Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Мачикина, Б. Я. Рябко, Быстрый метод перевода цепных дробей в обыкновенные, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 152–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm402>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:23:30

УДК 519.7

Быстрый метод перевода цепных дробей в обыкновенные

© 1999 г. Е. П. Мачикина, Б. Я. Рябко

В статье рассматривается задача построения быстрого алгоритма перевода цепных дробей в обыкновенные. Предлагается алгоритм решения, время работы которого меньше, чем у известных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-01-00586.

1. Введение

Проблема построения быстрых алгоритмов находится в центре внимания многих исследователей в силу своей практической и теоретической важности. В последние годы разработаны алгоритмы, скорость которых асимптотически выше, чем у традиционных, для многих важных задач. Среди них мы отметим алгоритм быстрого умножения и деления, быстрый алгоритм умножения матриц, быстрый алгоритм Евклида (см., например, обзор в [1]).

В данной статье рассматривается задача построения быстрого алгоритма перевода цепных дробей в обыкновенные.

Приведем необходимые определения. Выражение вида

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

называется цепной дробью, где коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ являются натуральными числами. Для краткости такую дробь обозначим $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. (Все необходимые определения и свойства цепных дробей см., например, в [2].) Всякую конечную цепную дробь можно обратить в обыкновенную. Для этого достаточно произвести действия, указанные в изображении цепной дроби. Обычно для вычислений используется следующая схема:

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где по определению

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_1, a_2, \dots, a_k], \quad p_0 = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad q_0 = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Тогда на последнем шаге получим требуемую обыкновенную дробь.

Оценим время, требуемое для вычислений по схеме (1). Время, как обычно, измеряется количеством операций над однобитовыми словами (см. подробное описание модели вычислений в [1]). Будем считать, что все вычисления проводятся в двоичной системе исчисления. Под длиной $l(a)$ числа a будем понимать количество цифр в его двоичной записи. В дальнейшем мы будем исследовать асимптотическое поведение, поэтому будем считать, что $l(a) = \log(a + 1)$. (Здесь и ниже $\log x = \log_2 x$). При вычислении $a_1 q_0 + q_{-1}$ мы получаем число длины $l(a_1)$ бит, на втором шаге, вычисляя $a_2 q_1 + q_0$, получаем число длины $l(a_1) + l(a_2)$ бит и так далее. На последнем шаге получим знаменатель искомой обыкновенной дроби длины $l(a_1) + \dots + l(a_n)$. Таким образом, вычисляя эти величины, нам придется по крайней мере просмотреть числа длин

$$l(a_1), (l(a_1) + l(a_2)), \dots, (l(a_1) + \dots + l(a_n)).$$

Например, в случае дроби $[1, 1, \dots, 1]$ с N коэффициентами, равными единице, на это будет затрачено время, равное cN^2 , где $c > 0$. Таким образом, легко видеть, что максимальное время перевода цепной дроби в обыкновенную равно cN^2 , где N — длина знаменателя обыкновенной дроби. (Максимум берется по всем дробям с длиной знаменателя N .)

Мы предлагаем быстрый алгоритм перевода цепной дроби в обыкновенную с трудоемкостью $O(N \log^2 N \log \log N)$, где N — длина знаменателя в полученной обыкновенной дроби или, учитывая предыдущие рассуждения, N — сумма длин коэффициентов цепной дроби.

2. Описание алгоритма и его свойства

Перейдем к точному изложению предложенного метода. Пусть дана цепная дробь $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Введем в рассмотрение матрицу, определяемую равенством

$$M_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Лемма 1. Для цепной дроби $[a_1, a_2, \dots, a_n]$

$$M_{1n} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}.$$

где $p_k/q_k = [a_1, a_2, \dots, a_k]$, $k = 0, \dots, n$.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Пусть $n = 1$. Тогда

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что

$$M_{1n-1} = \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$M_{1n} = \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} + a_n p_{n-1} \\ q_{n-1} & q_{n-2} + a_n q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулами (1). Лемма доказана.

Таким образом, чтобы вычислить обыкновенную дробь, используя ее представление в виде цепной, необходимо вычислить произведение матриц вида (2). Для этого мы применим широко известный принцип разделяй и властвуй (описание дано, например, в [1]).

