Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Куропаткин, Вероятности событий, связанных с общими предками двух вершин в обобщенной модели рекурсивных деревьев, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 58–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:11:11

Вероятности событий, связанных с общими предками двух вершин в обобщенной модели рекурсивных деревьев

© 1999 г. Д. А. Куропаткин

Случайное дерево T_n с n вершинами и $n - 1$ ребрами называется обобщенным рекурсивным, если либо $n = 1$, либо $n > 1$ и T_n получается присоединением n -й вершины к какой-либо вершине случайного рекурсивного дерева T_{n-1} . При этом вероятность выбора конкретной вершины определяется некоторой последовательностью $\{\alpha_i: \alpha_i > 0\}_{i=1}^{\infty}$. В настоящей работе исследуются вероятности некоторых событий, касающихся общих предков вершин с произвольными номерами.

1. Введение

Рекурсивные деревья являются одним из интересных и хорошо изученных классов помеченных деревьев (см., например, [1–3]). В работе [1] была предложена модель случайных рекурсивных деревьев, которая обобщает ранее известные конструкции. Построение интересующих нас случайных деревьев T_n с n вершинами, $n \geq 1$, производится по последовательности

$$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i > l,$$

следующим образом. При $n = 1$ дерево T_n состоит из изолированной вершины (корня) с меткой 1. Пусть теперь $n > 1$ и дерево T_{n-1} построено. Положим

$$S_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad k \geq 1, \quad P_n^k = \frac{\alpha_k}{S_{n-1}} \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Выберем из множества $\{1, 2, \dots, n-1\}$ случайно некоторое число ξ с законом распределения $\mathbf{P}\{\xi = k\} = P_n^k$ и соединим ребром вершину n с вершиной ξ . Полученное таким образом дерево и будет интересующим нас случайным рекурсивным деревом T_n с n вершинами.

Если все α_i равны одной и той же постоянной, то мы приходим к обычной (равномерной) модели рекурсивных деревьев. Примеры использования случайных рекурсивных деревьев можно найти в [2, 3].

Для любых $1 \leq k < n$ определим случайные величины J_k^n следующим образом:

$$J_k^n = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } k \text{ лежит на пути из корня в вершину } n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим для простоты

$$P_k(n, m) = \mathbf{P}\{J_k^n J_k^m = 1\}, \quad 1 \leq k < m < n.$$

Заметим, что в работе [1] была сделана попытка найти вероятность $P_k(n, m)$, но в рассуждениях вкралась ошибка. Укажем на нее.

Будем использовать обозначения из [1]. Под T_{m-1}^k понимается поддерево T_{m-1} , корнем которого является вершина k . Пусть

$$\alpha(T_{m-1}^k) = \sum_{\nu_i \in T_{m-1}^k} \alpha_i,$$

где ν_i — вершина с номером i . В [1] при нахождении $P_k(n, m)$ используется равенство

$$\mathbf{E}[\alpha(T_m^k) \mid J_k^m = 1] = \alpha_m + \mathbf{E}\alpha(T_{m-1}^k), \quad (1)$$

которое не поясняется и не доказывается. Покажем на примере, что оно не верно.

Пример 1. Пусть $\alpha_i = 1$ для любого $i \in \mathbf{N}$, k — произвольное целое положительное число, $m = k + 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\alpha(T_m^k) \mid J_k^m = 1] &= \sum_x x \mathbf{P}\{\alpha(T_m^k) = x \mid J_k^m = 1\} \\ &= \sum_x \frac{x \mathbf{P}\{\alpha(T_m^k) = x, J_k^m = 1\}}{\mathbf{P}\{J_k^m = 1\}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где суммирование ведется по всем значениям x , которые принимает $\alpha(T_m^k)$.

В нашем случае из (2) с учетом соотношения

$$\mathbf{P}\{J_k^m = 1\} = \frac{\alpha_k}{S_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

(см. [1]), следует, что

$$\mathbf{E}[\alpha(T_{k+2}^k) \mid J_k^{k+2} = 1] = 3 \frac{2}{k(k+1)} k + 2 \frac{k-1}{k(k+1)} k = \frac{2(k+2)}{k+1}.$$

Применяя аналогичные рассуждения, находим, что

$$1 + \mathbf{E}\alpha(T_{k+1}^k) = 1 + \sum_y y \mathbf{P}\{\alpha(T_{k+1}^k) = y\} = 1 + \frac{2}{k} + \frac{k-1}{k} = \frac{2k+1}{k}.$$

Однако

$$\frac{2(k+2)}{k+1} \neq \frac{2k+1}{k},$$

что опровергает (1).

