Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Ильичев, О. А. Ильичева, Знак-инвариантные структуры матриц и дискретные модели, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 89–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:50:56

Знак-инвариантные структуры матриц и дискретные модели

© 1999 г. В. Г. Ильичев, О. А. Ильичева

Рассмотрено асимптотическое поведение линейных дискретных систем, задаваемых неположительными так называемыми NZ -матрицами. Определены знаковые структуры таких матриц (знак-инвариантные и пульсары), при которых, соответственно, возникает нетривиальное равновесие или периодический режим. Приведено приложение знак-инвариантных матриц к анализу глобальной динамики нелинейных неавтономных моделей конкуренции.

1. Введение

Матричные модели являются не только вспомогательным средством для анализа нелинейных систем, но могут выступать в качестве самостоятельных моделей [1–3]. В качестве иллюстрации рассмотрим и обсудим модель

$$X^{t+1} = AX^t \quad (1)$$

процесса обмена и эволюции мнений участников некоторой социальной группы (присяжные заседатели в суде, парламент и т. д.). Каждая компонента вектора $X = (x_1, \dots, x_n)$ представляет собой число из интервала $[0, 1]$ и характеризует мнение отдельного члена группы. Так в группе присяжные заседатели $x_i = 1$ означает, что с точки зрения i -го заседателя вина подсудимого абсолютно доказана, а $x_i = 0$ соответствует невинности обвиняемого.

Далее, согласно [1] элементы a_{ij} интерпретируются как степень влияния j -го участника группы на i -го, при этом $a_{ij} \geq 0$. Данное условие неявно подразумевает дружеское отношение каждого к каждому. Однако в реальных коллективах такое всеобщее благодушие далеко не всегда имеет место и поэтому ниже будем считать, что некоторые элементы матрицы являются отрицательными.

Здесь естественно предположить, что суммарное влияние всех участников группы на одного не превосходит 1, т. е.

$$|a_{i1}| + \dots + |a_{in}| \leq 1 \quad (2)$$

для всех $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что данный класс матриц замкнут относительно операции умножения. В этой связи удобно считать, что все компоненты вектора X расположены в интервале $[-1, 1]$.

При исследовании модели (1) решающее значение имеет поведение предельной матрицы A^∞ . Оказывается, наиболее простая ситуация возникает, когда среди элементов каждой матрицы $A, A^2, \dots$ нет нулей. Такие матрицы A будем называть NZ -матрицами. В данной работе будут определены основные типы поведения A^∞ , которые во многом зависят от знаковой структуры исходной NZ -матрицы A .

2. NZ -матрицы в семействе всех матриц

Пусть выбрана некоторая матрица $A = (a_{ij})$, в которой существуют положительные и отрицательные элементы. Не вполне ясно, как установить, является ли она NZ -матрицей. Поэтому целесообразно рассмотреть обратную задачу: разработать достаточно общую схему построения неположительных NZ -матриц.

Обозначим через $P_{ijk}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ — элемент матрицы A^k , лежащей на пересечении i -й строки и j -го столбца. Очевидно, P_{ijk} — однородный алгебраический полином степени k с целыми коэффициентами. Формально, для построения NZ -матрицы следует выбрать такие числа $\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$, чтобы одновременно выполнялись соотношения $P_{ijk}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \neq 0$ для всех i, j и k .

Напомним, что множество $\{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}\}$ является набором алгебраически независимых чисел, если ни для какого ненулевого полинома P с целыми коэффициентами не может выполняться равенство $P(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}) = 0$ [4]. Отсюда получаем один из механизмов построения NZ -матриц размера $n \times n$.

Предложение 1. Если $\{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}\}$ — алгебраически независимые числа, то $A = (a_{ij})$ является NZ -матрицей.

Приведенная конструкция позволяет сразу установить существование A и A^{-1} , которые одновременно оказываются NZ -матрицами.

Ясно, что семейство NZ -матриц всюду плотно в пространстве всех матриц. Здесь возникает вопрос: образуют ли NZ -матрицы открытое множество? Оказывается, уже для матриц 2×2 ответ, вообще говоря, отрицательный.

