Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Я. Савельев, Случайные соответствия, двоичные матрицы и серии, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 4, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:13:36

Случайные соответствия, двоичные матрицы и серии

© 1999 г. Л. Я. Савельев

В работе рассматриваются некоторые задачи о случайных соответствиях, связанные с сериями в случайных последовательностях. Находятся производящие функции для совместных распределений выбранных характеристик серий в двоичных марковских последовательностях и последовательностях независимых одинаково распределенных случайных переменных. Решаются операторные уравнения, описывающие рассматриваемые распределения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-00540.

1. Введение

Многие комбинаторные задачи удобно формулировать на языке соответствий или на эквивалентном языке двоичных матриц.

1.1. Индексы соответствий

Пусть A и B — конечные множества, составленные из $|A| = m$ и $|B| = n$ элементов. Для простоты можно считать, что $A = \{1, \dots, m\}$ и $B = \{1, \dots, n\}$. Каждое множество $f \subseteq A \times B$ называется соответствием между A и B (или из A в B) и обозначается также $f : A \rightarrow B$. Такое соответствие определяется каждым из семейств $f(x)$, $x \in A$, и $f^{-1}(y)$, $y \in B$, своих образов прообразов. Семейства α и β целых чисел $\alpha(x) = |f(x)|$, $x \in A$, и $\beta(y) = |f^{-1}(y)|$, $y \in B$, назовем прямым и обратным мультииндексами (или просто индексами) соответствия $f : A \rightarrow B$. Каждое соответствие с индексами α и β будем называть $\alpha\beta$ -соответствием. Самые разные комбинаторные задачи сводятся к ответу на вопрос, сколько всего существует $\alpha\beta$ -соответствий $f : A \rightarrow B$ с данными индексами α и β .

К таким задачам относятся классические задачи о подстановках и комбинациях (простых и с повторениями), о разбиениях, о размещениях, о представлении натурального числа суммой, о сериях в последовательностях [1–4].

Важными частными случаями общей задачи о числе $\alpha\beta$ -соответствий являются задача о существовании и единственности таких соответствий.

Рассматривая $\alpha\beta$ -соответствия, удовлетворяющие определенным дополнительным условиям, можно охватить очень широкий класс задач. Некоторые важные задачи связаны, например, с требованием, чтобы определенное на A соответствие

$f: A \rightarrow B$ содержало изоморфизмы $\varphi: A \rightarrow B$ множества A на часть множества B , и подсчетом числа таких изоморфизмов.

1.2. Двоичные матрицы

Для наглядности вместо соответствий можно рассматривать двоичные матрицы с элементами из $\{0, 1\}$. Соответствие $f \subseteq A \times B$ однозначно определяет двоичную матрицу $M = M(f)$ с элементами $M(x, y) = 1$ при $(x, y) \in f$ и $M(x, y) = 0$ при $(x, y) \notin f$. Она является индикатором множества f в декартовом произведении $A \times B$. Назовем ее индикаторной матрицей соответствия f . Каждая двоичная $A \times B$ матрица $M \subseteq (A \times B) \times \{0, 1\}$ является индикаторной матрицей некоторого соответствия $f \subseteq A \times B$. Удобно ввести нумерации и считать, что $A = \{1, \dots, m\}$ и $B = \{1, \dots, n\}$, а матрицу M традиционно записывать в виде таблицы с m строками и n столбцами. Индексам α и β соответствия f отвечают маргинальные суммы элементов матрицы $M = M(f)$ (по строкам и столбцам). Будем эти суммы называть также индексами матрицы M и каждую матрицу с индексами α и β называть $\alpha\beta$ -матрицей. Задача о числе $\alpha\beta$ -соответствий эквивалентна задаче о числе двоичных $\alpha\beta$ -матриц. Двоичным матрицам и связанным с ними задачам посвящена книга [5], обзорная статья [6] и глава 6 книги [7]. Там, в частности, с помощью перманентов решается задача об изоморфизмах.

Нумерации множеств A, B и индикаторная матричная запись позволяет присваивать соответствиям $f: A \rightarrow B$ прямой и обратный мультиномера

$$r(f) = (r_1(f), \dots, r_m(f)), \quad c(f) = (c_1(f), \dots, c_n(f)).$$

Здесь $r_i(f)$ обозначает число, двоичной записью которого является i -я строка матрицы $M(f)$, а $c_j(f)$ число, двоичной записью которого является j -й столбец матрицы $M(f)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Каждый из мультиномеров $r = r(f)$ и $c = c(f)$ однозначно определяют матрицу $M = M(f)$, а вместе с нею и соответствие f . Этим мультиномера существенно отличаются от мультииндексов. Если $m \leq 9$ (или $n \leq 9$), то мультиномер r (или c) является обычным десятичным номером. В некоторых комбинаторных задачах удобно использовать мультиномера соответствий и их индикаторные матрицы.

1.3. Нормы индексов

Мультииндексы α, β и мультиномера r и c являются векторами пространств $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$. При каждом q , $1 \leq q \leq \infty$, для них определена q -норма $|\cdot|_q$. Нормы

$$|\alpha|_1 = \sum_{i=1}^m \alpha(i), \quad |\beta|_1 = \sum_{j=1}^n \beta(j)$$

равны числу единиц в двоичной $\alpha\beta$ -матрице, а нормы

$$|\alpha|_\infty = \max \alpha(i), \quad |\beta|_\infty = \max \beta(j)$$

равны максимальным числам единиц в ее строках и столбцах, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Если $|\alpha|_\infty = 1$, то в каждой строке $\alpha\beta$ -матрицы не больше одной единицы и не все строки нулевые. Аналогичный смысл имеет равенство $|\beta|_\infty = 1$. Комбинация

$|\alpha|_1 = m$, $|\alpha|_\infty = 1$ означает, что в каждой строке $\alpha\beta$ матрицы ровно одна единица. Аналогичный смысл имеет комбинация $|\beta|_1 = n$, $|\beta|_\infty = 1$. Если $m = n$, то эти комбинации эквивалентны и соответствующая $\alpha\beta$ -матрица определяет перестановку элементов множества $A = \{1, \dots, m\}$. Условимся 1-норму обозначать также $|\cdot|$. Для соответствия $f : A \rightarrow B$ нормы прямого и обратного индексов α и β выражаются равенствами

$$|\alpha| = \sum_{x \in A} \alpha(x), \quad |\beta| = \sum_{y \in B} \beta(y)$$

и

$$|\alpha|_\infty = \max_{x \in A} \alpha(x), \quad |\beta|_\infty = \max_{y \in B} \beta(y).$$

Если $|\alpha| = |\beta| = |A| = |B|$ и $|\alpha|_\infty = |\beta|_\infty = 1$, то f есть подстановка A на B . Равенства $|\alpha| = |\alpha|_\infty = |\beta| = |\beta|_\infty = 1$ описывают вырожденные соответствия $f : A \rightarrow B$, при которых одному единственному элементу множества A соответствуют все элементы множества B (все единицы находятся в одной строке матрицы $M(f)$). Если $|\beta| = |\beta|_\infty = |\alpha| = |A|$ и $|\alpha|_\infty = 1$, то при $\alpha\beta$ -соответствии $f : A \rightarrow B$ всем элементам из A соответствует один единственный элемент из B (все единицы находятся в одном столбце матрицы $M(f)$). С помощью норм индексов соответствий можно формулировать многие комбинаторные задачи. В геометрических задачах вместо 1-норм часто удобнее рассматривать евклидовы нормы $|\alpha|_2$ и $|\beta|_2$.

Связь между двоичными матрицами и нормами $|r|_1$, $|r|_2$, $|r|_\infty$ и $|c|_1$, $|c|_2$, $|c|_\infty$ их мультиномеров сложнее, так как эти нормы зависят не только от числа единиц в строках и столбцах, но и от их расположения там.

Возникают обширные классы задач, относящихся к комбинаторике соответствий и формулируемых с помощью норм мультииндексов, норм мультиномеров, а также смешанных задач, в формулировке которых используются и нормы мультииндексов, и нормы мультиномеров.

1.4. Система диофантовых уравнений

Задачу о числе $\alpha\beta$ -соответствий можно сформулировать как задачу об одновременном разбиении двух семейств целых положительных чисел на двоичные слагаемые или как задачу о числе двоичных решений системы аддитивных уравнений с целыми положительными правыми частями.

Пусть $B = \{0, 1\}$ и P есть множество целых положительных чисел. Рассмотрим $m \times n$ матрицу $X = (x_{ij}) \in B^{m \times n}$, m -столбец $M = (\alpha_i) \in P^m$, n -строку $N = (\beta_j) \in P^n$, m -строку C и n -столбец D из единиц. Двоичные $\alpha\beta$ -матрицы составляют множество двоичных решений системы диофантовых уравнений

$$CX = N, \quad XD = M.$$

Задача о числе $\alpha\beta$ -соответствий сводится к задаче о числе двоичных решений этой системы. Для существования решения необходимо равенство

$$CM = ND.$$

Критерии существования двоичного решения в общем и некоторых частных случаях сформулированы в §11 книги [5] и в §6.1 книги [7]. Асимптотические и точные формулы для чисел решений в различных частных случаях даны в [8] и [9].

Задачи о существовании, о единственности, о существовании и единственности $\alpha\beta$ -соответствий эквивалентны аналогичным задачам для двоичных решений системы $CX = N$, $XD = M$.

