Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, В. Н. Кричко, Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 27–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:31:53

Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования

© 1999 г. В. А. Емеличев, В. Н. Кричко

Указаны границы изменений входных параметров векторной задачи линейного булева программирования, сохраняющие парето-оптимальность решения.

Работа выполнена при поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований, проект Ф 97-266.

1. Введение

В работе [1] указан радиус устойчивости единственного оптимального решения классической (скалярной) задачи линейного булева программирования в случае, когда возмущению подвергаются одновременно и коэффициенты линейного функционала и элементы матрицы ограничений. В настоящей заметке с помощью аналогичной техники доказательств выводится формула радиуса устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования. В качестве следствия получено выражение для радиуса квазиустойчивости этой задачи.

2. Определения и вспомогательные результаты

Будем в основном придерживаться обозначений, а по возможности и терминологии работы [1].

Пусть

$$C = \{c_{ij}\} \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad k \geq 1, \quad n \geq 2, \quad m \geq 1,$$

E^n — множество вершин единичного n -мерного куба.

Рассмотрим k -критериальную (векторную) задачу булева программирования

$$Cx \rightarrow \max, \tag{1}$$

$$A_i x \leq b_i, \quad i \in N_m, \quad x \in E^n. \tag{2}$$

Здесь $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ и в дальнейшем нижний индекс i у матрицы (вектора) будет указывать на i -ю строку (компоненту) соответствующей матрицы (соответствующего вектора).

Условимся для двух векторов $u, v \in \mathbf{R}^k$ считать, что

$$u \leq v \iff u_i \leq v_i, \quad i \in N_k,$$

$$u < v \iff u_i < v_i, \quad i \in N_k.$$

Будем говорить, что вектор u доминирует вектор v , если $u \geq v$ и $u \neq v$.

Пусть X — множество всех точек, удовлетворяющих системе (2). Под паретовским оптимумом (или эффективным решением) задачи (1)–(2), как обычно, будем понимать элемент множества Парето

$$P = \{x \in X : p(x) = \emptyset\},$$

где

$$p(x) = \{x' \in X : Cx' \geq Cx, Cx' \neq Cx\}.$$

Другими словами точка $x^0 \in X$ является паретовским оптимумом задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда для всякой точки $x \in X$ вектор Cx не доминирует вектор Cx^0 .

Под устойчивостью паретовского оптимума x^0 будем понимать свойство сохранения эффективности этого оптимума при малых возмущениях всех параметров задачи (1)–(2).

В дальнейшем под x^0 будем понимать некоторый паретовский оптимум задачи (1)–(2).

Возмущенной задачей назовем следующую векторную задачу:

$$(C + C')x \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$(A_i + A'_i)x \leq b_i + b'_i, \quad i \in N_m, \quad x \in E^n. \quad (4)$$

Расстояние между задачами (1)–(2) и (3)–(4) определим числом $\max\{\|C'\|, \|A'\|, \|b'\|\}$, где A' — матрица со строками A'_i , $i \in N_m$, $b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$, $\|\cdot\|$ — чебышевская норма l_∞ в соответствующем пространстве. Через $\|\cdot\|^*$ будем, как обычно, обозначать норму l_1 в сопряженном пространстве.

Определение 1. Радиусом устойчивости точки $x^0 \in X$, являющейся паретовским оптимумом задачи (1)–(2), называется инфимум расстояния от этой задачи до задач (3)–(4), для которых точка x^0 не является паретовским оптимумом.

Этот радиус будем обозначать через $\rho_0(x^0, A, b, C)$ или просто ρ_0 . Расстоянием между системами (2) и (4) назовем число $\max\{\|A'\|, \|b'\|\}$.

Определение 2. Точка $x \in X$ называется ε -устойчивым решением системы (2), если x — решение любой системы (4), находящейся от (2) на расстоянии, не превосходящем ε .

