Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 110–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:23:23

О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках

© 1999 г. С. С. Марченков

При любом $k, k \geq 2$, для множества функций k -значной логики вводятся три логико-функциональных языка: язык позитивной выразимости Pos_k , язык первой степени $1L_k$ и язык второй степени $2L_k$. На основе понятия выразимости в языке определяются соответствующие операторы замыкания. Доказывается, что операторы $1L_k$ -замыкания и $2L_k$ -замыкания совпадают. $1L_k$ -замкнутые и Pos_k -замкнутые классы характеризуются с помощью симметрических групп и симметрических полугрупп. Выразимость в языках $1L_k, \text{Pos}_k$ сравнивается с параметрической и термальной выразимостями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00989.

1. Введение

Автор посвящает эту работу светлой памяти Сергея Всеволодовича Яблонского.

Широко распространенным техническим приемом в математике является определение одних объектов через другие. Способы определения могут быть самыми разнообразными: теоретико-множественными, алгебро-логическими, интегро-дифференциальными и другими. В дискретной математике в этих целях в основном применяются алгебро-логические, логико-функциональные и комбинаторные средства. Если рассматривать функции многозначной логики, то известные в литературе способы представления одних функций через другие можно весьма условно разбить на две группы: в первой группе главную роль играют термальные (формульные) представления, во второй группе в основе лежат логические средства.

Для каждого из способов представления формулируется центральная проблема: найти условия, позволяющие для любых функции f и множества функций F решить, представима (выразима) ли функция f через функции множества F . Иногда ту же самую проблему формулируют несколько иначе: для любого множества F описать множество всех функций, представимых через функции множества F (замыкание множества F). В таком виде эта проблема превращается в проблему классификации функций многозначной логики (относительно выбранного способа представления функций).

Для функций многозначной логики наиболее распространенной является формульная представимость [1–3]. Соответствующая классификационная проблема полностью решена для множества P_2 булевых функций [4–6]. При $k \geq 3$ для множеств P_k функций k -значной логики решена лишь часть классификационной проблемы, относящаяся к определению предполных классов [1, 7–9]. Кроме того, существует простой алгоритм (см. [1]), который позволяет для произвольных функции f из P_k и конечного множества F функций из P_k ответить на вопрос, выражима ли функция f формулой через функции множества F . Вместе с тем результаты из [10] показывают, что для формульной выразимости функций классификационную проблему при $k \geq 3$ вряд ли удастся решить удовлетворительным образом, поскольку возникает континуальное число замкнутых классов.

В последнее время интенсивному исследованию подверглись такие формульные представления, где наряду с любой заданной функцией разрешается также использовать все двойственные (сопряженные) к ней функции, образованные для подстановок из некоторой группы G [11–22]. Оказалось, что если группа G достаточно велика (например, является полной симметрической группой $\mathcal{S}_k$ подстановок на множестве E_k или ее знакопеременной подгруппой), то соответствующая G -классификация конечна. В наиболее важном случае, случае группы $\mathcal{S}_k$, удается полностью и с различных позиций охарактеризовать все $\mathcal{S}_k$ -замкнутые классы и найти в них $\mathcal{S}_k$ -базисы [11–13, 16–19].

Гораздо меньше исследований посвящено представлениям, где основу составляют логические средства. В этом направлении отметим работы А.В. Кузнецова и его учеников [23–25], а также [26–29]. Отправляясь от работы [23], мы хотим рассмотреть вопрос о выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках.

Традиционную формульную выразимость функций в P_k можно рассматривать как термальную выразимость в языке $0L_k$, который содержит предметные переменные и счетное число функциональных констант для обозначения всех функций из P_k . Никакие логические символы в языке $0L_k$ не используются. Для получения более мощных средств выразимости язык $0L_k$ необходимо обогатить равенством, логическими связками и кванторами. При определении параметрической выразимости [23] к языку $0L_k$ добавляется равенство, конъюнкция и квантор существования. Соответствующий язык мы обозначаем через Par_k . Следующий шаг по линии усиления выразимости состоит в добавлении к языку Par_k дизъюнкции. Этот язык мы обозначаем через Pos_k . Расширение языка Pos_k за счет отрицания (либо квантора общности) приводит к языку $1L_k$, который имеет полную систему логических связей и оба квантора $\exists$ и $\forall$. Наконец, чтобы обозреть границы выразимости в классе логико-функциональных языков, мы определяем язык второй ступени $2L_k$, в котором по сравнению с языком $1L_k$ имеются дополнительно функциональные переменные и кванторы по функциональным переменным.

Введенные языки образуют возрастающую цепочку

$$0L_k \subset \text{Par}_k \subset \text{Pos}_k \subset 1L_k \subset 2L_k.$$

Возникает вопрос, каковы выразительные возможности языков этой цепочки. Необходимая информация о языке $0L_k$ приведена выше. Качественные изменения наблюдаются при переходе от языка $0L_k$ к языку Par_k . В [23] найдены все (их 25) параметрически замкнутые классы булевых функций, в [24] доказано, что число

параметрически замкнутых классов в P_3 конечно, в [29] аналогичное утверждение установлено при любом $k, k \geq 4$.

В настоящей работе мы изучаем выразимость в языках $\text{Pos}_k, 1L_k, 2L_k$. Доказано (теорема 1), что выразительные возможности языков $1L_k$ и $2L_k$ совпадают. При любом $k, k \geq 2$, в терминах функций с заданной группой автоморфизмов охарактеризованы все $1L_k$ -замкнутые классы (теоремы 2, 3). Указана процедура, позволяющая определить большинство Pos_k -замкнутых классов, и найдены нижняя и верхняя границы числа этих классов (теорема 5). Полученные результаты показывают, что выразительные возможности языков строго возрастают как при переходе от языка Pag_k к языку Pos_k , так и при переходе от Pos_k к $1L_k$.

2. Основные понятия

Пусть k — натуральное число, $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k — множество всех функций k -значной логики [1, 2], т.е. функций вида $f: E_k^n \rightarrow E_k$, $n = 1, 2, \dots$

Определим язык $0L_k$. Исходными символами языка $0L_k$ являются предметные переменные $x_1, x_2, \dots$, символы $f_i^{(n)}$ для обозначения n -местных функций k -значной логики, $1 \leq i \leq k^{k^n}$, $n = 1, 2, \dots$, левая и правая скобки и запятая. Обычным образом вводится понятие термина в языке $0L_k$: если $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ — предметные переменные (не обязательно различные), а $f_i^{(n)}$ — символ n -местной функции, то $f_i^{(n)}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ есть терм; если $t_1, \dots, t_m$ — термы либо предметные переменные, а $f_l^{(m)}$ — символ m -местной функции, то $f_l^{(m)}(t_1, \dots, t_m)$ также есть терм. Других термов в языке $0L_k$ нет.

