Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Гасанов, Ю. П. Луговская, Константный в худшем случае алгоритм поиска идентичных объектов, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 139–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:01:01

УДК 519.7

Константный в худшем случае алгоритм поиска идентичных объектов

© 1999 г. Э. Э. Гасанов, Ю. П. Луговская

В работе предлагается алгоритм поиска идентичных объектов, который при затратах памяти порядка k^2 почти всегда обеспечивает время поиска в множестве мощности k , равное в худшем случае шести элементарным операциям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 98-01-00130.

1. Введение

В работе рассматривается задача поиска идентичных объектов в ее геометрической интерпретации, которая формулируется следующим образом. Дано конечное подмножество $V = \{y_1, \dots, y_k\}$ точек из отрезка $[0, 1]$ вещественной прямой. Требуется построить условный алгоритм, который для произвольной точки $x \in [0, 1]$ (эта точка называется запросом) позволяет найти номер точки из множества V , которая совпадает с x (если такая точка в V существует), при условии, что мы умеем выполнять следующие операции над вещественными числами: арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление, взятие целой части вещественного числа), операции сравнения и возможно некоторые другие простейшие операции. При этом допускается предобработка данных, которая может состоять в сортировке данных (множества V), а также в построении некоторых дополнительных структур. Известным алгоритмом решения этой задачи является алгоритм бинарного или дихотомического поиска (см., например, [1], с. 484–492). Здесь и далее мы будем пользоваться термином алгоритм, подразумевая условный алгоритм (или относительный алгоритм, см. [2], с. 44–45). Известно, что время поиска бинарного алгоритма в худшем случае и в среднем равно по порядку $\log_2 k$, а требуемый объем памяти по порядку равен k . Здесь под временем поиска понимается количество выполненных элементарных операций, под объемом памяти количество ячеек для хранения вещественных чисел, куда можно поместить данные и дополнительные структуры, а худший случай и среднее берется по множеству всех возможных значений запроса, т.е. по множеству $[0, 1]$. В [3] предлагается алгоритм с затратами памяти порядка k , в котором среднее время поиска равно константе, но время поиска в худшем случае имеет порядок k . В работах [4, 5] предложен алгоритм, который при объеме памяти порядка k позволяет решать задачи в худшем случае за время порядка $\log_2 k$, а в среднем за 2 шага. В данной работе предлагается алгоритм, который для почти всех задач поиска идентичных объектов (т.е. при вариации множества V) позволяет

при объеме памяти порядка k^2 решать задачу в худшем случае за 6 элементарных операций.

2. Описание алгоритма и основные результаты

Опишем предлагаемый алгоритм. Пусть дано множество $V = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, в котором производится поиск. Это множество будем называть библиотекой. Выполним следующую предобработку. Упорядочим точки из V в порядке возрастания и, чтобы не усложнять обозначения, далее считаем, что $y_1 < y_2 < \dots < y_k$. Находим число

$$d_V = \min_{2 \leq i \leq k} (y_i - y_{i-1}).$$

Пусть $m = \lceil 1/d_V \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее, чем $1/d_V$. Выделим место под массив целых длины m и элементы массива обозначим n_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Разделим отрезок $[0, 1]$ на m равных частей:

$$A_i = [i/m, (i+1)/m), \quad i = 0, 1, \dots, m-2, \quad A_{m-1} = [(m-1)/m, 1].$$

В каждую часть может попасть не более одной точки из множества V . Теперь заполним массив n_i следующим образом:

$$n_i = \begin{cases} -1, & \text{если в } A_i \text{ нет точки из } V, \\ q & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где q — номер точки из V , которая попала в A_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

После того как сделана данная предобработка, поиск будем осуществлять следующим образом. Пусть нам дан запрос $x \in [0, 1]$. Вычислим $j = \lfloor xm \rfloor$, целую часть числа xm . Понятно, что $x \in A_j$. Если n_j равно -1 , то в библиотеке V нет числа равного x . В противном случае сравниваем y_{n_j} с x и если они равны, то номер n_j является ответом задачи, иначе ответ пуст. Тем самым в худшем случае мы выполним одну операцию умножения, одну операцию взятия целой части, одну операцию сравнения целых чисел, одну операцию сравнения вещественных чисел и две операции извлечения элемента массива, всего 6 операций. Объем памяти, необходимый данному алгоритму, равен сумме объемов массивов целых чисел длины m и вещественных чисел длины k . Ниже приводятся результаты, оценивающие величину m .

Пусть k — натуральное число, большее 1, и $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ — независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины. Пусть

$$d(\xi_1, \dots, \xi_k) = \min_{1 \leq i < j \leq k} |\xi_i - \xi_j|.$$

Эта величина исследовалась, например, в [6, 7].