2. Нахождение $P_k(n, m)$

В данном разделе мы исправляем неточность, допущенную в [1], и доказываем следующее утверждение.

Теорема 1. Для любых $1 \leq k < m < n$

$$P_k(n, m) = \frac{\alpha_k}{S_k} \left(1 - \frac{S_{k-1}}{S_{k+1}} \prod_{j=k+2}^m \left(1 - \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{S_j} \right) \right). \quad (3)$$

Замечание 1. Ясно, что если α_j есть одна и та же постоянная для всех j , $j \in \{k+2, \dots, m\}$, то

$$P_k(n, m) = \frac{\alpha_k}{S_k} \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_k}{S_{k+1}}.$$

Если α_j есть одна и та же постоянная для всех $j \in \mathbf{N}$, то

$$P_k(n, m) = \frac{2}{k(k+1)}.$$

Вероятность $P_k(n, m)$ не зависит от параметра n .

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для $1 \leq k < m < n$

$$P_k(n, m) = \sum_{i=m+1}^{n-1} P_k(i, m) \frac{\alpha_i}{S_{n-1}} + \frac{\alpha_m}{S_{n-1}} \frac{\alpha_k}{S_k} + \sum_{i=k+1}^{m-1} P_k(m, i) \frac{\alpha_i}{S_{n-1}} + \frac{\alpha_k}{S_{n-1}} \frac{\alpha_k}{S_k}. \quad (4)$$

Доказательство. Назовем вершину i ближайшим предком вершины n , если вершина n непосредственно присоединяется к вершине i . Равенство (4) является формулой полной вероятности, где сумма берется по всем возможным ближайшим предкам вершины n . Если i — ближайший предок вершины n , то искомая вероятность равна произведению

$$\mathbf{P}\{k \text{ лежит на пути из } m \text{ в } i\} P_n^i.$$

Тогда ясно, что в правой части равенства (4) первая сумма соответствует значениям $i \in \{m+1, \dots, n-1\}$, следующее слагаемое соответствует $i = m$, вторая сумма соответствует $i \in \{k+1, \dots, m-1\}$ и, наконец, последнее слагаемое получается при $i = k$. Лемма доказана.

Покажем теперь, что $P_k(n, m)$ не зависит от первого параметра. Обозначим для краткости $P_k(m+1, m)$ через $P_k(m)$.

Лемма 2. Для любых $1 \leq k < m < n$

$$P_k(n, m) = P_k(m). \quad (5)$$

Доказательство. Используя (4), находим, что

$$\begin{aligned} P_k(n+1, m) &= \frac{1}{S_n} \left(P_k(n, m) \alpha_n + \sum_{i=m+1}^{n-1} P_k(i, m) \alpha_i + \frac{\alpha_m \alpha_k}{S_k} + \sum_{i=k+1}^{m-1} P_k(m, i) \alpha_i + \frac{\alpha_k^2}{S_k} \right) \\ &= \frac{1}{S_n} (P_k(n, m) \alpha_n + S_{n-1} P_k(n, m)) = P_k(n, m). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно получаем (5). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя (5), преобразуем равенство (4). Получаем, что

$$\begin{aligned} S_{n-1} P_k(m) &= \sum_{i=m+1}^{n-1} P_k(m) \alpha_i + \sum_{i=k+1}^{m-1} P_k(i) \alpha_i + \frac{\alpha_k}{S_k} (\alpha_k + \alpha_m), \\ S_m P_k(m) &= \sum_{i=k+1}^{m-1} P_k(i) \alpha_i + \frac{\alpha_k}{S_k} (\alpha_k + \alpha_m). \end{aligned}$$