По техническим причинам наряду с исходными обозначениями будем использовать также обозначения вида $x, y, z, f^{(n)}, g^{(n)}$, возможно, с нижними индексами. Если число переменных у функции определяется из контекста, то верхний индекс, указывающий на число переменных, будем опускать.

Всякий терм t языка $0L_k$ очевидным образом задает некоторую функцию φ из P_k . Если $g_1, \dots, g_r$ — все символы функций, входящих в терм t , то говорим, что терм t выражает функцию φ через функции $g_1, \dots, g_r$. (В теории функций многозначной логики термы принято называть формулами, терм, составленный из символов функций $g_1, \dots, g_r$, — формулой над множеством функций $\{g_1, \dots, g_r\}$, а функцию, выражаемую термом t через функции $g_1, \dots, g_r$, — функцией, реализуемой формулой t над множеством функций $\{g_1, \dots, g_r\}$ (см. [1, 2]).

Пусть $Q \subseteq P_k$. Говорим, что функция φ выражима через функции множества Q , если существует терм t , который построен из символов функций $g_1, \dots, g_r$, входящих в множество Q , и который выражает функцию φ через функции $g_1, \dots, g_r$. Множество всех функций, выражимых через функции множества Q , обозначаем через $0L_k[Q]$. Обычно множество $0L_k[Q]$ называют замыканием Q относительно операции суперпозиции [1, 2].

Перейдем к определению языка Pag_k , языка параметрической выразимости (ср. с [23]). К исходным символам языка $0L_k$ добавляем знак равенства $=$, логическую связку конъюнкция $\&$ и квантор существования $\exists$. Понятие термина в языке Pag_k отличается от соответствующего понятия в языке $0L_k$ только тем, что в языке Pag_k любая предметная переменная также считается термом. Если t_1, t_2 — термы языка Pag_k , то выражение $(t_1 = t_2)$ называется элементарной формулой. Из элементарных формул по обычным логическим правилам определяются остальные формулы языка

Pak_k . Именно, если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Pak_k , а x_i — предметная переменная, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$ и $(\exists x_i)\Phi_1$ — также формулы языка Pak_k . Понятия свободной и связанной переменных предполагаем известными.

Всякая формула языка Pak_k с m свободными переменными очевидным образом определяет некоторое m -местное отношение на E_k . Пусть $Q \subseteq P_k$, $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ — формула языка Pak_k со свободными переменными $x_1, \dots, x_m$, все функциональные символы которой суть обозначения функций из Q , и формула $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \dots, x_m)$ на E_k . В этом случае говорим, что формула $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ параметрически выражает отношение $\rho(x_1, \dots, x_m)$ через функции множества Q . Отношение ρ называем параметрически выразимым через функции множества Q , если существует формула, которая параметрически выражает отношение ρ через функции множества Q . Совокупность всех отношений, параметрически выразимых через функции множества Q , обозначаем через $\text{Pak}_k[Q]_R$. Множества вида $\text{Pak}_k[Q]_R$ называем параметрически замкнутыми классами отношений.

Понятие параметрической выразимости переносится с отношений на функции. Именно, если $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ — функция из P_k , а формула $\Phi(x_1, \dots, x_m, y)$ языка Pak_k параметрически выражает отношение $\varphi(x_1, \dots, x_m) = y$ через функции множества Q , то говорим, что формула Φ параметрически выражает функцию φ через функции множества Q . Совокупность всех функций, параметрически выразимых через функции множества Q , обозначаем через $\text{Pak}_k[Q]_F$ и называем параметрическим замыканием множества Q . Множества вида $\text{Pak}_k[Q]_F$ называем параметрически замкнутыми классами функций.

Язык Pos_k является расширением языка Pak_k : к исходным символам языка Pak_k добавляется логическая связка дизъюнкция $\vee$. Понятие термина в языке Pos_k совпадает с понятием термина в языке Pak_k , а понятие формулы является очевидным обобщением соответствующего понятия для языка Pak_k . Вместо термина “параметрически выражает” в языке Pos_k применяем термин “позитивно выражает”. Множество всех отношений на E_k (функций из P_k), которые позитивно выразимы через функции множества Q , обозначаем через $\text{Pos}_k[Q]_R$ (соответственно $\text{Pos}_k[Q]_F$). Множество $\text{Pos}_k[Q]_F$ называем позитивным замыканием множества Q , а множества вида $\text{Pos}_k[Q]_R$ ($\text{Pos}_k[Q]_F$) позитивно замкнутыми классами отношений (функций).

Язык $1L_k$ получается из языка Pos_k добавлением логической связки отрицание $\neg$ и квантора общности $\forall$. Так же, как для языков Pak_k , Pos_k , вводим понятия “отношение (функция) $1L_k$ -выразима через функции множества Q ”, “ $1L_k$ -замыкание множества Q ” и “ $1L_k$ -замкнутый класс отношений (функций)”. Множество всех отношений (функций), $1L_k$ -выразимых через функции множества Q , обозначаем через $1L_k[Q]_R$ (соответственно $1L_k[Q]_F$).

Язык $2L_k$ представляет собой язык второй ступени. Исходные символы языка $2L_k$ состоят из исходных символов языка $1L_k$, к которым добавлены функциональные переменные $F_i^{(n)}$, $i, n = 1, 2, \dots$. При определении термина в языке $2L_k$ добавляется новый пункт: если $t_1, \dots, t_n$ — термы, а $F_i^{(n)}$ — функциональная переменная, то $F_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ — терм. При определении формулы в языке $2L_k$ дополнительно разрешаются кванторы по функциональным переменным.

Пусть $\Phi(F_i^{(n)})$ — формула языка $2L_k$ с единственной свободной функциональной переменной $F_i^{(n)}$ (в частности, все предметные переменные формулы Φ связаны). Говорим, что формула $\Phi(F_i^{(n)})$ определяет функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ из P_k , если φ является единственной n -местной функцией, удовлетворяющей формуле $\Phi(F_i^{(n)})$. Как

для языка $1L_k$, определяем понятия “отношение ρ $2L_k$ -выразимо через функции множества Q ” и “ $2L_k$ -замкнутый класс отношений”. При этом в используемых формулах все функциональные переменные должны быть связанными. При определении аналогичных понятий для функций применяем формулы языка $2L_k$, в которых имеется только одна свободная переменная, функциональная переменная.

Легко видеть, что всякий параметрически замкнутый класс функций замкнут относительно операции суперпозиции. В самом деле, если терм t языка $0L_k$ выражает функцию φ через функции $g_1, \dots, g_r$, а переменная y не входит в терм t , то формула $(t = y)$ языка Par_k параметрически выражает функцию φ через функции множества $\{g_1, \dots, g_r\}$.