1.5. Случайные соответствия

Назовем случайными соответствиями элементы вероятностного пространства (U, p) , составленного из множества $U = \mathcal{P}(A \times B)$ всех соответствий $u \subseteq A \times B$ и элементарной вероятности p на U . По определению

$$p(u) \geq 0, \quad u \in U, \quad \sum_{u \in U} p(u) = 1.$$

Событием является любое множество $S \subseteq U$. Его вероятность

$$P(S) = \sum_{u \in S} p(u).$$

В комбинаторных задачах обычно $p(u) = 1/|U|$ и $P(S) = |S|/|U|$. Так как $|U| = 2^{mn}$, где $|A| = m$ и $|B| = n$, вычисление вероятности $P(S)$ в таком пространстве сводится к подсчету числа $|S|$ элементов в множестве S . Например, если F — множество однозначных соответствий $u: A \rightarrow B$, то $|F| = n^m$ и $P(F) = n^m 2^{-mn} = (n2^{-n})^m$. Назовем такое вероятностное пространство (U, p) комбинаторным или пространством Лапласа (LS).

Для каждого числа $a \in [0, 1]$, $|A| = m$, $|B| = n$ равенство

$$p(u) = a^{|u|} (1-a)^{mn-|u|}, \quad u \in U,$$

определяет элементарную вероятность p на $U = \mathcal{P}(A \times B)$. Пространство (U, p) с такой элементарной вероятностью называется пространством Бернулли (BS). В этом пространстве вероятность события F , состоящего в том, что случайное соответствие является однозначным, выражается равенством

$$P(F) = n^m a^m (1-a)^{mn-m},$$

так как $|u| = m$ для каждого однозначного соответствия $u: A \rightarrow B$. При $a = 1/2$ для каждого $u \in U$ верно равенство $p(u) = 2^{-mn}$ и пространство Бернулли превращается в пространство Лапласа.

Иногда бывает удобно рассматривать двойное пространство Бернулли ($2BS$). Элементарная вероятность для него определяется следующим образом. Возьмем разбиение $\{K, L\}$ множества $A \times B$ на множества K и L . Пусть

$$v = Ku, \quad w = Lu, \quad u = v + w, \quad |K| = k, \quad |L| = l, \quad a, b \in [0, 1].$$

Предполагается, что $a \neq b$, хотя формально возможно $a = b$. Равенство

$$p(u) = a^{|v|} b^{|w|} (1-a)^{k-|v|} (1-b)^{l-|w|}, \quad u = v + w \in U,$$

определяет нужную элементарную вероятность p на $U = \mathcal{P}(A \times B)$. По аналогии можно определить элементарную вероятность для тройного и, вообще, кратных пространств Бернулли.

Вероятностные пространства Лапласа и Бернулли подробно описаны в книге [1]. Там много примеров их использования в самых разных областях. В статье [10] рассматривается обобщенное пространство Бернулли (*GBS*), частными случаями которого являются пространства Лапласа и Бернулли.

В матричной интерпретации комбинаторное пространство описывает случай, когда появление в двоичной $m \times n$ матрице любого допустимого семейства единиц и нулей, имеет одну и ту же вероятность 2^{-mn} . В обыкновенном пространстве Бернулли в каждой клетке матрицы 1 или 0 появляются независимо и с одними и теми же вероятностями a и $1 - a$. В двойном пространстве Бернулли клетки разбиты на два класса, K и L , с разными вероятностями a, b и $1 - a, 1 - b$ появления 1 и 0.

Стохастический аналог вопроса о числе $\alpha\beta$ -соответствий формулируется так: какова вероятность того, что случайное соответствие принадлежит данному классу $\alpha\beta$ -соответствий?

Рассматриваемое вероятностное пространство и класс соответствий уточняется для каждой задачи. Естественно возникают вопросы о распределениях и их моментах для числовых характеристик таких классов. Аналогичные задачи можно сформулировать для классов соответствий, определяемых нормами мультиномеров, и вообще для любых классов соответствий.

1.6. Марковские пространства

Некоторые задачи связаны с более общими вероятностными пространствами Маркова (*MS*). В этих пространствах элементарная вероятность определяется с помощью оператора перехода от данной группы значений к следующей. Нужный частный случай марковских пространств и многочисленные примеры их использования подробно описаны в книге [11].

Рассмотрим m -мерное двоичное пространство B^m и функцию

$$Q: B^m \times B^m \rightarrow \mathbf{R}$$

со значениями $q(y, x)$ для $x \in B^m, y \in B^m$ такими, что

$$q(y, x) \geq 0, \quad x, y \in B^m, \quad \sum_{y \in B^m} q(y, x) = 1.$$

Назовем функцию Q оператором перехода. Возьмем еще начальное распределение $a: B^m \rightarrow \mathbf{R}$ со значениями

$$a(x) \geq 0, \quad x \in B^m, \quad \sum_{x \in B^m} a(x) = 1.$$

Матричные равенства

$$p_j = Q^j a, \quad j = 1, 2, \dots,$$

определяют последовательность распределений p_j со значениями

$$p_j(y) \geq 0, \quad y \in B^m, \quad \sum_{y \in B^m} p_j(y) = 1.$$

Распределения a и p_j представляются 2^m -столбцами, а оператор Q определяется $2^m \times 2^m$ матрицей. Умножение производится по правилу строка на столбец:

$$p_1(y) = \sum_x q(y, x)a(x), \quad p_{j+1}(y) = \sum_x q(y, x)p_j(x).$$

Элементарная вероятность p на множестве U всех двоичных $m \times n$ матриц X для вероятностного пространства Маркова (U, p) определяется выбранными начальными распределениями a и оператором перехода Q с помощью равенства

$$p(X) = q(x(n), x(n-1)) \dots q(x(2), x(1))a(x(1)),$$

где $X = (x(1), \dots, x(n))$ — матрица со столбцами $x(j) = (x_{ij})_i \in B^m$, $1 \leq j \leq n$.

Выделяется случай независимых и одинаково распределенных векторов. Он определяется семейством чисел $a_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq m$. Начальное распределение a и оператор перехода Q задаются равенствами

$$a(x) = \prod_{i=1}^m a_i^{x_i} (1 - a_i)^{1-x_i}, \quad q(y, x) = a(y),$$

где $x = (x_i) \in B^m$, $y = (y_i) \in B^m$. В частности, если

$$a_1 = \dots = a_m = a \in [0, 1],$$

то

$$a(x) = a^{|x|} (1 - a)^{m-|x|}, \quad q(y, x) = a^{|y|} (1 - a)^{m-|y|}.$$

Здесь начальное распределение a и параметр обозначены одной и той же буквой a . По определению

$$|x| = \sum_{i=1}^m x_i, \quad |y| = \sum_{j=1}^m y_j.$$

В этом случае

$$p(X) = a^{|u|} (1 - a)^{mn-|u|}, \quad |u| = \sum_{j=1}^n |x(j)|.$$

Отождествляя соответствие $u \subseteq A \times B$ для $A = \{1, \dots, m\}$ и $B = \{1, \dots, n\}$ с его индикаторной матрицей X получаем пространство Бернулли. Ясно, что при $a(x) = q(y, x) = 2^{-m}$ пространство Маркова превращается в пространство Лапласа.

Данное определение пространства Маркова выделяет в качестве основных элементов столбцы рассматриваемых двоичных матриц. Это связано с предполагаемым его использованием для решения задач определенного типа. В общем случае можно рассматривать произвольные простые или сложные марковские последовательности, составленные из элементов матриц. Можно, например, упорядочить элементы лексикографически $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$, выбрать начальное распределение $a(1) = a$, $a(0) = 1 - a$ и матрицу перехода с элементами $q(0, 0), q(1, 0), q(0, 1), q(1, 1) \geq 0$, $q(0, 0) + q(1, 0) + q(0, 1) + q(1, 1) = 1$. Пространства Маркова можно использовать в случаях, когда появление единиц и нулей в одних клетках двоичной матрицы определенным образом зависит от результатов заполнения других. Понятие марковского поля позволяет не упорядочивать элементы матрицы, когда нет согласованного с условиями задачи порядка. Дискретные марковские поля описаны в книге [12]. Задачи, связанные с марковскими полями, более трудные.

1.7. Двоичные номера

Занумеровав элементы двоичной $m \times n$ матрицы $X = (x_{ij})$, можно присвоить ей двоичный номер

$$\nu = \sum_{k=1}^{mn} c(k)2^{k-1},$$

где $c(k)$ обозначает элемент x_{ij} с номером k . Тот же номер можно присвоить и представляемому матрицей X соответствию $u \in U = \mathcal{P}(A \times B)$ между множествами $A = \{1, \dots, m\}$ и $B = \{1, \dots, n\}$. Это позволяет вместо вероятностного пространства (U, p) рассматривать вероятностное пространство (N, p) , составленное из множества номеров $N = \{0, 1, \dots, 2^{mn} - 1\}$ и элементарной вероятности p на нем:

$$p(\nu) \geq 0, \quad \nu \in N, \quad \sum_{\nu \in N} p(\nu) = 1.$$

Событиями тогда будут произвольные множества номеров из N , в частности, множество $N(\alpha, \beta)$ номеров всех $\alpha\beta$ -соответствий с данными индексами α и β . Не ясно, обладают ли множества $N(\alpha, \beta)$ при подходящих нумерациях (например, лексикографической) какими-нибудь особыми свойствами. Но использование номеров позволяет просто описать некоторые другие свойства соответствий и двоичных матриц.