Дублируя [1], введем обозначения

$$\gamma_i(x) = \frac{A_i x - b_i}{\|x\|^* + 1}, \quad i \in N_m,$$

$$\beta(x) = \max_{i \in N_m} \gamma_i(x), \quad \nu(x) = -\beta(x).$$

Нам понадобятся некоторые леммы, доказанные в [1].

Лемма 1 ([1]). Точка $x \in X$ является ε -устойчивым решением системы (2) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\varepsilon \leq \nu(x)$.

Пусть $x \in E^n \setminus X$. Обозначим через $\beta'(x)$ расстояние от системы (2) до ближайшей из систем (4), имеющих точку x в качестве решения.

Лемма 2 ([1]). Для всякой точки $x \in E^n \setminus X$ справедливо равенство $\beta(x) = \beta'(x)$.

Определение 3. Точку x^0 назовем ε -устойчивой относительно точки x , если для любой матрицы C' такой, что $\|C'\| < \varepsilon$, вектор $(C + C')x$ не доминирует вектор $(C + C')x^0$.

Введем функцию

$$\alpha(x^0, x) = \max_{i \in N_k} \frac{C_i(x^0 - x)}{\|x - x^0\|^*}, \quad x \in E^n \setminus x^0.$$

Лемма 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Точка x^0 является ε -устойчивой относительно точки x , если $\alpha(x^0, x) > \varepsilon$.

Доказательство. Пусть индекс j таков, что

$$\alpha(x^0, x) = \frac{C_j(x^0 - x)}{\|x - x^0\|^*}.$$

Тогда при $\|C'\| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} (C_j + C'_j)(x - x^0) &< C_j(x - x^0) + \varepsilon\|x - x^0\|^* \\ &< C_j(x - x^0) + \alpha(x^0, x)\|x - x^0\|^* = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что вектор $(C + C')x$ не доминирует вектор $(C + C')x^0$. Следовательно, согласно определению 3 x^0 — ε -устойчивая точка относительно точки x .

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Если точка x^0 ε -устойчива относительно точки x , то $\alpha(x^0, x) \geq \varepsilon$.

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Пусть точка x^0 ε -устойчива относительно x и пусть $\varepsilon > \beta > \alpha \geq 0$, где $\alpha = \alpha(x^0, x)$.

Рассмотрим возмущающую матрицу $C' = \{c'_{ij}\} \in \mathbf{R}^{k \times n}$, элементы которой для любых индексов $i \in N_k$ и $j \in N_n$ определяются по формуле

$$c'_{ij} = \beta \operatorname{sign}(x - x^0)_j.$$

Так как $\|C'\| = \beta < \varepsilon$, в силу ε -устойчивости точки x^0 относительно точки x вектор $(C + C')x$ не доминирует вектор $(C + C')x^0$.

В то же время, полагая $e = (1, \dots, 1)^T \in E^k$, находим, что

$$\begin{aligned} (C + C')(x - x^0) &= C(x - x^0) + \beta e\|x - x^0\|^* > C(x - x^0) + \alpha e\|x - x^0\|^* \\ &= C(x - x^0) + e \max\{C_i(x^0 - x), i \in N_k\} \\ &= C(x - x^0) - e \min\{C_i(x - x^0), i \in N_k\} \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, вектор $(C + C')x$ доминирует вектор $(C + C')x^0$. Полученное противоречие доказывает лемму 4.

Далее положим

$$\lambda(x^0) = \begin{cases} \min\{\alpha(x^0, x) : x \in X \setminus \{x^0\}\}, & \text{если } X \neq \{x^0\}, \\ \infty, & \text{если } X = \{x^0\}. \end{cases}$$

Через $\lambda'(x^0)$ обозначим предельное возмущение коэффициентов векторной функции, при котором задача (2)–(3) имеет в качестве паретовского оптимума точку x^0 .

Поскольку для любой точки $x \in X \setminus x^0$ предельное возмущение матрицы C , при котором вектор $(C + C')x$ не доминирует вектор $(C + C')x^0$, задается в силу лемм 3 и 4 значением функции $\alpha(x^0, x)$, верна следующая лемма.