Поскольку язык Pos_k есть расширение языка Par_k , а язык $1L_k$ — расширение языка Pos_k , всякий позитивно замкнутый класс отношений (функций) является параметрически замкнутым, а всякий $1L_k$ -замкнутый класс — позитивно замкнутым. Аналогичные утверждения справедливы и для языков $2L_k$, $1L_k$. Для $2L_k$ -замкнутых и $1L_k$ -замкнутых классов отношений это непосредственно следует из определений, так как понятие отношения, $2L_k$ -выразимого через функции множества Q , аналогично соответствующему понятию в языке $1L_k$. Что касается функций, то пусть формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ $1L_k$ -выражает функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ через функции множества Q . Тогда функция φ будет $2L_k$ -выражаться через функции множества Q с помощью формулы

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n) (\forall y) ((F_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = y) \equiv \Phi(x_1, \dots, x_n, y)),$$

где эквивалентность $\equiv$ стандартным образом определяется через связки $\&$, $\vee$, $\neg$.

Таким образом, для произвольного множества Q , $Q \subseteq P_k$, имеют место включения

$$\begin{aligned} 0L_k[Q] &\subseteq \text{Par}_k[Q]_F \subseteq \text{Pos}_k[Q]_F \subseteq 1L_k[Q]_F \subseteq 2L_k[Q]_F, \\ \text{Par}_k[Q]_R &\subseteq \text{Pos}_k[Q]_R \subseteq 1L_k[Q]_R \subseteq 2L_k[Q]_R. \end{aligned}$$

3. Редукция формул

Определим несколько правил эквивалентных преобразований формул в языках $1L_k$ и $2L_k$. Как обычно, формулу $\neg(t_1 = t_2)$ будем записывать в виде $(t_1 \neq t_2)$.

1. Элиминирование квантора общности по предметной переменной

Пусть $(\forall x)\Phi(x)$ — формула языка $2L_k$, а предметные переменные $y_1, \dots, y_k$ не входят в формулу $\Phi(x)$. Поскольку основное множество E_k состоит из k элементов, формула $(\forall x)\Phi(x)$ эквивалентна формуле

$$(\exists y_1) \dots (\exists y_k) \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} (y_i \neq y_j) \right) \& \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \Phi(y_i) \right) \right).$$

2. Элиминирование квантора общности по функциональной переменной

Идею преобразования формул из п. 1 применим для функциональных переменных. Пусть $(\forall F^{(n)})\Phi(F^{(n)})$ — формула языка $2L_k$, $m = k^{k^n}$ и функциональные переменные $F_1^{(n)}, \dots, F_m^{(n)}$ не входят в формулу $\Phi(F^{(n)})$. Поскольку в P_k имеется ровно

k^{k^n} функций, зависящих от n переменных, формула $(\forall F^{(n)})\Phi(F^{(n)})$ эквивалентна формуле

$$(\exists F_1^{(n)}) \dots (\exists F_m^{(n)}) \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} (F_i^{(n)} \neq F_j^{(n)}) \right) \& \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\Phi(F_i^{(n)})) \right) \right),$$

где $(F_i^{(n)} \neq F_j^{(n)})$ есть сокращение для формулы

$$(\exists x_1) \dots (\exists x_n) (F_i^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \neq F_j^{(n)}(x_1, \dots, x_n)).$$

3. Приведение равенств к специальному виду

Если $t_1, \dots, t_n, t_{n+1}$ — термы языка $2L_k$ и переменные $z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$ не входят в термы $t_1, \dots, t_n, t_{n+1}$, то равенство $(F^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = t_{n+1})$ эквивалентно формуле

$$(\exists z_1) \dots (\exists z_{n+1}) \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n+1} (z_i = t_i) \right) \& (F^{(n)}(z_1, \dots, z_n) = z_{n+1}) \right).$$

Аналогичная эквивалентность имеет место для случая, когда вместо функциональной переменной $F^{(n)}$ рассматривается функциональная константа $f^{(n)}$.

4. Элиминирование квантора существования по функциональной переменной

Пусть $(\exists F^{(n)})\Phi(F^{(n)})$ — формула языка $2L_k$, в которой выполнены все возможные преобразования п. 3. Иными словами, пусть всякое равенство, входящее в формулу $\Phi(F^{(n)})$, имеет либо вид $x_{i_1} = x_{i_2}$, либо вид $f_p^{(m)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = x_{i_{m+1}}$, либо вид $F_q^{(m)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = x_{i_{m+1}}$.

Предположим, что функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ из P_k принимает l значений $a_1, \dots, a_l$, $1 \leq l \leq k$. Тогда существует разбиение множества E_k^n на l непустых попарно не пересекающихся подмножеств $X_1, \dots, X_l$ такое, что на множестве X_i функция φ принимает значение a_i , $1 \leq i \leq l$. Таким образом, существование функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ эквивалентно существованию числа l , $1 \leq l \leq k$, упорядоченного набора $(a_1, \dots, a_l)$ из l попарно различных элементов множества E_k и разбиения $(X_1, \dots, X_l)$ множества E_k^n на l непустых попарно не пересекающихся подмножеств. Так как кванторы существования в этом утверждении распространяются по конечным множествам, их действие можно заменить соответствующей дизъюнкцией. Эта идея реализуется в следующей конструкции.

Для любого l , $1 \leq l \leq k$, любого упорядоченного набора $(a_1, \dots, a_l)$ из l различных элементов, принадлежащих множеству E_k , и любого разбиения $(X_1, \dots, X_l)$ множества E_k^n на непустые попарно не пересекающиеся подмножества определяем формулу

$$(\exists z_0^1) \dots (\exists z_{k-1}^1) \dots (\exists z_0^n) \dots (\exists z_{k-1}^n) \left(\bigwedge_{1 \leq m \leq n} \bigwedge_{0 \leq i < j \leq k-1} (z_i^m \neq z_j^m) \& \Phi' \right), \quad (1)$$

где переменные $z_0^1, \dots, z_{k-1}^1$ не входят в формулу $\Phi(F^{(n)})$, а формула Φ' определяется по формуле $\Phi(F^{(n)})$ следующим образом. Всякую подформулу формулы $\Phi(F^{(n)})$

вида $F^{(n)}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) = x_{j_{n+1}}$ заменяем формулой

$$\left(\bigvee_{(b,c,\dots,d) \in X_1} (x_{j_1} = z_b^1) \& (x_{j_2} = z_c^2) \& \dots \& (x_{j_n} = z_d^n) \supset (x_{j_{n+1}} = z_{a_1}^1) \right) \vee \dots \\ \vee \left(\bigvee_{(b,c,\dots,d) \in X_l} (x_{j_1} = z_b^1) \& (x_{j_2} = z_c^2) \& \dots \& (x_{j_n} = z_d^n) \supset (x_{j_{n+1}} = z_{a_l}^1) \right),$$

где импликация $\supset$ стандартным образом определяется через связки $\vee, \neg$. Формула $(\exists F^{(n)})\Phi(F^{(n)})$ эквивалентна дизъюнкции всех формул (1), образованной для всех троек $l, (a_1, \dots, a_l), (X_1, \dots, X_l)$ указанного выше вида.