Вместо двоичного номера ν матрице X можно поставить в соответствие двоичную дробь

$$\omega = \sum_{k=1}^{mn} c(k)2^{-k}$$

и заменить U на множество

$$\Omega = \{\omega = \nu 2^{-mn} \mid \nu \in N\}$$

таких дробей. Вероятностные пространства (Ω, p) с различными вероятностями

$$p(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega, \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1,$$

используются при решении некоторых задач теории чисел. Такие задачи подробно описаны в книге [13].

Пример 1. Приведем пример, поясняющий сложный по внешнему виду характер зависимости между номерами матриц и их вероятностями. Пусть $m = n = 2$ и

$$c(1) = x_{11}, \quad c(2) = x_{12}, \quad c(3) = x_{21}, \quad c(4) = x_{22}.$$

Тогда пространству Бернулли (U, p) с параметром $a = 3/4$ соответствует пространство (N, p) с множеством $N = \{0, 1, \dots, 15\}$ и элементарной вероятностью p , определяемой таблицей

ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$2^8 p(\nu)$	1	3	3	9	3	9	9	27	3	9	9	27	9	27	27	81

Среднее значение случайной величины ν равно 11,25, а номер $\nu = 11$ имеет матрица

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с элементами $x_{11} = 1$, $x_{12} = 1$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 1$.

1.8. Задачи о сериях

Будут рассматриваться два класса задач, формулируемых с использованием двоичных матриц и связанных с рангами их специальных миноров. К первому классу относятся задачи о числовых характеристиках серий в последовательностях. Этим задачам посвящена основная часть статьи. Ко второму классу относятся задачи о некоторых системах массового обслуживания.

Рассмотрим двоичную $(l + m) \times n$ матрицу

$$X = (x_{ij}), \quad l \geq 0, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1,$$

у которой в каждом столбце ровно одна единица. Это $\alpha\beta$ -матрица с индексом

$$\beta = (\beta(j)), \quad \beta(j) = \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad 1 \leq j \leq n,$$

и индексом

$$\alpha = (\alpha(i)), \quad \alpha(i) = \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha(i) = n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Обозначим $M(\alpha)$ множество всех таких матриц. Их число равно

$$|M(\alpha)| = \binom{n}{\alpha(1)} \binom{n - \alpha(1)}{\alpha(2)} \dots \binom{n - \alpha(1) - \dots - \alpha(n-1)}{\alpha(n)}.$$

Будем говорить, что в матрице X есть i -серия длины k , если

$$x_{ij} = 0, \quad x_{i,j+1} = \dots = x_{i,j+k} = 1, \quad x_{i,j+k+1} = 0$$

при некотором $j \geq 0$ и добавленных $x_{ij} = 0$ при $j < 1$ и $j > n$. Когда номер i строки не важен, будем его опускать. Минор, составленный из столбцов с номерами $j + 1, \dots, j + k$, содержащими при некотором i элементы $x_{i,j+1} = \dots = x_{i,j+k} = 1$ серии длины k , назовем полосой длины k . Каждая матрица $X \in M(\alpha)$ разбивается на такие полосы. Они имеют ранг 1, а при добавлении одного из соседних столбцов полученные расширенные полосы имеют ранг 2. Таким образом, разбиение матрицы X на полосы по сериям единиц в строках эквивалентно разбиению ее на полосы минимального ранга. В частности, если в матрице X есть строка из единиц, то сама матрица является полосой и имеет ранг 1. Нулевых столбцов в матрицах множества $M(\alpha)$ нет и поэтому составленные из столбцов этих матриц миноры имеют ранг, не меньший 1.

Условимся для наглядности первые l строк матрицы X с номерами $1, \dots, l$ называть красными, а последние m строк с номерами $l + 1, \dots, l + m$ черными. Соответственно красными и черными будем называть серии единиц в этих строках и полосы, в которых они содержатся. При $l = 0$ все m строк $m \times n$ матрицы являются черными.

Выбрав подходящее вероятностное пространство можно сформулировать с помощью двоичных матриц из множества $M(\alpha)$ много разнообразных задач, связанных с сериями в случайных последовательностях. Мы исследуем распределения некоторых числовых характеристик красных, черных и любых полос в таких случайных матрицах. Например, общее число полос, число полос данного цвета, максимальную ширину всех полос или полос данного цвета.

1.9. Задача о пакетном обслуживании

Рассмотрим систему m автоматов с номерами $1, \dots, m$ и последовательность заявок на выполнение работ с теми же номерами. Автомат с номером i может выполнять работу с номером i и только ее. Обслуживание системой автоматов последовательности заявок осуществляется пакетами по следующим правилам. Первым обслуживается пакет из $l(1)$ заявок на $l(1)$ различных работ. Число $l(1)$ составляющих этот пакет заявок определяется условием, что $(n(1) + 1)$ -я заявка при $n(1) = l(1)$ повторяет одну из заявок пакета. Остальные пакеты определяются индуктивно. Если k -й пакет оканчивается $n(k)$ -й заявкой, и $(n(k) + 1)$ -я заявка повторяет одну из заявок k -го пакета, то $(k + 1)$ -й пакет формируется так же, как первый: он составляется из $l(k + 1)$ следующих за $n(k)$ -й заявок на $l(k + 1)$ различных работ. Число $l(k + 1)$ составляющих $(k + 1)$ -й пакет заявок определяется условием, что $(n(k + 1) + 1)$ -я заявка при $n(k + 1) = n(k) + l(k + 1)$ повторяет одну из заявок $(k + 1)$ -го пакета. Ясно, что $1 \leq l(k) \leq m$, так как число заявок в каждом пакете не больше числа автоматов. Каждый пакет заявок обслуживается системой автоматов за одну единицу времени. Если заявки составляют случайную последовательность, то эффективность работы описанной системы обслуживания можно оценить средним числом l заявок в пакете. Такая система будет за t единиц времени в среднем обслуживать $n = lt$ заявок. На одну заявку при пакетном обслуживании тратится в среднем в l раз меньше времени, чем при отдельном обслуживании каждой заявки.

Замечание 1. Сформулированная задача о пакетном обслуживании является модификацией предложенной Л. Н. Королевым задачи об оценке эффективности блочной организации памяти компьютера.

Будем рассматривать те же матрицы X из множества $M(\alpha)$, что и в пункте 1.8. По-прежнему условимся называть полосами составленные из соседних столбцов миноры этих матриц. Но теперь разобьем матрицу X на полосы максимального ранга. Такая полоса и в каждой строке имеет ровно одну единицу, а при добавлении одного из соседних столбцов в полученной расширенной полосе появляется строка с двумя единицами. Это значит, что ранг полосы максимального ранга равен ее ширине и не может быть увеличен добавлением одного из соседних столбцов.

Применительно к рассматриваемой задаче будем считать, что $l = 0$ и множество $M(\alpha)$ состоит из $m \times n$ матриц X . Каждая такая матрица разбивается на полосы максимального ранга. Они соответствуют пакетам в последовательности n заявок. Нужно исследовать распределение ширины полос максимального ранга случайной матрицы.

Тот же самый процесс обслуживания можно описать с помощью двоичных $m \times t$ матриц $X = (x(1), \dots, x(t))$, в которых норма

$$\beta(k) = |x(k)| = \sum_{i=1}^t x_{ik}$$

столбца $x(k)$ равна числу заявок в k -м пакете, $1 \leq k \leq t$. Равенство $x_{ik} = 1$ означает, что в k -м пакете есть заявка на i -ю работу, а $x_{ik} = 0$ означает, что такой заявки нет.

Предположим, что последовательность заявок лапласова: заявки независимы, каждая работа имеет одну и ту же вероятность m^{-1} и каждая последовательность из n заявок имеет одну и ту же вероятность m^{-n} . Столбцы $x(k)$ матрицы X , описывающей такую последовательность заявок, составляют марковскую последовательность

с начальными вероятностями

$$P(x(1) = x) = a(x) = \frac{1}{m} \prod_{s=1}^{|x|} \left(1 - \frac{s}{m}\right)$$

и переходными вероятностями

$$P(x(k+1) = y \mid x(k) = x) = q(y, x) = \frac{|x|}{m} \prod_{s=1}^{|y|} \left(1 - \frac{s}{m}\right)$$

для $1 \leq k \leq t$. Если $|x| = 1$ или $|y| = 1$, то соответствующие произведения равны 1 и $a(x) = 1/m$, $q(y, x) = |x|/m$. Индексы α и β случайной матрицы X являются случайными векторами, а их координаты $\alpha(i)$ и $\beta(k)$ случайными величинами. Случайная величина $\alpha(i)$ описывает число заявок на i -ю работу. Случайная величина $\beta(k)$ описывает число заявок в k -м пакете. Сумма

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha(i) = \sum_{k=1}^t \beta_k = |\beta|$$

описывает общее число заявок в t пакетах, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq t$. Представляют интерес распределения всех этих случайных величин и векторов, их средние и дисперсии.