Пусть r — вещественное число и $f(k, r) = \mathbf{P}(d(\xi_1, \dots, \xi_k) \geq r)$ — вероятность того, что минимальное расстояние между парами различных точек ξ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, не меньше r .

Если считать, что библиотеки V получаются случайным независимым бросанием k точек на отрезок $[0, 1]$, где вероятность попадания в любые два отрезка из $[0, 1]$ одинаковой длины одинакова, то $f(k, r)$ равна доле множества k -элементных библиотек, у которых минимальное расстояние между любыми двумя точками не меньше, чем r , по отношению к множеству всех библиотек мощности k .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При $0 \leq r \leq 1/(k-1)$

$$f(k, r) = (1 - (k-1)r)^k$$

и $f(k, r) = 0$ при $r < 0$ и $r > 1/(k-1)$.

Чтобы привести следствие из этой теоремы, описывающее асимптотическое поведение $f(k, r)$, введем обозначения, обычно принятые при описании асимптотических оценок.

Будем писать $\alpha(n) = o(1)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$.

Будем писать $A(n) = o(B(n))$, если $A(n) = B(n)o(1)$.

Скажем, что $A(n)$ асимптотически не превосходит $B(n)$ при $n \rightarrow \infty$ и будем писать в этом случае $A \lesssim B$, если существует $\alpha(n) = o(1)$ такое, что начиная с некоторого номера n_0 ,

$$A(n) \leq (1 + \alpha(n))B(n).$$

Если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$, то будем говорить, что A и B асимптотически равны при $n \rightarrow \infty$ и будем писать в этом случае $A \sim B$.

Будем писать $A \underset{\sim}{\leq} B$, если существует такая положительная константа c , что $A(n) \leq cB(n)$, начиная с некоторого номера n_0 .

Если $A \underset{\sim}{\leq} B$ и $B \underset{\sim}{\leq} A$, то будем говорить, что A и B равны по порядку при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть r_k — последовательность вещественных чисел такая, что $0 \leq r_k \leq 1/(k-1)$. Тогда

$$f(k, r_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1/r_k = o(k^2), \\ e^{-1/c}, & \text{если } 1/r_k \sim ck^2, c - \text{постоянная}, \\ 1, & \text{если } k^2 = o(1/r_k). \end{cases}$$

Отсюда следует, что если в нашем распоряжении имеется объем памяти размера ck^2 , то доля библиотек мощности k , для которых описанным алгоритмом мы можем находить ответ за 6 элементарных операций, равна $e^{-1/c}$. А если в нашем распоряжении имеется объем памяти больший по порядку, чем k^2 , то для почти всех библиотек мы можем находить ответ за 6 шагов. С другой стороны, если у нас имеется объем памяти, меньший по порядку, чем k^2 , то почти всегда мы не сможем воспользоваться описанным выше алгоритмом поиска.

Обозначим через $\bar{d}(k)$ среднее значение величины $d(\xi_1, \dots, \xi_k)$.

Теорема 3. Справедливо равенство

$$\bar{d}(k) = 1/(k^2 - 1).$$

Отсюда следует, что в среднем достаточно иметь k^2 памяти, чтобы обеспечить время поиска в 6 операций.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть l — вещественное число из отрезка $[0, 1]$, r — вещественное число, k — целое число, большее 1, n — такое целое число, что

$1 \leq n \leq k$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ — независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины. Обозначим через $B(n, r, l)$ событие, состоящее в том, что точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ попадают в отрезок $[0, l]$, и минимальное расстояние между парами различных точек $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$, не меньше r . Пусть $f(n, r, l) = \mathbf{P}(B(n, r, l))$. Понятно, что если $r < 0$, то $f(n, r, l) = l^n$, а при $r > l/(n-1)$, $f(n, r, l) = 0$. Поэтому мы будем рассматривать только случай, когда $0 \leq r \leq l/(n-1)$.

Лемма 1. Если $0 \leq r \leq l/(n-1)$, то $f(n, r, l) = (l - (n-1)r)^n$.

Доказательство проведем индукцией по n .

В качестве базиса индукции рассмотрим случай $n = 2$.

Поскольку возможны два равновероятных события, когда $\xi_1 < \xi_2$, и когда $\xi_2 < \xi_1$, то достаточно рассмотреть первую ситуацию и удвоить полученный результат. Поскольку в этом случае ξ_1 может меняться от 0 до $l-r$, а ξ_2 — от $x_1 + r$ до l ,

$$f(2, r, l) = 2 \int_0^{l-r} d\xi_1 \int_{\xi_1+r}^l d\xi_2 = 2 \int_0^{l-r} (l - x_1 - r) d\xi_1 = (l-r)^2.$$

Рассмотрим индуктивный переход. Пусть утверждение леммы справедливо для любого натурального $q < n$ и любого вещественного $l \in [0, 1]$.