5. Элиминирование функциональной переменной в формулах специального вида

Пусть $\Phi(F^{(n)})$ — формула языка $2L_k$, которая содержит только одну свободную функциональную переменную $F^{(n)}$, а все предметные переменные в формуле $\Phi(F^{(n)})$ связаны. Будем также предполагать, что в формуле $\Phi(F^{(n)})$ выполнены все возможные преобразования п. 3. Пусть формула $\Phi(F^{(n)})$ определяет функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ из P_k . Обозначим через $\Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ формулу

$$(\exists F^{(n)})((F^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}) \& \Phi(F^{(n)})).$$

В силу того, что формула $\Phi(F^{(n)})$ определяет функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, для любых $x_1, \dots, x_n$ из E_k существует единственное x_{n+1} (именно, $x_{n+1} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$), для которого истинно значение $\Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Поэтому, если формула $\Psi'(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ в языке $1L_k$ получена из формулы $\Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ элиминированием кванторов общности и существования согласно пп. 2 и 4, то формула $\Psi'(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ будет $1L_k$ -выражать функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

В заключение раздела рассмотрим вопрос о существовании языков, занимающих промежуточное положение между Pos_k и $1L_k$. По определению, язык $1L_k$ получается из языка Pos_k добавлением отрицания и квантора общности. Очевидно, мы получим язык, эквивалентный языку $1L_k$, если добавим к языку Pos_k только одно отрицание. Оказывается, что такой же результат имеет место при добавлении к языку Pos_k только квантора общности. В самом деле, согласно пп. 1, 3 и правилам логики всякую формулу языка $1L_k$ можно получить из формул вида

$$x_{i_1} = x_{i_2}, \quad f_j^{(n)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = x_{i_{n+1}}$$

и отрицаний этих формул с помощью применения операций $\&, \vee, \exists$. Поскольку формула

$$\neg(f_j^{(n)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = x_{i_{n+1}})$$

эквивалентна формуле

$$(\exists y)((f_j^{(n)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = y) \& \neg(y = x_{i_{n+1}})),$$

все сводится к вопросу о том, имеются ли в языке Pos_k с добавленным квантором общности формулы, эквивалентные формуле $x_1 \neq x_2$. Легко видеть, что одной из

таких формул будет формула

$$(\exists y_1) \dots (\exists y_k) (\forall z) \left(\left(\bigvee_{1 \leq i \leq k} (z = y_i) \right) \& (x_1 = y_1) \& (x_2 = y_2) \right).$$

Таким образом, в смысле выразимости не существует естественных языков, занимающих промежуточное положение между Pos_k и $1L_k$.

4. Основные результаты

Применение пп. 2–5 к формулам языка $2L_k$ приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Для любого k , $k \geq 2$, совокупности $1L_k$ -замкнутых и $2L_k$ -замкнутых классов отношений (функций) совпадают. Более того, для любого множества Q , $Q \subseteq P_k$, имеют место равенства*

$$1L_k[Q]_R = 2L_k[Q]_R,$$

$$1L_k[Q]_F = 2L_k[Q]_F.$$

Обозначим через $1\exists L_k$ множество формул языка $1L_k$, которые в предваренной нормальной форме не содержат кванторов общности. Из п. 1 вытекает, что при определении понятий выразимости и замыкания в языке $1L_k$ можно ограничиться только формулами из $1\exists L_k$.

Предложение 1. *Пусть L_k — один из языков Par_k , Pos_k , $1L_k$. Тогда мощность множества всех L_k -замкнутых классов функций не превосходит мощности множества всех L_k -замкнутых классов отношений.*

Доказательство. Достаточно заметить, что формула Φ языка L_k , определяющая функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, одновременно определяет отношение $\varphi(x_1, \dots, x_n) = y$. Таким образом, если $L_k[Q_1]_F \neq L_k[Q_2]_F$, то также $L_k[Q_1]_R \neq L_k[Q_2]_R$.

Для любого k , $k \geq 2$, обозначим через $\mathcal{S}_k$ полную симметрическую группу подстановок на множестве E_k . Следуя [30] (см. также [31, 33]), функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ из P_k назовем однородной, если она самодвойственна относительно любых подстановок группы $\mathcal{S}_k$. Таким образом, функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ однородна, если для любой подстановки π из $\mathcal{S}_k$ имеет место тождество

$$\varphi(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = \pi(\varphi(x_1, \dots, x_n)).$$

Множество всех однородных функций из P_k обозначим через H_k . Легко видеть, что множество H_k замкнуто относительно операции суперпозиции.

Теорема 2. *Для любого k , $k \geq 2$, имеет место равенство*

$$1L_k[\emptyset]_F = H_k.$$

Доказательство. При $k \geq 2$ определим на множестве E_k однородные функции p_k и r_k , полагая

$$p_k(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$r_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если } \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\} = E_k, \\ x_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $k = 2$ функции p_k и r_k совпадают с булевыми функциями $x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}z$ и $\bar{x}_1$. Хорошо известно, что функции $x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}z$, $\bar{x}_1$ образуют базис по суперпозиции в классе H_2 , классе всех самодвойственных булевых функций (см. [6], где класс H_2 имеет обозначение D_3). Аналогично, при $k \geq 3$ базис в классе H_k образуют функции p_k , r_k (см. [32], а также [31, 33]). Поскольку всякий $1L_k$ -замкнутый класс функций замкнут относительно операции суперпозиции, для доказательства включения $H_k \subseteq 1L_k[\emptyset]_F$ достаточно установить, что функции p_k, r_k можно выразить формулами языка $1L_k$, не содержащими символов функций. Для функции $p_k(x, y, z)$ такой формулой будет формула

$$((x = y) \supset (v = z)) \& ((x \neq y) \supset (v = x)),$$

для функции $r_k(x_1, \dots, x_{k-1})$ — формула

$$\left((\exists x_k) \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} (x_i \neq x_j) \right) \supset (y = x_k) \right) \& \left(\bigvee_{1 \leq i < j \leq k-1} (x_i = x_j) \supset (y = x_1) \right)$$

(при $k = 2$ последняя формула упрощается до $y \neq x_1$).

Покажем, что $1L_k[\emptyset]_F \subseteq H_k$. С этой целью заметим, что группа автоморфизмов модели $\langle E_k; = \rangle$ совпадает с $\mathcal{S}_k$. Поэтому, если формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ языка $1L_k$, не содержащая символов функций, определяет функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, то группа автоморфизмов алгебры $\langle E_k; \varphi \rangle$ будет также совпадать с $\mathcal{S}_k$ (см., например, [34], глава 3). Другими словами, функция φ будет однородной. Теорема доказана.