1.10. Дополнительное время обслуживания

Будем в последовательности заявок вместо номера работы записывать 1 или 0 в соответствии с тем, требуется на обслуживание данной заявки дополнительное время или она обслуживается вместе с некоторыми предыдущими. Получится двоичная последовательность. Если последовательность заявок была лапласовской, то эта двоичная последовательность будет марковской. Обозначим ее $(\Delta(j))$, $j \geq 1$, и добавим к ней значения $\Delta_{-(m-2)} = \dots = \Delta_0 = 0$. Получится последовательность m -мерных двоичных векторов $\bar{\Delta}(j) = (\Delta_{j-m+1}, \dots, \Delta_j)$. Определим для нее начальные и переходные вероятности равенствами

$$a(0 \dots 01) = 1, \quad q(y, x) = \frac{l}{m} y_1 + \left(1 - \frac{l}{m}\right) (1 - y_1),$$

при

$$\begin{aligned} y &= y_1 x_1 \dots x_{m-1}, & x &= x_1 \dots x_{m-1} x_m, \\ x_i &= 0, & 1 \leq i < l, \\ x_l &= 1, & 1 \leq l \leq m, \end{aligned}$$

и $q(y, x) = 0$ в остальных случаях. Кроме того, положим $q(10 \dots 0, 0 \dots 00) = 1$.

Марковскую последовательность векторов $(\bar{\Delta}(j))$ можно получить из марковской последовательности $(x(k))$ столбцов матрицы X , описанной в п. 1.9. Это связано с частичным укрупнением значений (ср. [11], §6.3). Векторы $x = (x_i)$, $1 \leq i \leq m$, с нормой $|x| = l$ объединяются в множество, которому соответствует вектор $\delta = (\delta_i)$

с координатами $\delta_i = 0$, $1 \leq i < l$, $\delta_l = 1$ и условия в переходных вероятностях для обшей последовательности определяются величиной l .

Число единиц в последовательности $(\Delta(j))$ равно числу пакетов. Длины 0-серий в ней равны числам заявок в пакетах, следующих за первой. Если за единицей не следует нуль, то соответствующий пакет состоит из одной заявки. Переход к дополнительным временам обслуживания связывает задачи о сериях с задачами о пакетном обслуживании. Полученные в работе [4] распределения характеристик серий в случайных последовательностях можно использовать для оценки эффективности рассматриваемого процесса пакетного обслуживания. Специфика последовательности $(\Delta(j))$ позволяет подробно исследовать некоторые из этих распределений.

2. Марковские последовательности

Все рассматриваемые здесь распределения для характеристик серий в случайных последовательностях описываются системами уравнений и производящими функциями, полученными в [4]. В исследуемых частных случаях они имеют сравнительно простой вид и дают возможность вычислять нужные вероятности.

2.1. Общий случай

Для удобства ссылок будем использовать введенные в [4] обозначения, упростив их в соответствии с задачей.

2.1.1. Рассмотрим марковскую последовательность (ξ_n) случайных величин ξ_n , $n \geq 0$, со значениями в конечном множестве $C = \{1, \dots, |C|\}$. Элементы множества C отождествлены с их выбранными номерами. Обозначим $P = (p_\delta)$ вектор начальных вероятностей и $Q = (q_{\gamma\delta})$ матрицу переходных вероятностей:

$$p_\delta = P(\xi_0 = \delta), \quad q_{\gamma\delta} = P(\xi_n = \delta \mid \xi_{n-1} = \gamma), \quad \gamma \in C, \quad \delta \in C, \quad n \geq 1.$$

Разобьем множество C на части A_ν и положим

$$B_\nu = C \setminus A_\nu, \quad \nu \in \Gamma, \quad \Gamma = \{1, \dots, |\Gamma|\}.$$

Введем индикаторы $u_{n\nu} = A_n u(\xi_n)$, равные 1 при $\xi_n \in A_\nu$ и равные 0 при $\xi_n \in B_\nu$. Случайные величины

$$\begin{aligned} x_{n\nu} &= \sum_{l \leq n} u_{l\nu}, \\ y_{n\nu} &= \sum_{l \leq n} \max(0, u_{l\nu} - u_{l-1,\nu}), \\ z_{n\nu} &= \max_{l \leq n} \sum_{l \leq m \leq n} \prod_{l \leq k \leq m} u_{k\nu} \end{aligned}$$

описывают соответственно число ν -событий $\xi_l \in A_\nu$, число ν -серий из таких событий и максимум длин таких ν -серий в последовательности (ξ_l) случайных переменных ξ_l , $0 \leq l \leq n$.

Пусть $x_n = (x_{n\nu})$, $y_n = (y_{n\nu})$, $z_n = (z_{n\nu})$ и $i = (i(\nu))$, $j = (j(\nu))$, $k = (k(\nu))$, где $\nu \in \Gamma$ и $i(\nu)$, $j(\nu)$, $k(\nu) \in \mathbf{Z}$, причем $k(\nu) \geq 0$. Множества $R, S, T \subseteq \Gamma$ определяют векторы

$$\begin{aligned} Rx_n &= (R(\nu)x_{n\nu}), & Sy_n &= (S(\nu)y_{n\nu}), & Tz_n &= (T(\nu)z_{n\nu}), \\ Ri &= (R(\nu)i(\nu)), & Sj &= (S(\nu)j(\nu)), & Tk &= (T(\nu)k(\nu)). \end{aligned}$$

Здесь множество $X \subseteq \Gamma$ отождествлено со своим индикатором на Γ и $X(\nu) = 1$, $X(\nu) = 0$ означают соответственно $\nu \in X$, $\nu \notin X$. Равенства $Rx_n = Ri$, $Sy_n = Sj$ и неравенство $Tz_n \leq Tk$ означают соответственно $x_{n\rho} = i(\rho)$, $y_{n\rho} = j(\rho)$ и $z_{n\tau} \leq k(\tau)$ для всех $\rho \in R$, $\sigma \in S$ и $\tau \in T$. Эти соотношения верны для пустых множеств R, S, T . Заметим, что для каждого $\delta \in C$ существует единственный элемент $\mu = \mu(\delta) \in \Gamma$ такой, что $\delta \in A_\mu$, $A_\mu(\delta) = 1$. Положим $m = k(\mu)$. Рассмотрим еще векторы $e = (e(\nu))$ и $e_\mu = (e_\mu(\nu))$ с координатами $e(\nu) = 1$ и $e_\mu(\nu) = 1$ при $\nu = \mu$, $e_\mu(\nu) = 0$ при $\nu \neq \mu$. Множества R, S, T определяют векторы Re , Se , Te и Re_μ , Se_μ , Te_μ .

2.1.2. Совместные распределения случайных величин $x_{n\rho}$, $y_{n\sigma}$, $z_{n\tau}$ для $\rho \in R$, $\sigma \in S$, $\tau \in T$ определяются вероятностями

$$\begin{aligned} f_\delta(i, j, k, n) &= \mathbf{P}(Rx_n = Ri, Sy_n = Sj, Tz_n \leq Tk, \xi_n = \delta), \\ f(i, j, k, n) &= \mathbf{P}(Rx_n = Ri, Sy_n = Sj, Tz_n \leq Tk). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$f(i, j, k, n) = \sum_{\delta} f_\delta(i, j, k, n).$$

Выбирая подходящие множества R, S, T , можно получить совместные распределения любых комбинаций случайных величин $x_{n\rho}$, $y_{n\sigma}$, $z_{n\tau}$. Добавление значения $\xi_n = \delta$ позволяет использовать марковское свойство.

Для каждого $n > m$ и $A \subseteq C$ положим

$$q_{\gamma\delta}^{mn} = \mathbf{P}(\xi_{n-m} \in A, \dots, \xi_{n-1} \in A, \xi_n = \delta \mid \xi_{n-m-1} = \gamma).$$

В частности, $q_{\gamma\delta}^{0n} = q_{\gamma\delta} A(\delta)$ при $\delta \in A$ и $q_{\gamma\delta}^{0n} = 0$ при $\delta \notin A$. Если $m > 0$, то верно равенство

$$q_{\gamma\delta}^{mn}(A) = \sum_{\beta} q_{\gamma\beta}^{0n}(A) q_{\beta\delta}^{m-1,n}(A).$$

Оно позволяет последовательно вычислять вероятности $q_{\gamma\delta}^{mn}(A)$. Если $A = C$, то $q_{\gamma\delta}^{0n}(A) = q_{\gamma\delta}$. Положим еще $f_\delta(i, j, k, n) = 0$ при $n < 0$. Заметим, что $f_\delta(i, j, k, n) = 0$ при $n > 0$, если $Ri \not\geq 0$ или $Sj \not\geq 0$. Кроме того,

$$f_\delta(i, j, k, n) = \begin{cases} p_\delta, & \text{если } Ri = Re_\mu, Sj = Se_\mu, Tk \geq Te_\mu, \\ 0, & \text{если } Ri \neq Re_\mu, \text{ или } Sj \neq Se_\mu, \text{ или } Tk \not\geq Te_\mu. \end{cases}$$

Следующая теорема есть следствие соотношения (2.2) из [4].

Теорема 1. При $n > 0$

$$\begin{aligned} f_\delta(i, j, k, n) &= \sum_{\gamma} f_\gamma(i - e_\mu, j - B_\mu(\gamma), k, n - 1) q_{\gamma\delta} \\ &\quad - T(\mu) \sum_{\gamma} f_\gamma(i - (m + 1)e_\mu, j - e_\mu, k, n - m - 1) B_\mu(\gamma) q_{\gamma\delta}^{mn}(A_\mu). \end{aligned}$$

Эти равенства позволяют последовательно вычислять вероятности $f_\delta(i, j, k, n)$ для данных R, S, T и k . Заметим, что

$$q_{\gamma\delta}^{mn}(A_\mu) = 0, \quad 0 \leq n \leq m.$$

Положим

$$a_\nu = \mathbf{P}(\xi_0 \in A_\nu) = \sum_{\delta} p_\delta A_\nu(\delta).$$

Тогда для последовательности независимых случайных переменных ξ_n с распределением $P = (p_\delta)$ верны равенства (см. [4], (2.4))

$$q_{\gamma\delta}^{mn}(A_\mu) = a_\mu^m p_\delta, \quad 0 \leq n \leq m.$$

В [4] (см. соотношение (2.5) в [4]) приведены примеры формул для $f_\delta(i, j, k, n)$.