Опишем предлагаемый метод по индукции. Рассмотрим сначала случаи $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$. Если $n = 1$, то цепная дробь $[a_1]$ уже является обыкновенной. Если $n = 2$, то матрица M_{12} , соответствующая цепной дроби $[a_1, a_2]$, имеет вид

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае производим умножение двух матриц, при этом необходимо конечное число умножений двух чисел длины меньшей, чем $l(a_1) + l(a_2)$. В результате получаем, что

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_1 a_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

В случае $n = 3$ также последовательно выполняем умножение трех матриц

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_2 a_3 + 1 \\ a_1 a_2 + 1 & a_1 + a_3 + a_1 a_2 a_3 \end{pmatrix},$$

что потребует конечное число умножений двух чисел, длины которых меньше, чем $l(a_1) + l(a_2) + l(a_3)$.

Пусть теперь $n > 3$. Пусть

$$N = \sum_{k=1}^n l(a_k).$$

Найдем k_0 , $1 \leq k_0 \leq n$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{k_0-1} l(a_i) < \frac{N}{2}, \quad \sum_{i=1}^{k_0} l(a_i) \geq \frac{N}{2}.$$

Это потребует не больше, чем $O(N)$ действий. Представим произведение (2) в виде

$$M_{1n} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{k_0-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{k_0} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{k_0+1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \right].$$

Таким образом, мы получили представление, в котором произведения матриц в квадратных скобках соответствуют цепным дробям с суммой длин коэффициентов не большей, чем $N/2$, при этом количество множителей в каждом таком произведении меньше n . Следовательно, мы можем использовать индукционное предположение

и применить описанный выше метод для вычисления каждого из произведений в квадратных скобках. Получим произведение трех матриц

$$M_{1n} = M_{1k_0-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{k_0} \end{pmatrix} M_{k_0+1n}.$$

которое вычисляем так же, как и в случае $n = 3$.

Оценим время работы предложенного алгоритма. Пусть $T(N)$ количество битовых операций, необходимых для вычисления обыкновенной дроби по соответствующей цепной по предлагаемому алгоритму, причем суммарная длина коэффициентов этой цепной дроби равна N . Тогда время вычисления каждого произведения матриц в скобках не больше, чем $T(N/2)$. Для вычисления произведения трех матриц потребуется конечное число умножений и сложений чисел длины, меньшей чем N . Таким образом, справедливо неравенство

$$T(N) \leq 2T(N/2) + C\mathcal{M}(N) + O(N),$$

где $\mathcal{M}(N)$ — время умножения двух N -разрядных чисел, C — константа. Поскольку величина $\mathcal{M}(N)$ по крайней мере линейно зависит от N (требуется хотя бы просмотреть число), величина $T(N)$ есть $T(N) = O(\log N \mathcal{M}(N))$. (Это получаем применением индукции по N или использованием оценки для трудоемкости принципа разделяй и властвуй из [1]). Используя алгоритм Шенхаге–Штрассена умножения двух N -разрядных чисел (см., например, описание в [1]) с оценкой трудоемкости $\mathcal{M}(N) = O(N \log N \log \log N)$ битовых операций, окончательно получим, что $T(N) = O(N \log^2 N \log \log N)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Трудоемкость перевода цепной дроби $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ в обыкновенную есть $O(N \log^2 N \log \log N)$ битовых операций, где*

$$N = \sum_{k=1}^n l(a_k).$$

Приведем пример. Пусть дана цепная дробь $[8, 5, 10, 15, 20, 128]$. Запишем соответствующее ей произведение матриц

$$M_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 128 \end{pmatrix}.$$

Здесь $N = 28$, $k_0 = 4$. Расставим скобки в этом произведении

$$M_{16} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 128 \end{pmatrix} \right].$$

Вычислим теперь произведения матриц согласно расставленным скобкам. Получим, что

$$M_{16} = \begin{pmatrix} 5 & 51 \\ 41 & 418 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 128 \\ 20 & 2561 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15400 & 1978498 \\ 126638 & 16072175 \end{pmatrix}.$$

Используя лемму получим, что

$$[8, 5, 10, 15, 20, 58] = \frac{1978498}{16072175}.$$

В заключение отметим, что метод обратного перевода обыкновенных дробей в цепные фактически содержится в быстром алгоритме Евклида для нахождения наибольшего общего делителя целых чисел, где коэффициенты цепной дроби вычисляются в процессе выполнения алгоритма. Время работы быстрого алгоритма Евклида оценивается величиной $O(N \log^2 N \log \log N)$, где N — длина знаменателя обыкновенной дроби [1], что совпадает с полученной оценкой трудоемкости предложенного алгоритма перевода цепной дроби в обыкновенную.

Список литературы

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж., *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. Мир, Москва, 1979.
2. Хинчин А.Я., *Цепные дроби*. Наука, Москва, 1978.

Статья поступила 03.06.1999.