Предложение 2. Существуют NZ -матрицы, которые не являются внутренними точками семейства NZ -матриц.

Действительно, приведем пример такой пограничной матрицы. Рассмотрим композицию двух простых отображений: гомотетии с коэффициентом $1/2$ и поворота плоскости на угол φ . Этому сложному отображению соответствует матрица $A(\varphi) = \frac{1}{2}B(\varphi)$, в которой

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\varphi) & -\sin(2\pi\varphi) \\ \sin(2\pi\varphi) & \cos(2\pi\varphi) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Очевидно, $A(\varphi)$ относится к классу матриц (2) и для всех натуральных n выполняется соотношение $A^n(\varphi) = (1/2^n)B(n\varphi)$. Если φ — иррациональное число, то $A(\varphi)$ является NZ -матрицей. Возьмем малую окрестность $A(\varphi)$, это набор таких матриц, элементы которых близки к соответствующим элементам $A(\varphi)$. Выберем ω , близкое к φ такое, чтобы ω было рациональным числом. Тогда, с одной стороны, матрица $A(\omega)$ будет находиться в окрестности $A(\varphi)$, а с другой, некоторая степень $A(\omega)$ будет содержать нулевые элементы, и значит $A(\omega)$ не является NZ -матрицей.

В качестве противовеса к данному предложению в разделе 4 будут описаны некоторые достаточно большие куски семейства NZ -матриц, состоящие сплошь из внутренних точек.

3. Умирующие NZ -матрицы

Сумму модулей элементов i -й строки матрицы A обозначим через

$$S(i, A) = |a_{i1}| + \dots + |a_{in}|.$$

Теперь условие (2) эквивалентно тому, что $S(i, A) \leq 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Будем называть i -ю строку слабой при $S(i, A) < 1$ и сильной при $S(i, A) = 1$. Непосредственно проверяется, что слабость заразительна.

Лемма 1. Пусть матрица A имеет хотя бы одну слабую строку, тогда в A^2 все строки слабые.

Введем несколько печальное определение: матрица A — умирающая, если A^n сходится к нулевой матрице при $n \rightarrow \infty$. Укажем достаточный признак умирающей матрицы.

Предложение 3. Пусть у матрицы A есть хотя бы одна слабая строка, тогда A — умирающая.

Доказательство. Действительно, в силу леммы 1, у матрицы A^2 все строки слабые. Поэтому существует универсальная константа γ из (1), которая мажорирует каждую сумму $S(i, A^2)$. Следовательно, для всех n и i получаем $S(i, A^{2n}) \leq \gamma^n$. Отсюда находим, что $A^{2n} \rightarrow 0$, и, значит, $A^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

4. Живучие NZ -матрицы

Когда динамика социальной группы описывается умирающей матрицей (A), то все ее члены приходят к единому мнению, т. е. $x_1 = \dots = x_n = 0$. Теперь найдем условия, при которых A^∞ не равняется нулевой матрице. Такие матрицы будем в дальнейшем называть живучими. Согласно предложению 3 живучая матрица может содержать только сильные строки, т. е.

$$S(i, A) = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Соотношение (4) является лишь необходимым. Решающую роль здесь играет знаковая структура матрицы A . Так, рассмотрим матрицу $B = A^2$ и воспользуемся формальным выражением

$$S(k, B) \leq |a_{k1}|S(1, A) + \dots + |a_{kn}|S(n, A). \quad (5)$$

Из живучести матрицы A находим, что для всех k правая часть (5) равна 1. Поскольку матрица B также обязана быть живучей, то $S(k, B) = 1$ для всех k . Поэтому

соотношение (5) является равенством для всех k . Это возможно, когда в матрице B для каждого элемента b_{kl} выполняется условие

$$\left| \sum_j a_{kj} a_{jl} \right| = \sum_j |a_{kj} a_{jl}|. \quad (6)$$

В NZ -матрице A все элементы отличны от нуля, и поэтому слагаемые $\{a_{k1}a_{1l}, \dots, a_{kn}a_{nl}\}$ в сумме (6) должны быть одного знака. В частности, при $k = l$ в наборе

$$\{a_{k1}a_{1k}, \dots, a_{kk}^2, \dots, a_{kn}a_{nk}\}$$

будут находиться только положительные числа. Таким образом, установлено следующее необходимое условие.