Вероятности $f(i, j, k, n)$ вычисляются как суммы $f_\delta(i, j, k, n)$. А вероятности

$$p(i, j, k, n) = \mathbf{P}(Rx_n = Ri, Sy_n = Sj, Tz_n = Tk)$$

вычисляются с помощью $f(i, j, k, n)$ по формуле

$$p(i, j, k, n) = \sum_{MCT} (-1)^{|M|} f(i, j, k - Me, n)$$

(см. (2.3) в [4]). В частности, если $T = \{1\}$, $k = k(1)$, $M = O, T$ и $|M| = 0, 1$, то

$$p(i, j, k, n) = f(i, j, k, n) - f(i, j, k - 1, n).$$

А если $T = \{1, 2\}$, $k = (k(1), k(2))$, $M = O, \{1\}, \{2\}, T$ и $|M| = 0, 1, 1, 2$, то

$$\begin{aligned} p(i, j, k, n) = & f(i, j, (k(1), k(2)), n) - f(i, j, (k(1) - 1, k(2)), n) \\ & - f(i, j, (k(1), k(2) - 1), n) + f(i, j, (k(1) - 1, k(2) - 1), n). \end{aligned}$$

2.1.3. Запишем равенства для вероятностей $f_\delta(i, j, k, n)$ в эквивалентной матричной форме. Рассмотрим $|C|$ -строки

$$F(i, j, k, n) = (f_\delta(i, j, k, n))$$

и $O = (0, \dots, 0)$, $E = (1, \dots, 1)$. Кроме множества $A \subseteq C$ и его индикатора буквой A обозначим еще диагональную $|C| \times |C|$ матрицу с элементами $A(\delta)$ на диагонали. В частности, $C = I$. Положим

$$Q^{mn}(A) = (q_{\gamma\delta}^{mn}(A)).$$

Теорема 1 эквивалентна следующему утверждению.

Теорема 2. При $n > 0$

$$\begin{aligned} F(i, j, k, n) = & \sum_{\mu} (F(i - e_\mu, j, k, n - 1)A_\mu + F(i - e_\mu, j - e_\mu, k, n - 1)B_\mu)QA \\ & - \sum_{\mu} T(\mu)F(i - (m + 1)e_\mu, j - e_\mu, k, n - m - 1)B_\mu Q^{mn}(A_\mu). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$F((i, j, k, n) = 0, \text{ если } n < 0, \text{ или } Ri \neq 0, \text{ или } Sj \neq 0,$$

$$F((i, j, k, 0) = \sum_{\mu} (1 - (1 - (1 \wedge m))T(\mu))\chi(i - e_{\mu}, j - e_{\mu}, 0, 0)PA_{\mu},$$

где

$$\chi(i, j, m, n) = \begin{cases} 1, & Ri = Sj = 0, m = n = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим

$$A_{\mu\mu} = A_{\mu}QA_{\mu}, \quad B_{\mu\mu} = B_{\mu}QA_{\mu}.$$

Из определений следует, что

$$T(\mu)B_{\mu}Q^{mn}(A_{\mu}) = 0, \quad 0 < n < m,$$

$$B_{\mu}Q^{mn}(A_{\mu}) = \begin{cases} B_{\mu} \cdot E^*P \cdot A_{\mu}A_{\mu}^m, & 0 < n = m, \\ B_{\mu\mu}A_{\mu\mu}^m, & 0 \leq m < n. \end{cases}$$

Для последовательности независимых случайных переменных ξ_n с распределением $P = (p_{\delta})$ верны равенства

$$Q = E^*P, \quad A_{\mu\mu} = A_{\mu}(E^*P)A_{\mu}, \quad B_{\mu\mu} = B_{\mu}(E^*P)A_{\mu}.$$

В [4] (см. (3.5) в [4]) приведен пример вычисления матриц $A_{\mu\mu}$, $B_{\mu\mu}$ и $B_{\mu\mu}A_{\mu\mu}^m$. Другой пример будет рассмотрен в п. 2.3.1.

2.1.4. Рассмотрим семейства $s = (s_{\nu})$, $t = (t_{\nu})$ вещественных чисел s_{ν} , t_{ν} с абсолютными значениями $|s_{\nu}| \leq 1$, $|t_{\nu}| \leq 1$, $\nu \in \Gamma$, и мультистепени

$$s^{Ri} = \prod_{\rho \in R} s_{\rho}^{i(\rho)}, \quad t^{Sj} = \prod_{\sigma \in S} t_{\sigma}^{j(\sigma)}.$$

При $0 < |u| < 1$ для каждого $k = (k(\nu))$ равенства

$$\hat{f}(s, t, k, u) = \sum_{i, j, n} f(i, j, k, n) s^{Ri} t^{Sj} u^n,$$

$$\hat{F}(s, t, k, u) = \sum_{i, j, n} F(i, j, k, n) s^{Ri} t^{Sj} u^n$$

определяют скалярную и векторную производящие функции $\hat{f}$ и $\hat{F}$. Заметим, что

$$\hat{f}(s, t, k, u) = \hat{F}(s, t, k, u)E^*.$$

В [4] доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для функции $\hat{F}$ верно равенство

$$\hat{F}(I - Ku) = L,$$

где

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\mu} (A_{\mu\mu} s^{Re_{\mu}} + B_{\mu\mu} D_{\mu}), \\ L &= \sum_{\mu} P A_{\mu} D_{\mu}, \\ D_{\mu} &= I - T(\mu) A_{\mu\mu}^m s^{m Re_{\mu}} t^{S e_{\mu}} u^m. \end{aligned}$$

Матрицы Q , $A_{\mu\mu}$, $B_{\mu\mu}$, D_{μ} и K представляют ограниченные линейные операторы в пространстве $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1(C)$. Причем $\|Q\| = 1$ и $\|K\| \leq 3|\Gamma|$. Поэтому при $|u| < (1/3|\Gamma|)$ рассматриваемое уравнение корректно и функция $\hat{F}$ разлагается в ряд Неймана:

$$\hat{F} = L(I - Ku)^{-1} = L \sum K^n u^n.$$

Вместе с нею и функция $\hat{f} = \hat{F}E^*$ разлагается в ряд

$$\hat{f} = L(I - Ku)^{-1} E^* = L \sum (K^n E^*) u^n.$$

Другое выражение для функции $\hat{f}$ можно получить, решая систему уравнений

$$\hat{f} \cdot 1 - \hat{F}E^* = 0, \quad \hat{f} \cdot 0 + \hat{F}(I - Ku) = L.$$

Если $|u| < (1/3|\Gamma|)$, то эта система корректна и

$$\hat{f} = \frac{1}{\det(I - Ku)} \det \begin{pmatrix} 0 & L \\ -E^* & I - Ku \end{pmatrix}.$$

Во многих частных случаях удается получить удобные формулы для коэффициентов $f(i, j, k, n)$ разложения рациональной функции $\hat{f}$ в степенной ряд. Эти формулы хорошо программируются и позволяют вычислять нужные вероятности. Примеры производящих функций $\hat{f}$ есть в [4]. Для решения некоторых прикладных задач были проделаны конкретные вычисления в [14, 15].

2.2. Двоичные последовательности

Эти последовательности сравнительно просты и их можно исследовать достаточно подробно.

2.2.1. Чтобы использовать стандартные матричные обозначения возьмем $C = \Gamma = \{1, 2\}$, присвоив нулю номер 2, и положим $A_1 = \{1\}$ и $A_2 = \{2\}$. Вектор начальных вероятностей и матрица переходных вероятностей для рассматриваемой двоичной марковской последовательности (ξ_j) , $j \geq 0$, имеют вид

$$P = (p_1, p_2) = (a, 1 - a), \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix}$$

где $0 \leq a, \alpha, \beta \leq 1$.

Рассмотрим случайные векторы

$$x_n = (x_{n1}, x_{n2}), \quad y_n = (y_{n1}, y_{n2}), \quad z_n = (z_{n1}, z_{n2}),$$

описывающие число ν -событий, число ν -серий и максимум длин ν -серий в последовательности (ξ_j) , $0 \leq j \leq n$. Так как $x_{n1} + x_{n2} = n$ и $|y_{n1} - y_{n2}| \leq 1$, целесообразно ограничиться исследованием $x_{n1}, y_{n1}, z_{n1}, z_{n2}$, то есть, взять

$$R = S = \{1\}, \quad T = \{1, 2\}$$

и соответственно $s^{Ri} = s_1, t^{Sj} = t_1$. Положим для простоты $s = s_1, t = t_1, k(1) = k, k(2) = l$. Используя обозначения теоремы 3, получаем, что

$$K = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha s & (1 - \alpha)(1 - \beta^l u^l) \\ (1 - \beta)st(1 - \alpha^k s^k u^k) & \beta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$L = (d_1, d_2) = (ast(1 - \alpha^k s^k u^k), (1 - a)(1 - \beta^l u^l)), \quad (2)$$

$$\hat{f}(s, t, k, l, u) = g(s, t, k, l, u)/h(s, t, k, l, u),$$

где

$$g(s, t, k, l, u) = a(1 - \alpha^k s^k u^k)((1 - \beta u) + (1 - \alpha)(1 - \beta^l u^l)u)st \quad (3)$$

$$+ ((1 - a)(1 - \beta^l u^l)((1 - \alpha su) + (1 - \alpha^k s^k u^k)(1 - \beta)stu),$$

$$h(s, t, k, l, u) = (1 - \alpha su)((1 - \beta u) \quad (4)$$

$$- (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \alpha^k s^k u^k)(1 - \beta^l u^l)stu^2.$$

Если $|u| < 1/6$, то $h(s, t, k, l, u) \neq 0$.