Пусть G — подгруппа группы $\mathcal{S}_k$. Обозначим через $P_k G$ множество всех функций из P_k , которые самодвойственны относительно любых подстановок группы G . Иначе говоря, $P_k G$ есть множество всех функций φ из P_k таких, что группа автоморфизмов алгебры $\langle E_k; \varphi \rangle$ содержит группу G . Таким образом, $P_k \mathcal{S}_k = H_k$ и $P_k e_k = P_k$, где e_k — единичная подгруппа группы $\mathcal{S}_k$. Нетрудно убедиться в том, что для любой группы G , $G \subseteq \mathcal{S}_k$, множество $P_k G$ замкнуто относительно операции суперпозиции.

Пусть G — подгруппа группы $\mathcal{S}_k$, $(a_1, \dots, a_m)$, $(b_1, \dots, b_m)$ — произвольные наборы из E_k^m , m — натуральное число. Будем говорить, что $(a_1, \dots, a_m)$ и $(b_1, \dots, b_m)$ G -эквивалентны, если один из них можно перевести в другой с помощью некоторой подстановки группы G , т.е. если в группе G существует такая подстановка π , что

$$(b_1, \dots, b_m) = (\pi(a_1), \dots, \pi(a_m))$$

или

$$(a_1, \dots, a_m) = (\pi(b_1), \dots, \pi(b_m)).$$

Очевидно, что G -эквивалентность является отношением эквивалентности на множестве E_k^m . Классы G -эквивалентных наборов из E_k^m называются m -орбитами группы G .

Лемма 1. Если G_1, G_2 — различные подгруппы группы $\mathcal{S}_k$, то

$$P_k G_1 \neq P_k G_2.$$

Доказательство. Пусть, например, $G_2 \setminus G_1 \neq \emptyset$ и $\pi \in G_2 \setminus G_1$. Поскольку подстановка π полностью определяется набором $(\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(k-1))$ и $\pi \notin G_1$, наборы $(0, 1, \dots, k-1)$ и $(\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(k-1))$ принадлежат различным k -орбитам группы G_1 . Отсюда следует, что значения k -местных функций из класса $P_k G_1$ на данных наборах можно определять произвольным образом. Вместе с тем $\pi \in G_2$ и, следовательно, упомянутые наборы принадлежат одной и той же k -орбите группы G_2 . Предположим, что $\pi(0) = a$. Если $b \neq a$, то определим в классе $P_k G_1$ такую функцию $\varphi(x_1, \dots, x_k)$, что

$$\varphi(0, 1, \dots, k-1) = 0, \quad \varphi(\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(k-1)) = b$$

(это можно сделать, поскольку подстановка π отлична от тождественной). Тогда $\varphi \notin P_k G_2$, так как предположение $\varphi \in P_k G_2$ влечет равенство

$$\varphi(\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(k-1)) = a.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. При любом $k, k \geq 2$, множество $1L_k$ -замкнутых классов функций совпадает с множеством классов вида $P_k G$, где G — подгруппа группы $\mathcal{S}_k$.

Доказательство. Установим вначале, что всякий класс вида $P_k G$ является $1L_k$ -замкнутым. В самом деле, пусть функция $\varphi \in 1L_k$ -выразима через функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ из класса $P_k G$. Согласно включению $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset P_k G$ и в силу очевидных свойств отношения равенства группа автоморфизмов алгебраической системы $\langle E_k; =, \varphi_1, \dots, \varphi_m \rangle$ содержит группу G . В этом случае, как хорошо известно (см. [34], глава 3), группа G будет также подгруппой группы автоморфизмов алгебры $\langle E_k; \varphi \rangle$. Это означает, что $\varphi \in P_k G$.

Таким образом, в силу леммы 1 число $1L_k$ -замкнутых классов функций не меньше числа всех подгрупп группы $\mathcal{S}_k$. С другой стороны, согласно предложению 1 число $1L_k$ -замкнутых классов функций не больше $1L_k$ -замкнутых классов отношений.

Определим язык $1RL_k$. Он отличается от языка $1L_k$ только тем, что для всякого $n, n \geq 1$, вместо символов функций $f_i^{(n)}$ содержит символы $R_1^{(n)}, \dots, R_{q(n)}^{(n)}$ всех n -местных отношений на E_k ($q(n) = 2^{k^n}$). Если $R_s^{(l+1)}, R_t^{(m+1)}, \dots, R_u^{(n+1)}$ суть обозначения соответственно отношений $f_a^{(l)}(x_1, \dots, x_l) = y, f_b^{(m)}(x_1, \dots, x_m) = y, \dots, f_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = y$, то формула языка $1L_k$ вида

$$f_a^{(l)}(f_b^{(m)}(x_1^1, \dots, x_m^1), \dots, f_c^{(n)}(x_1^l, \dots, x_n^l)) = y$$

определяет то же самое отношение, что и формула

$$(\exists y_1) \dots (\exists y_l)(R_t^{(m+1)}(x_1^1, \dots, x_m^1, y_1) \& \dots \\ \& R_u^{(n+1)}(x_1^l, \dots, x_n^l, y_l) \& R_s^{(l+1)}(y_1, \dots, y_l, y))$$

языка $1L_k$. Отсюда сразу следует, что число $1L_k$ -замкнутых классов отношений не превосходит числа $1RL_k$ -замкнутых классов отношений. Однако $1RL_k$ -замкнутый класс отношений в терминологии работы [35] представляет собой алгебру Краснера второго рода. В [35] установлено, что число алгебр Краснера второго рода на множестве E_k равно числу подгрупп симметрической группы $\mathcal{S}_k$. Следовательно, число $1L_k$ -замкнутых классов функций равно числу подгрупп группы $\mathcal{S}_k$, и теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что множество всех $1L_k$ -замкнутых классов функций (а также отношений) антиизоморфно (по отношению включения) решетке подгрупп симметрической группы $\mathcal{S}_k$. Это позволяет легко определить все $1L_k$ -предполные классы в P_k и тем самым решить проблему полноты для $1L_k$ -выразимости.

Следствие 1. *Класс $P_k G$ является $1L_k$ -предполным в P_k тогда и только тогда, когда группа G порождается неединичной подстановкой, цикловое разложение которой состоит из одноэлементных циклов и циклов одной и той же простой длины.*

Доказательство. В силу антиизоморфизма между решеткой $1L_k$ -замкнутых классов функций и решеткой подгрупп группы $\mathcal{S}_k$ класс $P_k G$ будет $1L_k$ -предполным в том и только том случае, когда группа G не содержит собственных подгрупп, т.е. когда G задает атом в решетке подгрупп симметрической группы $\mathcal{S}_k$. Отсюда легко выводится утверждение следствия.