Лемма 2. *Знаковая структура живучей матрицы симметрична, т. е.*

$$\text{sign}(a_{ij}) = \text{sign}(a_{ji}).$$

Каждой живучей матрице $A = (a_{ij})$ естественно сопоставить ее матричную знаковую структуру $S = (s_{ij})$ по правилу $s_{ij} = \text{sign}(a_{ij})$. В силу леммы 2 для матрицы S также должно выполняться свойство: при фиксированных k и l в наборе $\{s_{k1}s_{1l}, \dots, s_{kn}s_{nl}\}$ все числа являются 1 или все числа являются -1 . В частности, пусть задана знаковая структура первой строки матрицы S . Очевидно, она индуцирует знаковую структуру каждого столбца матрицы S и здесь возможны лишь два варианта:

- (1) элементы данного столбца совпадают с соответствующими элементами первой строки;
- (2) элементы данного столбца противоположны по знаку соответствующим элементам первой строки.

Приведенное свойство можно выразить кратко: каждый столбец коллинеарен первой строке. А поскольку матрица S симметрическая, значит, и ее строки попарно коллинеарны. Это обстоятельство позволяет определить все возможные структуры матрицы S . Для наглядности положим $n = 3$. Обозначим первую строку через (c_1, c_2, c_3) , где $c_i = \pm 1$ для всех i . Так как все строки коллинеарны первой, матрица S имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \varepsilon_2 c_1 & \varepsilon_2 c_2 & \varepsilon_2 c_3 \\ \varepsilon_3 c_1 & \varepsilon_3 c_2 & \varepsilon_3 c_3 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_2 = \pm 1$ и $\varepsilon_3 = \pm 1$. Ввиду симметрии S , элементы первого столбца равны соответствующим элементам первой строки. Поэтому сразу можно найти коэффициенты коллинеарности: $\varepsilon_2 = c_2/c_1$, и $\varepsilon_3 = c_3/c_1$. Подставим их в последнюю матрицу. С учетом тождеств $c_1^2 = 1$ и $c_i/c_j = c_1 c_j$ для всех i и j получаем, что

$$S = c_1 \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

При $c_1 = 1$ матрица S имеет вид $(c_i c_j)$. А при $c_1 = -1$ поменяем знак у всех остальных параметров (т. е. c_2 и c_3). Тогда матрица (7) преобразуется в матрицу $-(c_i c_j)$. По сути доказано следующее утверждение.

Лемма 3. Знаковая структура живучей матрицы имеет вид

$$S = \pm \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & \dots & c_1 c_n \\ c_2 c_1 & c_2^2 & \dots & c_2 c_n \\ & & \dots & \\ c_n c_1 & c_n c_2 & \dots & c_n^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $c_i = \pm 1$ для $i = 1, \dots, n$.

В дальнейшем знаковую структуру типа (8) будем называть правильной. Для произвольного n семейство таких матриц задается параметрами $(c_1, \dots, c_n)$. Сформулируем основной результат.

Предложение 4. NZ-матрица является живучей, если и только если одновременно выполняются два условия:

- (1) все ее строки сильные;
- (2) ее знаковая структура правильная.

Доказательство. Поскольку эти условия были получены как необходимые, остается показать их достаточность. Согласно второму условию данную матрицу можно представить в форме

$$A = \pm \begin{pmatrix} p_{11}c_1^2 & \dots & p_{1n}c_1c_n \\ & \dots & \\ p_{n1}c_nc_1 & \dots & p_{nn}c_n^2 \end{pmatrix},$$

где $p_{ij} > 0$ для всех i и j . А ввиду условия 1 для каждой i -й строки матрицы $P = (p_{ij})$ выполняется соотношение $p_{i1} + \dots + p_{in} = 1$. Возьмем диагональную матрицу D с элементами $(c_1, \dots, c_n)$. Очевидно, $D^2 = E$ (единичная матрица) и $A = \pm DPD$. Поэтому исследование A^∞ сводится к анализу P^∞ . Положительная матрица P относится (с точностью до транспонирования) к классу стохастических и поэтому существует P^∞ . При этом в предельной матрице все строки будут одинаковыми. Универсальную положительную строку обозначим через $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Следовательно, для исходной матрицы A получаем, что

$$A^\infty = \pm \begin{pmatrix} \alpha_1 c_1^2 & \dots & \alpha_n c_1 c_n \\ & \dots & \\ \alpha_1 c_n c_1 & \dots & \alpha_n c_n^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, матрица A является живучей. Предложение доказано.