При $\alpha = a, \beta = 1 - a$ получается производящая функция для последовательности Бернулли. Равенства (3) и (4) в этом случае несколько упрощаются. Они становятся еще проще в симметричном случае $\alpha = a = \beta = 1/2$ и при дополнительном условии $k = l$, когда рассматривается общий максимум длин 1-серий и 2-серий (0-серий).

2.2.2. Нетрудно проверить, что

$$g = \sum_{0 \leq \sigma \leq 9} a_\sigma x_\sigma, \quad h = 1 - \sum_{1 \leq \tau \leq 7} b_\tau y_\tau,$$

где коэффициенты a, b и переменные x, y определяются таблицами

σ	a_σ	x_σ	τ	b_τ	y_τ
0	$1 - a$	1			
1	a	st	1	β	u
2	$-(1 - a)\alpha$	su	2	α	su
3	$a(1 - \alpha) + (1 - a)(1 - \beta) - a\beta$	stu	3	$-\alpha\beta$	su^2
4	$-(1 - a)\beta^l$	u^l	4	$(1 - \alpha)(1 - \beta)$	stu^2
5	$(1 - a)\alpha\beta^l$	su^{l+1}	5	$-(1 - \alpha)(1 - \beta)\beta^l$	stu^{l+2}
6	$-(a(1 - \alpha) + (1 - a)(1 - \beta))\beta^l$	stu^{l+1}	6	$-(1 - \alpha)(1 - \beta)\alpha^k$	$s^{k+1}tu^{k+2}$
7	$-a\alpha^k$	$s^{k+1}tu^k$	7	$(1 - \alpha)(1 - \beta)\alpha^k\beta^l$	$s^{k+1}tu^{k+l+2}$
8	$-(a(1 - \alpha) + (1 - a)(1 - \beta) - a\beta)\alpha^k$	$s^{k+1}tu^{k+1}$			
9	$(a(1 - \alpha) + (1 - a)(1 - \beta))\alpha^k\beta^l$	$s^{k+1}tu^{k+l+1}$			

Используя равенства $s = 1, t = 1, k = \infty, l = \infty, u^\infty = 0$ и складывая соответствующие коэффициенты, можно получить производящие функции для любых $R \subseteq \{1\}, S \subseteq \{1\}, T \subseteq \{1, 2\}$. Выпишем некоторые из них.

Пусть $R = \{1\}, S = T = 0$. Тогда $t = 1, k = l = \infty$ и распределение числа единиц описывает функция

$$\hat{f}(s, 1, \infty, \infty, u) = \frac{1 - a - as - (1 - \alpha - \beta)su}{1 - \beta u - \alpha su - (1 - \alpha - \beta)su^2}.$$

Пусть $S = \{1\}$ и $R = T = 0$. Тогда $s = 1, k = l = \infty$ и распределение числа 1-серий описывает функция

$$\hat{f}(1, t, \infty, \infty, u) = \frac{1 - a - at - (1 - a)\alpha u + (1 - a\alpha - \beta)tu}{1 - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta u^2 - (1 - \alpha)(1 - \beta)tu^2}.$$

Пусть $R = S = 0, T = \{1\}$. Тогда $t = s = 1, l = \infty$ и распределение максимума длин 1-серий описывает функция

$$\hat{f}(1, 1, \infty, \infty, u) = \frac{1 + (1 - \alpha - \beta)u - a\alpha^k u^k - (1 - a\alpha - \beta)\alpha^k u^{k+1}}{1 - (\alpha + \beta)u - (1 - \alpha - \beta)u^2 + (1 - \alpha)(1 - \beta)\alpha^k u^{k+2}}.$$

Пусть $R = S = \{1\}$ и $T = 0$. Тогда $k = l = \infty$ и совместное распределение числа единиц и числа 1-серий описывает функция

$$\hat{f}(s, t, \infty, \infty, u) = \frac{1 - a - ast - (1 - a)\alpha su + (1 - a\alpha - \beta)stu}{1 - \beta u - \alpha su + \alpha\beta su^2 - (1 - \alpha)(1 - \beta)stu^2}.$$

При $S = 0, R = T = \{1\}$ и $R = 0, S = T = \{1\}$ получаются функции $\hat{f}(s, 1, k, \infty, u)$ и $\hat{f}(1, t, k, \infty, u)$, описывающие соответственно совместные распределения числа единиц и числа 1-серий с максимумами длин 1-серий (пар x_{n1}, z_{n1} и y_{n1}, z_{n1}).

2.2.3 Вычислим коэффициенты при степенях переменных s, t, u в ряде

$$\hat{f} = \sum_{m \geq 0} (LK^m E^*) u^m,$$

где матрицы K и L определяются равенствами (1) и (2). Эти коэффициенты равны вероятностям $f(i, j, k, l, n)$. Пусть

$$K^m = \begin{pmatrix} c_{11}(m) & c_{12}(m) \\ c_{21}(m) & c_{22}(m) \end{pmatrix}.$$

В частности, $c_{\gamma\delta}(1) = c_{\gamma\delta}$, $1 \leq \gamma, \delta \leq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} c_{11}(0) = c_{22}(0) = 1, \quad c_{12}(0) = c_{21}(0) = 0, \\ c_{\gamma\delta}(m) = c_{\gamma 1}(m-1)c_{1\delta} + c_{\gamma 2}(m-1)c_{2\delta} \end{aligned} \quad (5)$$

для $1 \leq \gamma, \delta \leq 2$ и $n > 0$. Из определений следует, что

$$c_{\gamma\delta}(m) = \sum_{\varepsilon} c_{\gamma\delta\varepsilon}(m), \quad (6)$$

где $c_{\gamma\delta\varepsilon}(m) = c_{\gamma\varepsilon(1)}c_{\varepsilon(1)\varepsilon(2)} \cdots c_{\varepsilon(m-1)\delta}$, $\varepsilon = (\varepsilon(n))$, $1 \leq \varepsilon(n) \leq 2$, $1 \leq n < m$, и

$$LK^m E^* = \sum_{\gamma, \delta} d_{\gamma} c_{\gamma\delta}(m). \quad (7)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} d_1 c_{1\delta\varepsilon}(m) &= \sum_{\mu, \nu} d_1(\mu, \nu) s^{p+r+1+k\nu} t^{r+1} u^{l\mu+k\nu}, \\ d_2 c_{2\delta\varepsilon}(m) &= \sum_{\mu, \nu} d_2(\mu, \nu) s^{p+r+k\nu} t^r u^{l\mu+k\nu}, \end{aligned}$$

где

$$p = p(\gamma, \delta, \varepsilon, m), \quad q = q(\gamma, \delta, \varepsilon, m), \quad r = r(\gamma, \delta, \varepsilon, m), \quad w = w(\gamma, \delta, \varepsilon, m)$$

обозначают соответственно кратности множителей c_{11} , c_{12} , c_{21} , c_{22} в произведении $c_{\gamma\delta\varepsilon}(m)$ и

$$\begin{aligned} d_1(\mu, \nu) &= ac(p, q, r, w)(-1)^{\mu+\nu} \binom{q}{\mu} \binom{r+1}{\nu} \alpha^{k\nu} \beta^{l\nu}, \\ d_2(\mu, \nu) &= (1-a)c(p, q, r, w)(-1)^{\mu+\nu} \binom{q+1}{\mu} \binom{r}{\nu} \alpha^{k\nu} \beta^{l\nu}, \\ c(p, q, r, w) &= \alpha^p (1-\alpha)^q (1-\beta)^r \beta^w. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения для $d_{\gamma c_{\gamma\delta\varepsilon}}(m)$ в сумму (7) и складывая коэффициенты при степенях $s^i t^j u^{n-m}$ для $m = 0, 1, \dots, n$, получаем вероятности

$$f(i, j, k, l, n) = \Sigma^{(1)} d_1(\mu, \nu) + \Sigma^{(2)} d_2(\mu, \nu). \quad (8)$$

Первая сумма состоит из коэффициентов при степенях с показателями

$$p + r + 1 + k\nu = i, \quad r + 1 = j, \quad k\nu + l\mu + m = n.$$

Для второй суммы слагаемые $d_2(\mu, \nu)$ определяются равенствами

$$p + r + k\nu = i, \quad r = j, \quad k\nu + l\mu + m = n.$$

Замечание 2. Для не слишком больших значений n компьютерные вычисления по формулам (1), (2) и (5), (7) или (6), (8) не представляют большого труда. Особенно эффективны последовательные вычисления с использованием (5). В частных случаях, описанных в п. 2.2.2, вычисления существенно упрощаются.