Используя последнюю формулу, вероятность $P_k(m+1)$ можно выразить через $P_k(m)$ при любом $m > k \geq 1$:

$$\begin{aligned} P_k(m+1) &= \frac{1}{S_{m+1}} \left(\sum_{i=k+1}^{m-1} P_k(i) \alpha_i + \frac{\alpha_k^2}{S_k} + P_k(m) \alpha_m + \frac{\alpha_k \alpha_{m+1}}{S_k} \right) \\ &= \frac{1}{S_{m+1}} \left(S_m P_k(m) - \frac{\alpha_k \alpha_m}{S_k} + P_k(m) \alpha_m + \frac{\alpha_k \alpha_{m+1}}{S_k} \right) \\ &= P_k(m) \left(1 - \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{S_{m+1}} \right) + \frac{\alpha_k}{S_k} \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{S_{m+1}}. \end{aligned}$$

С учетом очевидного равенства

$$P_k(k+2, k+1) = \frac{\alpha_k}{S_k} \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{S_{k+1}}$$

получаем, что для любого $m > k$

$$\begin{aligned} P_k(m) &= \frac{\alpha_k}{S_k} \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_k}{S_{k+1}} \prod_{i=k+2}^m \left(1 - \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{S_i} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_k}{S_k} \sum_{i=k+2}^m \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{S_i} \prod_{j=i+1}^m \left(1 - \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{S_j} \right). \end{aligned}$$

Здесь и далее считаем, что если в произведении нижний индекс больше верхнего, то произведение равно 1.

Преобразуем последнее выражение. Полагая

$$\Delta_i = \prod_{j=i}^m \left(1 - \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{S_j} \right),$$

находим, что

$$\Delta_{i+1} - \Delta_i = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{S_i} \prod_{j=i+1}^m \left(1 - \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{S_j}\right).$$

Следовательно,

$$P_k(m) = \frac{\alpha_k}{S_k} \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_k}{S_{k+1}} \Delta_{k+2} + (1 - \Delta_{k+2}) \frac{\alpha_k}{S_k} = \frac{\alpha_k}{S_k} \left(1 - \frac{S_{k-1}}{S_{k+1}} \Delta_{k+2}\right).$$

Доказательство закончено.

3. О расстоянии до ближайшего общего предка

Пусть, как и ранее, $1 \leq k < m < n$. Множество вершин, которые лежат и на пути от корня к вершине n и на пути от корня к вершине m не пусто. Вершину из этого множества с наибольшим номером будем называть ближайшим общим предком n и m . Вероятность того, что номер ближайшего общего предка не меньше k обозначим через $\tilde{P}_k(n, m)$.

Теорема 2. Для любых $1 \leq k < m < n$

$$\tilde{P}_k(n, m) = 1 - \prod_{j=k+2}^m \left(1 - \frac{\alpha_j \alpha_{j-1}}{S_j}\right) \left(1 - \frac{\alpha_{k+1}}{S_{k+1}} - \frac{\alpha_k^2}{S_k S_{k+1}}\right). \quad (6)$$

Замечание 2. Если при любом $j \in \{k+2, \dots, m\}$ все α_j равны одной и той же постоянной, то

$$\tilde{P}_k(n, m) = \frac{\alpha_{k+1}}{S_{k+1}} + \frac{\alpha_k^2}{S_k S_{k+1}}.$$

Если α_j есть одна и та же постоянная при всех $j \in \mathbf{N}$, то

$$\tilde{P}_k(n, m) = \frac{1}{k}.$$

Вероятность $\tilde{P}_k(n, m)$ не зависит от параметра n .

Пусть $q_k(m, n)$ есть вероятность того, что номер ближайшего предка вершин m и n равен k , где $k < m < n$.

Следствие 1. Для любых $1 \leq k < m < n$

$$q_k(m, n) = \alpha_k^2 \frac{S_{k+1} + \alpha_{k+1}}{S_k S_{k+1} S_{k+2}} \prod_{j=k+3}^m \left(1 - \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{S_j}\right).$$

Последняя формула вытекает из равенства

$$q_k(m, n) = \tilde{P}_k(m) - \tilde{P}_{k+1}(m).$$

Доказывать теорему 2 будем аналогично теореме 1. Все рассуждения идейно остаются такими же, поэтому приводить их не будем, а остановимся лишь на ключевых моментах и формулировках.