Правильные знаковые структуры вида (8) будем обозначать соответственно через $\pm S(c_1, \dots, c_n)$. Отметим, что при $n = 2$ существуют только две знак-инвариантные структуры

$$S(1, 1) = S(-1, -1) = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}, \quad S(1, -1) = S(-1, 1) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые особенности матриц (8) в зависимости от их параметров $\{c_1, \dots, c_n\}$. При выборе знака плюс знаковая структура всех матриц $S, S^2, S^3, \dots$

одинакова. Такую знаковую структуру будем называть знак-инвариантной. Эти структуры играют важную роль в динамике эколого-экономических систем (см. ниже). А при выборе знака минус в последовательности $S, S^2, S^3, \dots$ происходит чередование (с периодом 2) знаковых структур. Здесь будем говорить, что знаковая структура является пульсаром.

Очевидно, матрицы с правильной знаковой структурой образуют открытые выпуклые множества в семействе всех матриц.

Для NZ -матриц A с неправильной знаковой структурой поведение соответствующей последовательности $\{S^k\}$ более разнообразно. Для демонстрации возможных здесь эффектов воспользуемся матрицей поворота $A(\varphi)$ (см. (3)).

Так, если φ рационально и равно p/q , то $\{S^k\}$ имеет период q .

А если φ иррационально, то покажем, что $\{S^k\}$ аperiодична. Действительно, рассмотрим определенный элемент матрицы (3), скажем, первый во второй строке $x_k = \text{sign}(\sin(2\pi\varphi k))$. С геометрической точки зрения $\sin(2\pi\varphi k)$ является проекцией на вертикальную ось точки $k\varphi$, отложенной на окружности единичного радиуса. Очевидно, $x_k = 1$ соответствует точке $2\pi\varphi k$, лежащей на верхней полуокружности. Теперь достаточно установить, что $\{x_k\}$ образует аperiодическую последовательность. Предположим противное: для всех больших k последовательность $\{x_k\}$ периодическая и пусть натуральное T — ее период. Значит, для большого N все числа $x_N, x_{N+T}, \dots, x_{N+kT}, \dots$ одного знака, например, положительные. В этом случае для всех k точки $\{2\pi\varphi N + 2\pi(\varphi T)k\}$ находятся на верхней полуокружности. Но с другой стороны, число φT также иррационально, и поэтому последовательность $\{2\pi\varphi N + 2\pi(\varphi T)k\}$ должна плотно заполнять всю окружность [5]. Получили противоречие.

Приведем важное дополнение к предложению 4. Пусть в NZ -матрице A все строки сильные, но ее знаковая структура неправильная. Тогда A^2 будет содержать слабую строку и значит A является умирающей. Теперь полностью описаны умирающие NZ -матрицы, они характеризуются наличием слабой строки или неправильной знаковой структурой.

Пусть динамика мнений задается живучей NZ -матрицей. Что можно сказать о финальном распределении мнений членов группы?

Рассмотрим сначала случай, когда матрица A имеет знак-инвариантную структуру. Для наглядности возьмем пример, в котором $c_1 = \dots = c_k = 1$ и $c_{k+1} = \dots = c_{k+m} = -1$ (это не ограничивает общности рассуждений). Тогда знаковая структура матрицы A представляется в блочной форме

$$\begin{pmatrix} I_{kk} & -I_{mk} \\ -I_{km} & I_{mm} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где I_{ij} — матрица размера $i \times j$, состоящая из одних единиц. Согласно [1] каждой матрице можно сопоставить свой знаковый граф Γ , в котором ребро, соединяющее вершины i и j , имеет знак $\text{sign}(a_{ji})$. В знаковом графе предполагается, что $\text{sign}(a_{ji}) = \text{sign}(a_{ij})$ для всех i и j . Здесь оказывается, что множество вершин полного графа Γ можно разбить на две непересекающиеся партии Γ_1 (первые k участников) и Γ_2 (остальные m участников), связанные отношениями:

- (д) вершины каждой партии дружат между собой, т. е. соединены положительными ребрами;

Рис. 1.