Лемма 5. *Справедливо равенство $\lambda(x^0) = \lambda'(x^0)$.*

Введем обозначение

$$t(x^0) = \begin{cases} \min_{x \in E^n \setminus X} \max\{\alpha(x^0, x), \beta(x)\}, & \text{если } X \neq E^n, \\ \infty, & \text{если } X = E^n. \end{cases}$$

Лемма 6. *Справедливо неравенство $t(x^0) \geq \rho_0$.*

Доказательство. При $\rho_0 = 0$ лемма очевидна. Поэтому будем считать, что $\rho_0 > 0$.

Если $E^n \setminus X = \emptyset$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть $E^n \setminus X \neq \emptyset$. Предположим, что $t(x^0) < \rho_0$. Тогда существует такая точка $x \in E^n \setminus X$, что $\alpha(x^0, x) < \rho_0$ и $\beta(x) < \rho_0$. Поэтому согласно лемме 4 точка x^0 не является ρ_0 -устойчивой относительно точки x . Следовательно, с учетом определения 3 существует такая матрица $C' \in \mathbf{R}^{k \times n}$, что

$$\|C'\| < \rho_0,$$

а вектор $(C + C')x$ доминирует вектор $(C + C')x^0$.

Далее, так как $\beta(x) < \rho_0$, в силу леммы 2 справедливо неравенство $\beta'(x) < \rho_0$. Отсюда, по определению числа $\beta'(x)$ существуют такие матрица $A' \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и вектор $b' \in \mathbf{R}^m$, что расстояние между системами (2) и (4) будет меньше, чем ρ_0 , а x — решение системы (4) при указанных A' и b' .

Собирая все доказанное, убеждаемся, что при выбранных C' , A' и b' расстояние между задачами (1)–(2) и (3)–(4) меньше, чем ρ_0 , но точка x^0 не является паретовским оптимумом задачи (3)–(4). Полученное противоречие доказывает лемму 6.

3. Основной результат

Теорема 1. *Для радиуса устойчивости паретовского оптимума x^0 k -критериальной ($k \geq 1$) задачи (1)–(2) справедлива формула*

$$\rho_0(x^0, A, b, C) = \min\{\nu(x^0), \lambda(x^0), t(x^0)\}.$$

Доказательство. Методом от противного, используя лемму 1, легко доказать, что

$$\rho_0 \leq \nu(x^0).$$

Из определения числа $\lambda'(x^0)$ и леммы 5 вытекает, что

$$\rho_0 \leq \lambda'(x^0) = \lambda(x^0).$$

Поэтому с учетом леммы 6

$$\rho_0 \leq \min\{\nu(x^0), \lambda(x^0), t(x^0)\}.$$

Пусть теперь t_0 — правая часть последнего неравенства. Покажем, что $\rho_0 \geq t_0$. Для этого достаточно доказать, что при любом $\varepsilon < t_0$ точка x^0 — паретовский оптимум всякой возмущенной задачи (3)–(4), находящейся от задачи (1)–(2) на расстоянии меньше, чем ε . Такую возмущенную задачу будем обозначать через $Y(\varepsilon)$.

Поскольку $t_0 \leq \nu(x^0)$, ввиду леммы 1 точка x^0 является допустимым решением задачи $Y(\varepsilon)$.

Пусть x — произвольное допустимое решение задачи $Y(\varepsilon)$, отличное от x^0 .

Рассмотрим два случая.

В первом случае $x \in X$. Тогда с учетом очевидных неравенств

$$\|C'\| < \varepsilon < t_0 \leq \lambda(x^0) \leq \alpha(x^0, x)$$

и леммы 3 заключаем, что точка x^0 является ε -устойчивой относительно точки x , т.е. вектор $(C + C')x$ не доминирует вектор $(C + C')x^0$.

