990) 128, 147–158.
3. Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*. Наука, Москва, 1988.
4. Беллман Р., *Введение в теорию матриц*. Наука, Москва, 1976.
5. Горчинский Ю.Н., Круглов И.А., Капитонов В.М., Вопросы теории распределений на конечных группах. *Труды по дискретной математике* (1997) 1, 85–112.
6. Глухов М.М., О числовых параметрах, связанных с заданием конечных групп системами образующих элементов. *Труды по дискретной математике* (1997) 1, 43–66.

Статья поступила 24.08.1998.