- (в) вершины из разных партий враждуют между собой, т.е. соединены отрицательными ребрами.

Такие графы принято называть двухпартийными (см. рис.1(а)). Они играют важную роль в теории так называемых сбалансированных графов. Напомним, что знаковый граф называется сбалансированным, если количество отрицательных ребер в любом его цикле четно. Предполагают, что сбалансированные графы характеризуют устойчивые социальные группы. Здесь основной результат принадлежит Харари [1]: граф сбалансирован тогда и только тогда, когда он допускает двухпартийную структуру.

Используя развитую выше партийную интерпретацию знак-инвариантной структуры матрицы (10), получаем: члены первой партии приходят к одному устойчивому мнению M_1 , а члены второй партии к противоположному $M_2 = -M_1$.

Таким образом, установлено: устойчивое неоднородное мнение может возникнуть лишь в сбалансированных социальных группах.

Обсудим еще один любопытный аспект из жизни двухпартийных социальных групп. Здесь удобно считать, что матрица A задана в форме (9). Тогда параметр α_1 можно трактовать как долю влияния i -го участника на других. Пусть в начальный момент времени первые k участников принадлежат партии Γ_1 , а остальные Γ_2 . Каждый участник (например, 1) может определить свой (относительный) рейтинг в своей партии Γ_1 согласно формуле

$$r_1 = \alpha_1 / S(\Gamma_1),$$

где $S(\Gamma_1) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Данный участник может считать, что его относительный рейтинг в партии Γ_1 недостаточно высок, и поэтому, может быть, имеет смысл перейти в партию Γ_2 . В случае перехода относительный рейтинг участника 1 (принадлежащего уже партии Γ_2) будет равняться

$$r_1^* = \alpha_1 / S(\Gamma_2^*),$$

где $S(\Gamma_2^*) = \alpha_1 + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{k+m}$.

В этой связи назовем рейтинговым предательством переход участника из своей партии в другую, если его рейтинг при этом увеличивается (для участника 1 это означает $r_1^* > r_1$).

Пусть в результате рейтингового предательства участник 1 перешел во вторую партию, тогда в обеих партиях изменяются относительные рейтинги остальных участников. Поэтому у некоторых других участников возникает та же мысль о целесообразности перехода из своей партии в чужую и т. д. Здесь возникает задача о возможности реализации бесконечной (например, циклической) серии рейтинговых предательств. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. *Возможно лишь конечное число рейтинговых предательств.*

Доказательство. Пусть события осуществляются в дискретные моменты времени и в каждый момент t может реализоваться лишь один переход. Обозначим через Γ_1^t и Γ_2^t составы первой и второй партий, а через $S(\Gamma_1^t)$ и $S(\Gamma_2^t)$ соответствующие суммы абсолютных рейтингов участников в момент t . Очевидно, что в момент t происходит переход i -го участника из Γ_1 в Γ_2 при условии, что

$$\alpha_i + S(\Gamma_2^t) < S(\Gamma_1^t).$$

Аналогично, переход j -го участника из Γ_2 в Γ_1 возникает при условии, что

$$\alpha_i + S(\Gamma_1^t) < S(\Gamma_2^t).$$

Теперь определим функцию $\Delta_t = |S(\Gamma_1^t) - S(\Gamma_2^t)|$. Покажем, что $\Delta_{t+1} < \Delta_t$, если в момент t происходит рейтинговое предательство. Здесь, в силу симметрии, достаточно рассмотреть переход (например, первого) участника из Γ_1 в Γ_2 , который, напомним, реализуется при условии $\Delta_t = S(\Gamma_1^t) - S(\Gamma_2^t) > \alpha_1$. Далее, после перехода

$$S(\Gamma_1^{t+1}) = S(\Gamma_1^t) - \alpha_1, \quad S(\Gamma_2^{t+1}) = S(\Gamma_2^t) + \alpha_1.$$