В качестве примера рассмотрим случаи $k = 2, 3, 4$. В группе $\mathcal{S}_2$ имеются две подгруппы, $\mathcal{S}_2$ и единичная подгруппа e_2 . Соответствующими $1L_2$ -замкнутыми классами функций будут класс H_2 всех однородных функций (класс D_3 всех самодвойственных булевых функций [6]) и класс P_2 . В группе $\mathcal{S}_3$ имеется 6 подгрупп. Из них атомы определяют 4 подгруппы, отличные от $\mathcal{S}_3$ и e_3 . Эти подгруппы порождаются подстановками с цикловыми разложениями

$$(0)(12), \quad (01)(2), \quad (02)(1), \quad (012).$$

В решетке подгрупп группы $\mathcal{S}_4$ атомы определяются 13 подгруппами, которые порождаются подстановками

$$\begin{aligned} &(01)(2)(3), \quad (02)(1)(3), \quad (03)(1)(2), \quad (0)(12)(3), \\ &(0)(13)(2), \quad (0)(1)(23), \quad (01)(23), \quad (02)(13), \\ &(03)(12), \quad (012)(3), \quad (013)(2), \quad (023)(1), \quad (0)(123). \end{aligned}$$

Функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ из P_k называется селекторной, если для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, выполняется тождество

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i.$$

Обозначим через D_1 класс всех самодвойственных булевых α -функций (см. [6]).

Теорема 4. *При $k \geq 3$ класс $\text{Pos}_k[\emptyset]_F$ состоит только из селекторных функций, $\text{Pos}_2[\emptyset]_F = D_1$.*

Доказательство. Пусть $k \geq 2$. Приведем формулы языка Pos_k , не содержащие символов функций, к специальному виду. Для этого воспользуемся тремя хорошо известными логическими эквивалентностями:

$$\begin{aligned} (\exists x)(\Phi \vee \Psi) &\equiv (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi, \\ (\exists x)(\Phi \& \Psi) &\equiv \Phi \& (\exists x)\Psi, \\ (\exists x) \left(\big\&_{1 \leq i \leq n} (x = x_i) \right) &\equiv \big\&_{1 \leq i < j \leq n} (x_i = x_j), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

(при $n = 1$ левая часть последней эквивалентности тождественно истинна), где переменная x во второй эквивалентности не входит в формулу Φ свободно. Применяя эти эквивалентности и пользуясь дистрибутивностью конъюнкции относительно дизъюнкции, всякую не тождественно истинную формулу языка Pos_k , не содержащую символов функций, можно привести к виду

$$\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_m,$$

где каждая формула Φ_i является конъюнкцией равенств некоторых переменных.

Пусть теперь $k = 2$. Как известно [6], базис по суперпозиции в классе D_1 образует функция

$$p_2(x, y, z) = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}z.$$

Поскольку формула

$$(x = y) \& (v = z) \vee (x = z) \& (v = x) \vee (y = z) \& (v = x)$$

языка Pos_2 , не содержащая символов функций, выражает функцию $p_2(x, y, z)$, мы имеем включение $D_1 \subseteq \text{Pos}_2[\emptyset]_F$. С другой стороны, очевидно, $\text{Pos}_2[\emptyset]_F \subseteq 1L_2[\emptyset]_F$. Как установлено в теореме 2, $1L_2[\emptyset]_F$ совпадает с классом D_3 всех самодвойственных булевых функций. Однако между D_1 и D_3 нет других замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов [6]. Поэтому, если $\text{Pos}_2[\emptyset]_F \neq D_1$, то $\text{Pos}_2[\emptyset]_F = D_3$ и, следовательно, в $\text{Pos}_2[\emptyset]_F$ входит функция $\bar{x}$. Предположим, что формула $\Phi(x, y)$ языка Pos_2 выражает функцию $\bar{x}$. По доказанному можно считать, что формула Φ имеет вид $\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_m$, где каждая из формул Φ_i есть конъюнкция равенств. Опуская в формуле $\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_m$ конъюнктивные сомножители $x = x, y = y$ и равные дизъюнктивные слагаемые, приходим к выводу, что формула $\Phi(x, y)$ может иметь лишь вид $x = y$. Противоречие показывает, что $\text{Pos}_2[\emptyset]_F \neq D_3$, и потому $\text{Pos}_2[\emptyset]_F = D_1$.

Предположим, что $k \geq 3$. Легко убедиться в том, что классу $\text{Pos}_k[\emptyset]_F$ принадлежат все селекторные функции. В самом деле, если $\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ — селекторная функция, совпадающая с x_i , то функцию φ выражает формула

$$\left(\big\&_{1 \leq j \leq n} (x_j = x_j) \right) \& (y = x_i)$$

языка Pos_k , не содержащая символов функций (множители $x_j = x_j$ указывают лишь на то, что функция φ рассматривается от переменных $x_1, \dots, x_n$).

Допустим, что класс $\text{Pos}_k[\emptyset]_F$ содержит функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, отличную от селекторной. И пусть функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ выражает формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ языка Pos_k , не содержащая символов функций. Будем считать, что формула Φ имеет

вид $\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_m$, где каждая из формул Φ_i представляет собой конъюнкцию равенств некоторых переменных. Так как функция Φ отлична от селекторной и для любых значений переменных $x_1, \dots, x_n$ имеется единственное значение переменной y , для которого истинно $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$, каждая из конъюнкций $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ содержит хотя бы один сомножитель вида $x_r = x_s$, где $r \neq s$.

Из теоремы 2 следует, что функция φ однородна. Согласно [31, 33] всякий замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс однородных функций, отличный от класса селекторных функций, содержит при $k = 3$ хотя бы одну из функций $d, l_3, 2x_1 + 2x_2$, при $k = 4$ хотя бы одну из функций $d, l_4, x_1 + x_2 + x_3$ и при $k \geq 5$ хотя бы одну из функций d, l_k , где

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 = x_2, \\ x_3 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$l_k(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1, \dots, x_k \text{ попарно различны,} \\ x_k & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

функция $2x_1 + 2x_2$ рассматривается в поле Галуа $\text{GF}(3)$, а функция $(x_1 + x_2 + x_3)$ в поле Галуа $\text{GF}(4)$. Таким образом, функцию φ можно считать совпадающей с одной из функций $d, l_k, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + x_3$. В частности, можно предполагать, что выполняется неравенство $n \leq k$. Однако в этом случае при $x_1 = 0, \dots, x_n = n-1$ каждая из конъюнкций $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ становится ложной (за счет сомножителей вида $x_r = x_s$). Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Пусть $\rho(x_1, \dots, x_m)$ — отношение на E_k . Говорят, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k сохраняет отношение ρ , если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$, удовлетворяющих отношению ρ , набор $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$ также удовлетворяет отношению ρ . Иными словами, функция f сохраняет отношение ρ , если отношение ρ , рассматриваемое как подмножество множества E_k^m , образует подалгебру алгебры $\langle E_k; f \rangle^m$. Через $\text{Pol } \rho$ обозначим множество всех функций из P_k , сохраняющих отношение ρ . Если R — множество отношений, то пусть

$$\text{Pol } R = \bigcap_{\rho \in R} \text{Pol } \rho.$$

Хорошо известно [35], что для любого множества отношений R множество $\text{Pol } R$ является замкнутым (относительно операции суперпозиции) классом, содержащим все селекторные функции.