2.2.4 Разложение в ряд рациональной производящей функции $\hat{f} = g/h$, определяемой равенствами (3) и (4), также позволяют вычислять вероятности $f(i, j, k, l, n)$.

Так как $|s| \leq 1$, $|t| \leq 1$, при некотором $\delta > 0$

$$|\sum b_\tau y_\tau| < 1, \quad |u| \leq \delta.$$

Пусть $|u| \leq \delta$. Тогда.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} &= \left(1 - \sum_\tau b_\tau y_\tau\right)^{-1} = \sum_m \left(\sum_\tau b_\tau y_\tau\right)^m = \sum_m \sum_\varepsilon \binom{m}{\varepsilon} b^\varepsilon y^\varepsilon, \\ \frac{g}{h} &= \sum_m \sum_{\sigma, \varepsilon} \binom{m}{\varepsilon} a_\sigma b^\varepsilon x_\sigma y^\varepsilon, \quad b^\varepsilon = \prod_\tau b_\tau^{\varepsilon(\tau)}, \quad y^\varepsilon = \prod_\tau y_\tau^{\varepsilon(\tau)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $m \geq 0$, $0 \leq \sigma \leq 9$, $1 \leq \tau \leq 7$, $\varepsilon = (\varepsilon(\tau))$, $y = (y_\tau)$ и a_σ , x_σ , b_τ , y_τ определены таблицами п. 2.2.2. Положим

$$|\varepsilon| = \sum_\tau \varepsilon(\tau), \quad \varepsilon! = \prod_\tau (\varepsilon(\tau)!).$$

По определению

$$\binom{m}{\varepsilon} = \frac{m!}{\varepsilon!}, \quad |\varepsilon| = m, \quad \binom{m}{\varepsilon} = 0, \quad |\varepsilon| \neq m.$$

Складывая коэффициенты при $s^i t^j u^n$ в сумме (9), получаем нужные вероятности. Пусть $|\varepsilon| = m$ и

$$\begin{aligned} p &= m - \varepsilon(1) + k(\varepsilon(6) + \varepsilon(7)), \\ q &= m - \varepsilon(1) - \varepsilon(2) - \varepsilon(3), \\ r &= 2m - \varepsilon(1) - \varepsilon(2) + k(\varepsilon(6) + \varepsilon(7)) + l(\varepsilon(5) + \varepsilon(7)), \\ z(p, q, r) &= s^p t^q u^r. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда

$$y^\varepsilon = z(p, q, r)$$

и

$$\begin{aligned} x_0 y^\varepsilon &= z(p, q, r), \\ x_1 y^\varepsilon &= z(p+1, q+1, r), \\ x_2 y^\varepsilon &= z(p+1, q, r+1), \\ x_3 y^\varepsilon &= z(p+1, q+1, r+1), \\ x_4 y^\varepsilon &= z(p, q, r+l), \\ x_5 y^\varepsilon &= z(p+1, q, r+l+1), \\ x_6 y^\varepsilon &= z(p+1, q+1, r+l+1), \\ x_7 y^\varepsilon &= z(p+1+k, q+1, r+k), \\ x_8 y^\varepsilon &= z(p+1+k, q+1, r+k+1), \\ x_9 y^\varepsilon &= z(p+1+k, q+1, r+k+1+l). \end{aligned}$$

Поэтому коэффициент $f(i, j, k, l, n)$ при $s^i t^j u^n$ в сумме (9) выражается равенством

$$f(i, j, k, l, n) = \sum_{\sigma} a_{\sigma} \sum_{\varepsilon}^{(\sigma)} \binom{|\varepsilon|}{\varepsilon} b^{\varepsilon}. \tag{11}$$

Слагаемые в сумме с индексом σ определяются равенствами (10) и таблицей, приведенной ниже.

σ	p	q	r
0	i	j	n
1	$i-1$	$j-1$	n
2	$i-1$	j	$n-1$
3	$i-1$	$j-1$	$n-1$
4	i	j	$n-l$
5	$i-1$	j	$n-1-l$
6	$i-1$	$j-1$	$n-1-l$
7	$i-1-k$	$j-1$	$n-k$
8	$i-1-k$	$j-1$	$n-1-k$
9	$i-1-k$	$j-1$	$n-1-k-l$

Пример 2. Если $\sigma = 0$, то суммирование ведется по мультииндексам ε , для которых $|\varepsilon| = m$ и

$$\begin{aligned} m - \varepsilon(1) + k(\varepsilon(6) + \varepsilon(7)) &= i, \\ m - \varepsilon(1) - \varepsilon(2) - \varepsilon(3) &= j, \\ 2m - \varepsilon(1) - \varepsilon(2) + k(\varepsilon(6) + \varepsilon(7)) + l(\varepsilon(5) + \varepsilon(7)) &= n. \end{aligned}$$

При $\sigma = 4$ в последнем равенстве n заменяется на $n - l$. Пусть $i = j = 0$. Тогда равенство $|\varepsilon| = m$ эквивалентно равенствам $\varepsilon(1) = m$, $\varepsilon(\tau) = 0$, $\tau \neq 1$, и $m = n$ для $\sigma = 0$, $m = n - l$ для $\sigma = 4$. Суммы со всеми другими индексами σ равны нулю, так как для этих индексов $p < 0$ или $q < 0$ и область суммирования пуста. Если $n < l$, то и сумма с индексом $\sigma = 4$ равна нулю. Заметим, что

$$\sum^{(\sigma)} \binom{m}{\varepsilon} b^\varepsilon = \binom{m}{m} b_1^m = \beta^m$$

при $\sigma = 0$, $\varepsilon(1) = m = n$ и при $\sigma = 4$, $\varepsilon(1) = m = n - l \geq 0$. Так как $a_0 = 1 - a$ и $a_4 = 1(1 - a)\beta^l$, из формулы (11) следует, что

$$\begin{aligned} f(0, 0, k, l, n) &= (1 - a)\beta^n, & n < l, \\ f(0, 0, k, l, n) &= (1 - a)\beta^n - (1 - a)\beta^l \beta^{n-l} = 0, & n \geq l. \end{aligned}$$

Эти равенства выражают вероятность полной 2-серии $\xi_0 = \dots = \xi_n = 2$.

Точно так же нетрудно проверить, что из формулы (11) следуют равенства

$$\begin{aligned} f(n+1, 1, k, l, n) &= a_1 \sum^{(1)} \binom{n}{\varepsilon(2)} b_2^{\varepsilon(2)} = a\alpha^n, & n < k, \\ f(n+1, 1, k, l, n) &= a_1 \sum^{(1)} \binom{n}{\varepsilon(2)} b_2^{\varepsilon(2)} + a_7 \sum^{(7)} \binom{n-k}{\varepsilon(2)} b_2^{\varepsilon(2)} \\ &= a\alpha^n - a\alpha^k \alpha^{n-k} = 0, & n \geq k. \end{aligned}$$

Эти равенства выражают вероятность полной 1-серии $\xi_0 = \dots = \xi_n = 1$.

Замечание 3. Формула (11) удобна для компьютерных вычислений по стандартным программам, в которых предусмотрены действия с мультиномиалами. С помощью полученных значений $f(i, j, k, l, n)$ по формулам п. 2.1.2 легко вычислить вероятности $\mathbf{P}(x_n = i, y_n = j, z_n = k, w_n = l)$. Некоторое наглядное представление можно получить по графикам совместных распределений пар рассматриваемых случайных величин. Было бы интересно дать удобное графическое представление для троек и всей четверки. Для троек можно использовать массивные точки в трехмерном пространстве.

В частных случаях, описанных в п. 2.2.2, вычисления по формулам (8) и (11) существенно упрощаются вместе с таблицами для коэффициентов и показателей степеней. Они становятся совсем простыми для последовательности Бернулли.

3. Последовательности независимых одинаково распределенных переменных

Если рассматривать только общий максимум длин серий выбранных значений, то для последовательностей независимых одинаково распределенных случайных вели-

чин производящая функция $\hat{f}$ имеет сравнительно простой вид.

3.1. Производящая функция

Рассмотрим последовательность (ξ_n) независимых одинаково распределенных случайных переменных ξ_n , $n \geq 1$, со значениями в множестве $C = \{1, \dots, m\}$ и общим распределением $P = (p_1, \dots, p_m)$. Она является частным случаем марковской последовательности с матрицей $Q = E^*P$ переходных вероятностей.