Значит, $\Delta_{t+1} = |\Delta_t - 2\alpha_1|$. Из неравенств $\Delta_t > \alpha_1 > 0$ легко получаем требуемое неравенство $\Delta_{t+1} < \Delta_t$. Далее, поскольку функция Δ может принимать лишь конечное число значений, ее строгое убывание не может продолжаться сколь угодно долго. Следовательно, процесс рейтинговых предательств останавливается за конечное время.

Пусть теперь знаковая структура матрицы A — пульсар. Здесь диагональ A отрицательна, и поэтому каждый участник группы отрицательно влияет сам на себя. Тогда опять-таки все (сплошь неуверенные в себе) участники разбиваются на две партии (члены одной партии имеют всегда одинаковое мнение — мнение партии), но в каждый следующий момент времени мнение партии меняется на прямо противоположное.

Отметим, что в реальных ситуациях граф отношений может быть неполным, т. е. $a_{ij} = 0$ для некоторых i и j . Хотя соответствующая матрица A не является NZ -матрицей, однако некоторая ее степень уже может оказаться знак-инвариантной структурой, например,

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.

Легко убедиться, что при $k \geq 2$ знаковая структура A^k имеет вид $S(1, 1, -1)$. Опишем класс знак-симметричных ($\text{sign}(a_{ij}) = \text{sign}(a_{ji})$) матриц, степени которых поглощаются некоторой знак-инвариантной структурой.

Пусть среди элементов матрицы A содержатся нули, тогда соответствующий ей граф Γ неполный (т. е. между некоторыми вершинами отсутствуют ребра). Для такого графа также можно говорить о его двухпартийности, если выполняются свойства (д) и (в) для вершин, связанных ребрами (см. рис. 1(b)). Напомним также, что граф называется сильно связным, когда любые его две вершины могут быть соединены некоторым путем.

Предложение 6. Пусть граф матрицы A

- (1) *двухпартийный и сильно связный*
- (2) *и хотя бы одна из его вершин содержит петлю.*

Тогда все достаточно большие степени A принадлежат одной и той же знак-инвариантной структуре.

Доказательство. Обозначим через Γ граф матрицы $A = (a_{ij})$. Величину a_{ij} будем называть весом ребра $j \rightarrow i$.

Пусть вершина 1 имеет петлю (см. рис. 2). Поскольку граф Γ сильно связный, из 1 к каждой вершине i ведет путь длины L_i . В силу знаковой симметрии A имеется и путь из i в 1 длины L_i . Положим

$$N = \max_{i>1, j>1} (L_i + L_j).$$

Установим, что между любыми вершинами i и j имеется путь длины N . Действительно, построим сначала путь $i \rightarrow \dots \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow j$, длина которого равна $m = L_i + L_j$. Если $m = N$, то все доказано. А когда $m < N$, тогда требуемый путь получается из предыдущего добавлением $N - m$ петель вокруг 1.

Напомним, что для каждого пути из i в j можно определить его вес, равный произведению весов его ребер. Пусть $k \geq N$ и рассмотрим A^k , элементы которой обозначены через (a_{ij}^k) . Величина (a_{ij}^k) равна сумме весов всех путей длины k , ведущих из j в i . Здесь возможны два случая:

- (д) вершины i и j принадлежат одной партии. Тогда, в силу двухпартийности Γ , любой такой путь содержит четное число отрицательных ребер. Значит знак любого пути положителен и поэтому a_{ij}^k тоже положительно;
- (в) вершины i и j находятся в разных партиях. Аналогично, здесь любой путь содержит нечетное число отрицательных ребер. Поэтому a_{ij}^k отрицательно.

Следовательно, матрица A^k не содержит нулей, а соответствующий ей полный граф является двухпартийным. Поэтому A^k обладает знак-инвариантной структурой.