Пусть $\mathcal{T}_k$ есть симметрическая полугруппа всех отображений множества E_k в себя. Если T — подполугруппа полугруппы $\mathcal{T}_k$, то через $\text{Gr}(T)$ обозначаем совокупность графиков всех функций из T , т.е. совокупность всех отношений вида

$$\pi(x) = y, \quad (2)$$

где $\pi \in T$.

Лемма 2. Для любого k , $k \geq 2$, и любой подполугруппы T полугруппы $\mathcal{T}_k$ класс $\text{Pol Gr}(T)$ является Pos_k -замкнутым.

Доказательство. Пусть формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ языка Pos_k выражает функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ через функции множества $\text{Pol Gr}(T)$. Выполним в формуле Φ все возможные преобразования п. 3, приведем ее к пренексному виду и преобразуем бескванторную часть в дизъюнктивную нормальную форму. Вновь распределяя кванторы существования по дизъюнктивным слагаемым, будем предполагать, что формула Φ представима в виде $\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_m$, где каждое из дизъюнктивных слагаемых Φ_i представляет собой формулу

$$(\exists z_1) \dots (\exists z_{r_i})(\Phi_{i1} \& \dots \& \Phi_{is_i}), \quad (3)$$

в которой каждая из подформул $\Phi_{i1}, \dots, \Phi_{is_i}$ является равенством вида $u = v$ или

$$f_j^{(l)}(u_1, \dots, u_l) = v \quad (\{u, u_1, \dots, u_l, v\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y, z_1, \dots, z_{r_i}\}).$$

Допустим теперь, что $\varphi(a_1, \dots, a_n) = b$ и на наборе $(a_1, \dots, a_n, b)$ истинна формула (3). И пусть $c_1, \dots, c_{r_i}$ — значения переменных $z_1, \dots, z_{r_i}$ в формуле (3), обеспечивающие ее истинность при $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n, y = b$. Если $\pi \in T$, а функция $f_j^{(l)}$ из P_k сохраняет отношение (2), то по определению имеет место тождество

$$f_j^{(l)}(\pi(y_1), \dots, \pi(y_l)) = \pi(f_j^{(l)}(y_1, \dots, y_l)).$$

Следовательно, если в формуле $\Phi_{i1} \& \dots \& \Phi_{is_i}$ заменить значения $a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_{r_i}$ соответственно значениями $\pi(a_1), \dots, \pi(a_n), \pi(b), \pi(c_1), \dots, \pi(c_{r_i})$, то она останется истинной. Значит, формула (3) будет истинной при замене набора $(a_1, \dots, a_n, b)$ набором $(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n), \pi(b))$. Иными словами, будет справедливо равенство

$$\varphi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) = \pi(b).$$

Поскольку $\varphi(a_1, \dots, a_n) = b$, приходим к выводу, что функция φ сохраняет отношение (2). Лемма доказана.

Замечание 1. Не сужая совокупности Pos_k -замкнутых классов, в лемме 2 можно рассматривать лишь полугруппы T с единицей ε (тождественным отображением). В самом деле, графиком отображения ε является отношение $x = y$. Как известно [35], $\text{Pol}\{x = y\} = P_k$. Поэтому для любой полугруппы T

$$\text{Pol Gr}(T) = \text{Pol Gr}(T \cup \{\varepsilon\}).$$

Замечание 2. Если T_1, T_2 — различные подполугруппы полугруппы $\mathcal{T}_k$, содержащие единицу, то неравенство $\text{Pol Gr}(T_1) \neq \text{Pol Gr}(T_2)$, вообще говоря, не выполняется. В качестве примера рассмотрим в полугруппе $\mathcal{T}_3$ полугруппы T_1, T_2 , порождаемые соответственно элементами $\varepsilon, \alpha, \beta$ и $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma$, где

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Справедливо включение $T_1 \subset T_2$, причем $\gamma \notin T_1$, поскольку γ принимает лишь значения 1 и 2. Покажем, что $\text{Pol Gr}(T_1) = \text{Pol Gr}(T_2)$. Согласно [35], это равенство будет выполняться, если график функции γ выражается через графики функций $\varepsilon, \alpha, \beta$ с помощью логических формул, содержащих конъюнкцию и квантор существования. Положим

$$\rho_1(x, y) \equiv (\exists z)((\alpha(x) = z) \& (\alpha(y) = z)).$$

Тогда

$$\rho_1(x, y) \equiv ((x, y \in \{0, 1\}) \vee (x = y = 2)).$$

Если теперь положить

$$\rho_2(x, y) \equiv (\exists z)((\alpha(x) = z) \& (\beta(y) = z)),$$

то

$$\rho_2(x, y) \equiv (x \in \{0, 1\}) \& (y = 1) \vee (x = 2) \& (y \in \{0, 2\})$$

и, следовательно,

$$\rho_1(x, y) \& \rho_2(x, y) \equiv (\gamma(x) = y).$$

На основе указанного примера можно, разумеется, построить аналогичные примеры при любом $k, k \geq 4$.

Теорема 5. При любом $k, k \geq 2$, число Pos_k -замкнутых классов функций больше числа подгрупп симметрической группы $\mathcal{S}_k$ и не превосходит числа подполугрупп симметрической полугруппы $\mathcal{T}_k$, содержащих единицу.

Доказательство. Поскольку любой 1 L_k -замкнутый класс функций является также Pos_k -замкнутым, из теоремы 3 следует, что число Pos_k -замкнутых классов функций не меньше числа подгрупп симметрической группы $\mathcal{S}_k$. Пусть T_0 — подполугруппа полугруппы $\mathcal{T}_k$, состоящая из одной функции-константы 0. Согласно лемме 2 класс $\text{Pol Gr}(T_0)$ является Pos_k -замкнутым. Нетрудно видеть, что он состоит из всех функций класса P_k , сохраняющих константу 0. В частности, класс $\text{Pol Gr}(T_0)$ отличен от всех классов вида $P_k G$, где G — подгруппа группы $\mathcal{S}_k$. Значит, число Pos_k -замкнутых классов функций больше числа подгрупп симметрической группы $\mathcal{S}_k$.