Пусть $A = \{1, \dots, l\}$, $1 \leq l \leq m$. Значения

$$f(k, n) = \mathbf{P}(z_{n1} < k, \dots, z_{nl} < k)$$

функции распределения случайных величин $z(n) = \max\{z_{n1}, \dots, z_{nl}\}$ получаются из вероятностей $f(i, j, k, l, n-1)$ при $\Gamma = C$, $A_\gamma = \{\gamma\}$ и $R = S = 0$, $T = A$, $k_1 = \dots = k_l = k-1$, так как в марковской модели $n \geq 0$ и $z(n) \leq k$. В рассматриваемом случае $m \times m$ матрица $I - Ku = (a_{ij})$ и $1 \times m$ матрица $L = (b_j)$ в представлении для $\hat{f}$ в п. 2.1.4 имеют элементы

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1 - p_i u, & a_{ij} &= p_j^k u^k - p_j u, & 1 \leq j \leq l, & j \neq i, \\ a_{ij} &= -p_i u, & & & l < j \leq m, & j \neq i, \\ b_j &= p_j - p_j^k u^{k-1}, & & & 1 \leq j \leq l, & b_j = p_j, \quad l < j \leq m. \end{aligned}$$

В самом деле, используя обозначения пунктов 2.1.3 и 2.1.4, полагая $\mu = j$ и $m = k-1$, находим, что

$$\begin{aligned} A_{jj} &= p_j A_j, & B_{jj} &= Q A_j - A_{jj}, & T(j) &= A A_j, & D_j &= I - p_j^{k-1} A A_j u^{k-1}, \\ K &= \sum_j (Q A_j - p_j (Q - p_j I) A A_j u^{k-1}) = Q - R, & I - Ku &= I - Qu + Ru^k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R &= \sum_j p_j^{k-1} (Q - p_j I) A A_j = (r_{ij}), \\ r_{ii} &= 0, & r_{ij} &= p_j^k, & 1 \leq j \leq l, & j \neq i, \\ r_{ij} &= 0, & & & l < j \leq m. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$L = P \sum_j A_j D_j = P \sum_j A_j (I - p_j^{k-1} A A_j u^{k-1}) = P \left(I - \sum_j p_j^{k-1} A A_j u^{k-1} \right).$$

Пусть

$$g(u) = \det \begin{pmatrix} 0 & L \\ -E^* & I - Ku \end{pmatrix}, \quad h(u) = \det(I - Ku).$$

Тогда из теоремы 3 в п. 2.1.4 следует, что

$$\hat{f} = \frac{g(u)}{h(u)}.$$

Это отношение несложно вычислить.

3.2. Вычисление определителей

Вычислим сначала определитель $h(u)$. Воспользуемся тем, что в матрице $I - Ku$ строки отличаются только диагональными элементами.

Вычтем первую строку из остальных в определителе $h(u)$, а потом в полученном определителе вычтем вторую строку из всех следующих. В каждом столбце нового определителя $h_1(u)$, кроме второго, останется не больше двух ненулевых элементов (один в первой строке, а другой на диагонали). Разлагая этот определитель по элементам первого столбца, получаем сумму произведения диагональных элементов и определителя $h_2(u)$ такого же типа, что и $h_1(u)$. Определитель $h_2(u)$ тоже равен сумме произведения диагональных элементов и определителя $h_3(u)$ того же типа. Продолжая эту процедуру и используя найденные выражения для $h_i(u)$, получаем определитель $h(u)$:

$$h(u) = p(u) \left(1 - \sum_{1 \leq i \leq l} \frac{1 - p_i^{k-1} u^{k-1}}{1 - p_i^k u^k} p_i u - qu \right),$$

где

$$p(u) = \prod_{1 \leq i \leq l} (1 - p_i^k u^k), \quad q = \sum_{l < i \leq m} p_i.$$

Если $l = m$, то $q = 0$. При вычислениях использовалось равенство

$$1 - p_1 u = (1 - p_1^k u^k) + (p_1^k u^k - p_1 u).$$

Вычислим теперь определитель $g(u)$. Вычитая вторую строку из всех следующих, получаем определитель с единственным ненулевым элементом -1 в первом столбце. Используя это, получаем определитель $g_1(u)$, который отличается от $h(u)$ только элементами первой строки. Вычисляя $g_1(u)$, как $h(u)$, находим, что

$$g(u) = p(u).$$

Следовательно, производящая функция $\hat{f}$ имеет вид

$$\hat{f}(u) = \left(1 - \sum_{1 \leq i \leq l} \frac{1 - p_i^{k-1} u^{k-1}}{1 - p_i^k u^k} p_i u - qu \right)^{-1}. \quad (12)$$

Из (12) получаются формулы (7)–(11) для обобщенных последовательностей Бернулли и ее частных случаев, выведенные в [10].

3.3. Разложение в ряд

Разложение в ряд производящей функции $\hat{f}$ с помощью равенства (12) позволяет вычислять нужные вероятности $f(k, n)$.

Пусть $x_0 = qu$, $x_i = p_i u$, $1 \leq i \leq m$. Тогда при $|u| \leq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ верны

равенства

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(u) &= \sum_{m \geq 0} \left(x_0 + \sum_i (x_i - x_i^k)(1 - x_i^k)^{-1} \right)^m \\
 &= \sum_{m \geq 0} \sum_{\alpha} \binom{m}{\alpha} x_0^{\alpha(0)} \prod_i (x_i - x_i^k)^{\alpha(i)} (1 - x_i^k)^{-\alpha(i)}, \\
 \alpha &= (\alpha(0), \alpha(i)), \quad |\alpha| = \alpha(0) + \sum_i \alpha(i) = m, \\
 (x_i - x_i^k)^{\alpha(i)} &= \sum_{\beta(i)} (-1)^{\beta(i)} \binom{\alpha(i)}{\beta(i)} x^{k\beta(i)} x^{\alpha(i)-\beta(i)}, \\
 (1 - x_i^k)^{-\alpha(i)} &= \sum_{\gamma(i)} (-1)^{\gamma(i)} \binom{-\alpha(i)}{\gamma(i)} x^{k\gamma(i)} = \sum_{\gamma(i)} \binom{\alpha(i) + \gamma(i) - 1}{\gamma(i)} x^{k\gamma(i)}.
 \end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha(0) = \nu$ и $\alpha = (\alpha(i))$, $\beta = (\beta(i))$, $\gamma = (\gamma(i))$, $1 \leq i \leq l$. Положим

$$\begin{aligned}
 \binom{\alpha}{\beta} &= \prod_i \binom{\alpha(i)}{\beta(i)}, \\
 \binom{\alpha + \gamma - 1}{\gamma} &= \prod_i \binom{\alpha(i) + \gamma(i) - 1}{\gamma(i)}, \\
 p^{\alpha + (k-1)\beta + k\gamma} &= \prod_i p_i^{\alpha(i) + (k-1)\beta(i) + k\gamma(i)}, \\
 c(\nu, k, n) &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (-1)^{|\beta|} \binom{\nu + |\alpha|}{\nu, \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \binom{\alpha + \gamma - 1}{\gamma} p^{\alpha + (k-1)\beta + k\gamma}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Суммирование производится по мультииндексам α, β, γ , для которых

$$|\alpha| + (k-1)|\beta| + k|\gamma| = n - \nu.$$

Произведение $q^\nu c(\nu, k, n)$ является коэффициентом при u^n . Поэтому

$$f(k, n) = \sum_{0 \leq \nu \leq n} q^\nu c(\nu, k, n). \quad (14)$$

Если $l = m$ и $q = 0$, то $q^0 = 1$ и $q^\nu = 0$ при $\nu > 0$. Кроме того,

$$\binom{0 + |\alpha|}{0, \alpha} = \binom{|\alpha|}{\alpha}.$$

В этом случае (13) и (14) приводят к равенству

$$f(k, n) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (-1)^{|\beta|} \binom{|\alpha|}{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \binom{\alpha + \gamma - 1}{\gamma} p^{\alpha + (k-1)\beta + k\gamma}. \quad (15)$$

Суммирование в формуле (15) проводится по мультииндексам α, β, γ , для которых

$$|\alpha| + (k-1)|\beta| + k|\gamma| = n.$$

Замечание 4. Формулы (13) и (14) позволяют производить компьютерные вычисления вероятностей $f(k, n)$ с использованием стандартных программ, в которых предусмотрены действия с биномиальными и полиномиальными коэффициентами. В частности, с помощью (14) и (15) получаются таблицы 1 и 2 из [10], вычисленные там по другим формулам.

Список литературы

1. Савельев Л.Я., *Комбинаторика и вероятность*. Наука, Новосибирск, 1975.
2. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
3. Колчин В.Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
4. Savelyev L.Ya., Operator and recursion equations for runs in random sequences. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. VSP, Utrecht, 1997, pp. 65–86.
5. Тараканов В.Е., *Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы*. Наука, Москва, 1985.
6. Brualdi R.A., Matrices of zeros and ones with fixed row and column sum vectors. *Linear Algebra Appl.* (1980) **33**, 159–231.
7. Райзер Г.Дж., *Комбинаторная математика*. Мир, Москва, 1966.
8. Минеев М.П., Павлов А.П., О числе $(0, 1)$ -матриц с заданными суммами по строкам и столбцам. *Докл. АН СССР* (1976) **230**, 271–274.
9. Johnsen B., Straum E., Counting binary matrices with given row and column sums. *Math. Comp.* (1987) **48**, 737–750.
10. Савельев Л.Я., Максимумы длин серий в обобщенных последовательностях Бернулли. *Дискретная математика* (1999) **11**, №1, 29–52.
11. Кемени Дж., Снелл Дж., *Конечные цепи Маркова*. Наука, Москва, 1970.
12. Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А., *Счетные цепи Маркова*. Наука, Москва, 1987.
13. Кац М., *Статистическая независимость в теории вероятностей, анализа и теории чисел*. ИЛ, Москва, 1963.
14. Савельев Л.Я., Характеристики серий в случайных последовательностях. В кн.: *Математические проблемы экологии*. ИМ СО РАН, Новосибирск, 1996, с. 32–39.
15. Величко В.М., Крылов Э.Г., Савельев Л.Я., Оценка надежности распознавания дискретной речи при лингвистических ограничениях. *Вычислительные системы* (1984) **101**, 56–69.

Статья поступила 28.08.1999.