5. Знак-инвариантные матрицы и наследуемые свойства динамических систем

В прикладных задачах часто возникает необходимость в исследовании динамики нелинейных неавтономных дискретных систем вида

$$\begin{aligned}x_1^{t+1} &= f_1(x_1^t, \dots, x_n^t, t), \\&\dots \\x_n^{t+1} &= f_n(x_1^t, \dots, x_n^t, t),\end{aligned}\tag{11}$$

здесь все f_i , $i = 1, \dots, n$, — гладкие функции. Пусть коэффициенты этих функций зависят от времени t периодическим образом,

$$f_i(x_1, \dots, x_n, t) = f_i(x_1, \dots, x_n, t + T),$$

где T — период, являющийся натуральным числом. Кроме того считаем, что $\partial f_i / \partial x_j$ знакопостоянна (т. е. не меняет своего знака) в $\mathbf{R}^n$ для всех i, j, t . Например, для конкурентов $\{x_i\}$ биологической или экономической системы, как правило, производная по своей переменной положительна ($\partial f_i / \partial x_i > 0$), а по чужой отрицательна ($\partial f_i / \partial x_j < 0$ при $i \neq j$).

Для матрицы $D(f^t) = (\partial f_i / \partial x_j)$, дифференциала оператора (11) в точке $(x_1^t, \dots, x_n^t, t)$, через

$$D^*(f^t) = (\text{sign}(\partial f_i / \partial x_j)) = s_{ij}$$

обозначим знак-матрицу $D(f^t)$. Согласно сказанному $D^*(f^t)$ не зависит от t и описывает качественные свойства монотонности близкодействующей системы (11):

- (1) $s_{ij} = 1$ означает, что x_i^{t+1} возрастает при увеличении x_j^t ;
- (2) $s_{ij} = -1$ означает, что x_i^{t+1} убывает при увеличении x_j^t .

Далее, производя T раз композицию системы (11), определим формально новую, дальноедействующую, систему с шагом, равным T :

$$\begin{aligned}x_1^{t+T} &= F_1(x_1^t, \dots, x_n^t), \\&\dots \\x_n^{t+T} &= F_n(x_1^t, \dots, x_n^t).\end{aligned}\tag{12}$$

Для краткости будем задавать (12) в векторной форме $X^{t+T} = F(X^t)$. Очевидно, F — дифференцируемое отображение $\mathbf{R}^n$ в себя.

Как правило, прямолинейное исследование (12) невозможно и здесь актуальна проблема, какие свойства (11) наследуются системой (12)? Например, представляет интерес реакция x_i^{t+T} на изменение x_j^t , т. е. величина $\partial x_i^{t+T} / \partial x_j^t$, которая является элементом дифференциала $D(F)$ отображения (12). Обозначим через $D^*(F)$ знак-матрицу $D(F)$, которая также характеризует качественные свойства монотонности отображения F .

Поскольку оператор F является композицией T операторов $f^1, \dots, f^T$, матрица $D^*(F)$ оказывается произведением соответствующих матриц $D^*(f^1), \dots, D^*(f^T)$. Пусть все $D^*(f^t)$ принадлежат одной и той же знак-инвариантной структуре S . Самое главное, множество матриц такого типа замкнуто относительно операции умножения (т. е. семейство матриц типа S — полугруппа с операцией умножение). Поэтому и $D^*(F)$ имеет ту же знаковую структуру.

Данные соображения полезны и при исследовании непрерывных моделей. Так, рассмотрим динамику двух конкурентов x_1 и x_2

$$x_1 = f_1(x_1, x_2, t), \quad x_2 = f_2(x_1, x_2, t), \quad (13)$$

где конкурентное взаимодействие характеризуется соотношениями $\partial f_1 / \partial x_2 < 0$ и $\partial f_2 / \partial x_1 < 0$ для всех x_1, x_2, t . Среда предполагается периодической (T — период), поэтому правые части (13) удовлетворяют условию $f_i(x_1, x_2, t) = f_i(x_1, x_2, t+T)$ для всех x_1, x_2, t и $i = 1, 2$.