Лемма 3. Для любых $n > m > k \geq 1$

$$\tilde{P}_k(n, m) = \sum_{i=m+1}^{n-1} \tilde{P}_k(i, m) \frac{\alpha_i}{S_{n-1}} + \frac{\alpha_m}{S_{n-1}} + \sum_{i=k+1}^{m-1} \tilde{P}_k(m, i) \frac{\alpha_i}{S_{n-1}} + \frac{\alpha_k}{S_{n-1}} \frac{\alpha_k}{S_k}.$$

Лемма 4. Для любых $n > m > k \geq 1$

$$\tilde{P}_k(n, m) = \tilde{P}_k(m),$$

где по определению $\tilde{P}_k(n)$ есть $\tilde{P}_k(m+1, m)$.

Доказательство теоремы 2. Так же, как в теореме 1, получаем, что

$$\tilde{P}_k(m+1) = \tilde{P}_k(m) \left(1 - \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{S_{m+1}}\right) + \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{S_{m+1}}.$$

Учитывая, что

$$\tilde{P}_k(k+2, k+1) = \frac{1}{S_{k+1}} \left(\alpha_{k+1} + \frac{\alpha_k^2}{S_k} \right),$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(m) &= \frac{1}{S_{k+1}} \left(\alpha_{k+1} + \frac{\alpha_k^2}{S_k} \right) \prod_{j=k+2}^m \left(1 - \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{S_j} \right) \\ &\quad + \sum_{i=k+2}^m \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{S_i} \prod_{j=i+1}^m \left(1 - \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{S_j} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(m) &= \frac{1}{S_{k+1}} \left(\alpha_{k+1} + \frac{\alpha_k^2}{S_k} \right) \Delta_{k+2} + 1 - \Delta_{k+2} \\ &= 1 - \Delta_{k+2} \left(1 - \frac{\alpha_{k+1}}{S_{k+1}} - \frac{\alpha_k^2}{S_k S_{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

4. Расстояние между вершинами

Согласно [4], расстояние D_{mn} между вершинами m и n , $n > m$, равно числу ребер лежащих на пути, соединяющем эти вершины. В [1] было найдено математическое ожидание D_{mn} , но в приведенном доказательстве существенно использовалось неверное значение $P_k(n, m)$. Ввиду этого теорема 3.1 из [1] ошибочна. Следующее утверждение восполняет указанный пробел.

Теорема 3. Для любых $n > m \geq 1$

$$\mathbf{E}D_{mn} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{S_k} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha_k}{S_k} - 2 \frac{\alpha_m}{S_m} - 2 \sum_{k=2}^{m-1} \frac{\alpha_k}{S_k} \left(1 - \frac{S_{k-1}}{S_{k+1}} \prod_{j=k+2}^m \left(1 - \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{S_j} \right) \right).$$

Доказательство. Как и в [1], пусть

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} J_k^n$$

— число ребер на пути, соединяющем корень с вершиной n . Обозначим через H_{mn} число ребер, которые принадлежат и пути от корня до n , и пути от корня до m .

Очевидно, что

$$D_{mn} = (D_n - H_{mn}) + (D_m - H_{mn}).$$

Также ясно, что

$$H_{mn} = \sum_{k=2}^m J_k^n J_k^m,$$

где $J_m^m \equiv 1$. Учитывая, что

$$\mathbf{E} D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{S_k},$$

находим, что

$$\mathbf{E} D_{mn} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{S_k} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha_k}{S_k} - 2 \sum_{k=2}^{m-1} \mathbf{E} J_k^n J_k^m - 2 J_m^n.$$

Используя равенство $\mathbf{E} J_k^n J_k^m = P_k(n, m)$ и выражение для $P_k(n, m)$, получаем формулу, приведенную в формулировке теоремы. Доказательство закончено.

Если все α_j равны одной и той же постоянной при $j \in \mathbf{N}$ (что соответствует простым рекурсивным деревьям), то

$$\mathbf{E} D_{mn} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - 2 + \frac{1}{m}.$$

Полученное равенство согласуется с формулой (12) из [4].

Список литературы.

1. Shapiro A., A generalized distribution model for random recursive trees. *Acta Inform.* (1997) **34**, 211–216.
2. Gastwirth J.L., A probability model of a pyramid scheme. *Amer. Statistician* (1977) **31**, 79–82.
3. Moon J.W., The distance between nodes in recursive trees. *London Math. Soc. Lecture Notes* (1974) **13**, 125–132.
4. Dobrow R.P., On the distribution of distances in recursive trees. *J. Appl. Prob.* (1996) **33**, 749–757.

Статья поступила 25.08.1998.