Во втором случае $x \in E^n \setminus X$. Тогда из определения величины $\beta'(x)$ и леммы 2 следует, что число $\beta(x)$ есть расстояние от системы (2) до ближайшей из систем (4), имеющих точку x в качестве решения. Поскольку x — решение задачи $Y(\varepsilon)$, справедливо неравенство

$$\beta(x) < \varepsilon. \quad (5)$$

Тогда очевидно, что

$$\alpha(x^0, x) > \varepsilon, \quad (6)$$

так как в противном случае с учетом (5) находим, что

$$t_0 \leq t(x^0) \leq \max\{\alpha(x^0, x), \beta(x)\} \leq \varepsilon,$$

что противоречит неравенству $\varepsilon < t_0$.

Далее, из (6) в силу леммы 3 получаем, что и в этом случае вектор $(C + C')x$ не доминирует вектор $(C + C')x^0$ при $\|C'\| < \varepsilon$.

Следовательно, точка x^0 — паретовский оптимум задачи $Y(\varepsilon)$.

Теорема доказана.

Как уже отмечалось в [1], величины $\nu(x^0)$, $\lambda(x^0)$ и $t(x^0)$, фигурирующие в формулировке теоремы, имеют вполне определенный смысл: $\nu(x^0)$ и $\lambda(x^0)$ представляют собой предельные возмущения соответственно матрицы ограничений и коэффициентов целевых функций, а $t(x^0)$ определяет совместное влияние этих двух параметров на устойчивость паретовского оптимума x^0 . Поскольку $\nu(x^0) < \infty$, радиус устойчивости ρ_0 всегда конечное число.

Следуя [2–4], радиусом квазиустойчивости задачи (1)–(2) назовем инфимум расстояния от этой задачи до задач (3)–(4), множество Парето которых не содержит хотя бы один паретовский оптимум задачи (1)–(2). Обозначив этот радиус через $\rho(A, b, C)$, из теоремы 1 легко выводим следующее утверждение.

Следствие 1. Для радиуса квазиустойчивости векторной задачи (1)–(2) справедлива формула

$$\rho(A, b, C) = \min_{x^0 \in P} \min\{\nu(x^0), \lambda(x^0), t(x^0)\}.$$

В случае, когда число критериев $k = 1$, векторная задача (1)–(2) превращается в обычную (скалярную) задачу булева программирования, а множество Парето P — в множество оптимальных решений. Под устойчивостью оптимального решения x^0 естественно понимать свойство сохранения оптимальности при малых возмущениях параметров.

Очевидно, что частным случаем нашей теоремы является следующее утверждение.

Следствие 2. Для радиуса устойчивости оптимального решения x^0 (не обязательно единственного) скалярной ($k = 1$) задачи

$$cx \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$A_i x \leq b_i, \quad i \in N_m, \quad x \in E^n \quad (8)$$

справедлива формула

$$\rho_0(x^0, A, b, c) = \min \left\{ \min_{i \in N_m} \frac{b_i - A_i x^0}{\|x^0\|^* + 1}, \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{c(x^0 - x)}{\|x - x^0\|^*}, t(x^0) \right\},$$

где

$$t(x^0) = \min_{x \in E^n \setminus X} \max \left\{ \frac{c(x^0 - x)}{\|x - x^0\|^*}, \max_{i \in N_m} \frac{A_i x^0 - b_i}{\|x^0\|^* + 1} \right\}, \quad \text{если } E^n \setminus X \neq \emptyset,$$

и $t(x^0) = \infty$, если $E^n \setminus X = \emptyset$.

Отсюда следует очевидный факт, что радиус устойчивости оптимального решения x^0 скалярной задачи (7)–(8) может быть больше нуля лишь в случае, когда x^0 — единственное оптимальное решение задачи (7)–(8).

Список литературы

1. Леонтьев В.К., Мамутов К.Х., Устойчивость решений в задачах линейного булева программирования. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1988) **28**, №10, 1475–1481.
2. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ* (1995) №4, 137–143.
3. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П., О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации. *Матем. заметки* (1998) **63**, №1, 21–27.
4. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П., О радиусе квазиустойчивости многокритериальной траекторной задачи. *Докл. АН Беларуси* (1996) **40**, №1, 9–12.

Статья поступила 17.05.1999.