Пусть при любых положительных начальных условиях (x_1^0, x_2^0) решение (13) существует и продолжается вперед неограниченно. Тогда определено гладкое отображение Пуанкаре (т. е. сдвиг по траекториям (13) за время T)

$$P: (x_1^0, x_2^0) \rightarrow (x_1^T, x_2^T),$$

которое по координатам имеет вид

$$x_i^T = P_i(x_1^0, x_2^0), \quad i = 1, 2.$$

Предложение 7. Каждая функция P_i , $i = 1, 2$, строго возрастает по своей переменной x_i^0 и строго убывает по чужой переменной.

Доказательство. Выберем $h = T/n$. Величина h мала, если n велико. Пусть p_{k+1} представляет собой локальное сдвиг-отображение, индуцированное системой (13), за время $[kh, kh+h]$. При малых h

$$\begin{aligned} x_1^{t+h} &= x_1^t + h f_1(x_1^t, x_2^t, t) + o(h), \\ x_2^{t+h} &= x_2^t + h f_2(x_1^t, x_2^t, t) + o(h). \end{aligned}$$

В этом случае знаковая структура каждого дифференциала p_k

$$Dp_k = \begin{pmatrix} 1 + h \partial f_1 / \partial x_1 & h \partial f_1 / \partial x_2 \\ h \partial f_2 / \partial x_1 & 1 + h \partial f_2 / \partial x_2 \end{pmatrix} + o(h)$$

имеет вид $S(1, -1)$ и, значит, является знак-инвариантной.

Покажем, что знаковая структура DP также имеет вид $S(1, -1)$. Применим Больцановскую схему рассуждений, основанную на процедуре деления отображения пополам. А именно, предположим противное: знаковая структура P не относится к типу $S(1, -1)$.

Тогда представим плохое P как композицию Q_1Q_2 двух отображений, которые определяются следующим образом:

(1) Q_1 есть сдвиг-отображение за время $[0, T/2]$;

(2) Q_2 есть сдвиг-отображение за время $[T/2, T]$.

Очевидно, матрица DP является произведением матриц DQ_1 и DQ_2 . Поэтому хотя бы у одной из матриц DQ_1 или DQ_2 знаковая структура оказывается плохой, т.е. не относится к типу $S(1, -1)$ в некоторой точке $\mathbf{R}_+^2$. Ясно, что процесс выбора плохой матрицы можно продолжать сколь угодно долго. Значит существует достаточно малый временной интервал $[t, t+h]$, на котором сдвиг-отображение Q^* является плохим. При малых h

$$Q_1^*(x_1, x_2) = x_1 + hx_1f_1(x_1, x_2, t) + o(h),$$

$$Q_2^*(x_1, x_2) = x_2 + hx_2f_2(x_1, x_2, t) + o(h).$$

Но нетрудно убедиться, что знаковая структура DQ^* имеет хороший вид $S(1, -1)$. Возникает противоречие.

Установленное свойство монотонности оператора P позволяет достаточно полно провести анализ конкуренции в переменной среде с помощью известных геометрических методов нелинейного анализа [6].

В заключение резюмируем основные результаты статьи.

Исследован класс матриц со знак-инвариантной структурой. Если динамика мнений коллектива описывается знак-инвариантной матрицей, то коллектив распадается на две партии и каждая партия приходит к своему мнению.

Знак-инвариантные матрицы каждого класса образуют полугруппу по умножению. Это позволяет наследовать глобальному отображению Пуанкаре локальные свойства нелинейных динамических систем, описывающих конкуренцию в периодической среде.

Список литературы

1. Робертс Ф.С., *Дискретные математические модели с приложением к социальным, биологическим и экологическим задачам*. Наука, Москва, 1986.
2. Кемени Дж., Снелл Дж., *Конечные цепи Маркова*. Наука, Москва, 1970.
3. Ицкович И.А., *Анализ линейных экономико-математических моделей*. Наука, Новосибирск, 1976.
4. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б., *Введение в теорию чисел*. Изд-во МГУ, Москва, 1984.
5. Арнольд В.И., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Наука, Москва, 1984.
6. Опойцев В.И., *Нелинейная системостатика*. Наука, Москва, 1986.

Статья поступила 09.09.1997.