При доказательстве верхней оценки действуем по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 3. Именно, используя предложение 1, заключаем, что число Pos_k -замкнутых классов функций не превосходит числа Pos_k -замкнутых классов отношений. Аналогично языку 1 RL_k из доказательства теоремы 3 вводим язык RPos_k , заменяя в языке Pos_k символы функций символами отношений на E_k . Как и в теореме 3, убеждаемся, что число Pos_k -замкнутых классов отношений не превосходит числа RPos_k -замкнутых классов отношений. Согласно терминологии работы [35] RPos_k -замкнутый класс отношений есть алгебра Краснера первого рода. В [35] доказано, что число алгебр Краснера первого рода на множестве E_k равно числу подполугрупп симметрической полугруппы $\mathcal{T}_k$, содержащих единицу. Следовательно, число Pos_k -замкнутых классов отношений не превосходит числа подполугрупп полугруппы $\mathcal{T}_k$, содержащих единицу. Теорема доказана.

Замечание 3. В булевом случае число Pos_2 -замкнутых классов функций равно числу подполугрупп полугруппы $\mathcal{T}_2$, содержащих единицу, а каждый Pos_2 -замкнутый класс определяется в соответствии с леммой 2 и замечанием 1. В самом деле, имеется ровно 6 подполугрупп полугруппы $\mathcal{T}_2$, содержащих единицу (функцию x):

$$\{x\}, \quad \{x, 0\}, \quad \{x, 1\}, \quad \{x, 0, 1\}, \quad \{x, \bar{x}\}, \quad \{x, \bar{x}, 0, 1\}.$$

При отображении $\text{Pol Gr}(T)$ им соответствуют шесть Pos_2 -замкнутых классов булевых функций: $P_2, C_3, C_2, C_4, D_3, D_1$ (обозначения классов взяты из [6]).

В заключение сравним операторы замыкания (на множестве функций), отвечающие языкам $0L_k$, Pa_k , Pos_k , $1L_k$. Как известно [4–6], имеется счетное число $0L_2$ -замкнутых классов. А.В. Кузнецовым [23] установлено, что число Pa_2 -замкнутых классов равно 25. При $k \geq 3$ число $0L_k$ -замкнутых классов континуально [10], а число Pa_k -замкнутых классов конечно [24, 29]. Далее, при переходе от языка Pa_2 к языку Pos_2 число соответствующих замкнутых классов уменьшается с 25 до 6, а при переходе от языка Pos_2 к языку $1L_2$ с 6 до 2. Кроме того, при $k \geq 3$ число Pos_k -замкнутых классов строго больше числа $1L_k$ -замкнутых классов. Эти результаты показывают, что увеличение выразительных возможностей языка в цепочке $0L_k \subset Pa_k \subset Pos_k \subset 1L_k$ приводит к строгому усилению соответствующих операторов замыкания.

Список литературы

1. Яблонский С.В., Функциональные построения в k -значной логике. *Труды Матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова* (1958) **51**, 5–142.
2. Яблонский С.В., Введение в теорию функций k -значной логики. *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики*. Наука, Москва, 1974, 9–66.
3. Кудрявцев В.Б., Функциональная система. *Матем. энциклопедия*, т.5. Советская энциклопедия, Москва, 1985, 694–696.
4. Post E.L., Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.* (1921) **43**, 163–185.
5. Post E.L., Two-valued iterative systems of mathematical logic. *Ann. Math. Studies* (1941) **5**.
6. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
7. Яблонский С.В., О функциональной полноте в трехзначном исчислении. *Докл. АН СССР* (1954) **95**, №6, 1153–1156.
8. Rosenberg I., La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A–B* (1965) **260**, №14, 3817–3819.
9. Rosenberg I.G., Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. *Rozprawy Československe Akad. Věd Řada Math. Přír. Věd.* (1970) **80**, 3–93.
10. Янов Ю.И., Мучник А.А., О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *Докл. АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.
11. Нгуен Ван Хоа, О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 . *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 82–95.
12. Нгуен Ван Хоа, О семействах замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 87–108.
13. Нгуен Ван Хоа, Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами. *Докл. АН Беларуси* (1994) **38**, №3, 16–19.
14. Нгуен Ван Хоа, О структуре замкнутых классов k -значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп. *Докл. АН Беларуси* (1994) **38**, №6, 17–20.
15. Нгуен Ван Хоа, О замкнутых классах k -значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп. *Дискретная математика* (1996) **8**, №1, 129–156.
16. Марченков С.С., Основные отношения S -классификации функций многозначной логики. *Дискретная математика* (1996) **8**, №1, 99–128.

17. Марченков С.С., S -классификация идемпотентных алгебр с конечным носителем. *Докл. РАН* (1996) **348**, №5, 587–589.
18. Марченков С.С., G -предполные классы многозначной логики. *Дискретный анализ и исследование операций* (1996) **3**, №3, 47–70.
19. Марченков С.С., S -классификация функций многозначной логики. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 125–152.
20. Марченков С.С., A -классификация конечных инъективных функций. *Дискретный анализ и исследование операций* (1997) **4**, №2, 15–42.
21. Марченков С.С., A -замкнутые классы идемпотентных функций многозначной логики, определяемые двуместными отношениями. *Дискретный анализ и исследование операций* (1998) **5**, №1, 32–59.
22. Марченков С.С., A -замкнутые классы многозначной логики, содержащие константы. *Дискретная математика* (1998) **10**, №3, 10–26.
23. Кузнецов А.В., О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости. В кн.: *Логический вывод*. Наука, Москва, 1979, с. 5–33.
24. Данильченко А.Ф., О параметрической выразимости функций трехзначной логики. *Алгебра и логика* (1977) **16**, №4, 397–416.
25. Раца М.Ф., *Выразимость в исчислениях высказываний*. Штиинца, Кишинев, 1991.
26. Голунков Ю.В., Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k -значной логики. *Вероятностные методы и кибернетика* (1980) **17**, 23–34.
27. Тайманов В.А., О функциональных системах k -значной логики с операциями программного типа. *Докл. АН СССР* (1983) **268**, №6, 1307–1310.
28. Соловьев В.Д., Замкнутые классы в k -значной логике с операцией разветвления по предикату. *Дискретная математика* (1990) **2**, №4, 19–25.
29. Burris S., Willard R., Finitely many primitive positive clones. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1987) **101**, №3, 427–430.
30. Marczewski E., Homogeneous operations and homogeneous algebras. *Fund. Math.* (1964) **56**, №2, 81–103.
31. Марченков С.С., О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. *Проблемы кибернетики* (1979) **36**, 5–22.
32. Csákvány B., Gavalcová T., Finite homogeneous algebras. *Acta Sci. Math* (1980) **42**, №1-2, 57–65.
33. Марченков С.С., Однородные алгебры. *Проблемы кибернетики* (1982) **39**, 85–106.
34. Мальцев А.И., *Алгебраические системы*. Наука, Москва, 1970.
35. Боднарчук В.Г., Калужнин Л.А., Котов В.Н., Ромов Б.А., Теория Галуа для алгебр Поста. *Кибернетика* (1969) **3**, 1–10; **5**, 1–9.

Статья поступила 05.11.1998.