Через A_i обозначим событие, состоящее в том, что случайная величина ξ_i максимальна среди $\xi_1, \dots, \xi_n$, здесь $i = 1, \dots, n$. Понятно, что если $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \neq j$, то $A_i \cap A_j = \emptyset$, кроме того $\mathbf{P}(A_i) = 1/n$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}(B(n, r, l)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}(A_i \cap B(n, r, l)) = n \mathbf{P}(A_n \cap B(n, r, l)).$$

Поскольку в случае события $A_n \cap B(n, r, l)$ величина ξ_n может меняться от $(n-1)r$ до l , а остальные $n-1$ величины располагаются на отрезке $[0, x_n - r]$ и должны находиться на расстоянии не менее r , то согласно предположению индукции

$$\begin{aligned} f(n, r, l) &= \mathbf{P}(B(n, r, l)) = n \mathbf{P}(A_1 \cap B(n, r, l)) \\ &= n \int_{(n-1)r}^l \mathbf{P}(B(n-1, r, x_n - r)) d\xi_n \\ &= n \int_{(n-1)r}^l (x_n - r - (n-2)r)^{n-1} d\xi_n = (l - (n-1)r)^n. \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

Чтобы убедиться в справедливости утверждения теоремы 1 достаточно заметить, что $f(k, r) = f(k, r, 1)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\alpha_k = o(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha_k}{k}\right)^k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k - \alpha_k}\right)^{-k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{\alpha_k}{k - \alpha_k}\right)^{(k - \alpha_k)/\alpha_k}\right)^{-k\alpha_k/(k - \alpha_k)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k\alpha_k/(k - \alpha_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\alpha_k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим случай, когда $1/r_k = o(k^2)$ при $k \rightarrow \infty$.

Это означает, что для некоторой последовательности $\alpha_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ выполняется равенство $r_k = \alpha_k/k^2$. Поскольку $r_k \leq 1/(k-1)$, достаточно рассмотреть два подслучая: $\alpha_k \sim ck$, где c — константа, не превышающая 1, и $\alpha_k = o(k)$. В первом подслучае

$$f(k, r_k) = \left(1 - \frac{(k-1)\alpha_k}{k^2}\right)^k \sim \left(1 - \frac{c(k-1)k}{k^2}\right)^k = o(1).$$

Так как во втором подслучае $(k-1)\alpha_k/k = o(k)$, согласно (1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k, r_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(k-1)\alpha_k}{k^2}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-(k-1)\alpha_k/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\alpha_k} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда $1/r_k \sim ck^2$ при $k \rightarrow \infty$, где c — постоянная.

Поскольку $(k-1)/ck = o(k)$, согласно (1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k, r_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k-1}{ck^2}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-(k-1)/(ck)} = e^{-1/c}.$$

И наконец, рассмотрим случай, когда $k^2 = o(1/r_k)$ при $k \rightarrow \infty$.

Это означает, что для некоторой последовательности $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ выполняется равенство $r_k = \alpha_k/k^2$. Поскольку $(k-1)\alpha_k/k = o(k)$, согласно (1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k, r_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(k-1)\alpha_k}{k^2}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-(k-1)\alpha_k/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\alpha_k} = 1.$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Обозначим через $F(x)$ функцию распределения случайной величины $d(\xi_1, \dots, \xi_k)$.

$$F(x) = \mathbf{P}(d(\xi_1, \dots, \xi_k) < x) = 1 - \mathbf{P}(d(\xi_1, \dots, \xi_k) \geq x) = 1 - f(k, x).$$

Тогда так как при $x \leq 0$ $F(x) = 0$, а при $x \geq 1/(k-1)$ $F(x) = 1$, используя формулу интегрирования по частям, нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \bar{d}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_0^{1/(k-1)} x dF(x) = xF(x) \Big|_0^{1/(k-1)} - \int_0^{1/(k-1)} F(x) dx \\ &= \int_0^{1/(k-1)} f(k, x) dx = \int_0^{1/(k-1)} (1 - (k-1)x)^k dx = \frac{1}{k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Тем самым теорема 3 доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

1. Кнут Д., *Искусство программирования для ЭВМ. Сортировка и поиск*, т. 3. Мир, Москва, 1978.
2. Мальцев А.И., *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1986.
3. Ершов А.П., О программировании арифметических операторов. *Докл. АН СССР* (1958) **118**, 427–430.
4. Гасанов Э.Э., Мгновенно решаемые задачи поиска. *Дискретная математика* (1996) **8**, №3, 119–134.
5. Гасанов Э.Э., *Функционально-сетевые базы данных и сверхбыстрые алгоритмы поиска*. Изд. центр РГГУ, Москва, 1997.
6. Devroye L. Upper and lower class sequences for minimal uniform spacings. *Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* (1982) **61**, № 2, 237–254.
7. Дейвид Г., *Порядковые статистики*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 16.10.1998.

Переработанный вариант поступил 22.07.1999.