Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Предельные теоремы для умеренно до-
критического ветвящегося процесса в случайной среде,
Дискрет. матем., 1998, том 10, выпуск 1, 141–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:24:43

УДК 519.2

Предельные теоремы для умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде

© 1998 г. В. И. Афанасьев

Пусть $\{\xi_n\}$ — умеренно докритический ветвящийся процесс в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями, m_n — условное математическое ожидание ξ_n относительно случайной среды. Доказаны теоремы о сходимости по распределению при $n \rightarrow \infty$ последовательности случайных процессов $\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\}$, а также начального и конечного отрезков случайной последовательности $\xi_0/m_0, \xi_1/m_1, \dots, \xi_n/m_n$, рассматриваемой при условии $\{\xi_n > 0\}$.

1. Пусть последовательности случайных величин

$$\pi_n = \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \pi_n^{(2)}, \dots\}, \quad \pi_n^{(i)} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} = 1, \quad n, i \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

одинаково распределены и независимы при разных n . Введем производящие функции

$$f_n(s) = \pi_n^{(0)} + \pi_n^{(1)}s + \pi_n^{(2)}s^2 + \dots, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbf{N}_0$, называется ветвящимся процессом в случайной среде $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, если

$$\mathbf{M}(s^{\xi_n+1} \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n) = (f_n(s))^{\xi_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

(для простоты изложения будем считать, что $\xi_0 = 1$).

В [1] дана классификация ветвящихся процессов в случайной среде в зависимости от знака $\mathbf{M} \ln f'_0(1)$: если $\mathbf{M} \ln f'_0(1) > 0$, то процесс надкритический, если $\mathbf{M} \ln f'_0(1) = 0$, то процесс критический, и если $\mathbf{M} \ln f'_0(1) < 0$, то процесс докритический.

В свою очередь, в [2] установлено, что асимптотика вероятности невырождения докритического ветвящегося процесса в случайной среде существенно зависит от знака $\mathbf{M}(f'_0(1) \ln f'_0(1))$. В [3] докритический ветвящийся процесс в случайной среде назван строго докритическим, если

$$\mathbf{M}(f'_0(1) \ln f'_0(1)) < 0,$$

и это объясняется тем, что вероятность невырождения процесса в этом случае ведет себя асимптотически так же, как и в случае классического докритического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона (см. [12]). Промежуточное положение между критическим и строго докритическим случаями занимает умеренно докритический ветвящийся процесс в случайной среде, определяемый неравенствами

$$\mathbf{M} \ln f'_0(1) < 0, \quad \mathbf{M}(f'_0(1) \ln f'_0(1)) > 0$$

(асимптотика вероятности невырождения процесса в этом случае приведена ниже в лемме 5 и следствии из нее).

В [4] для критического ветвящегося процесса в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями при некоторых условиях установлено, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu,$$

где m_k — математическое ожидание ξ_k при фиксированной среде, μ — случайный процесс с положительными постоянными реализациями на $(0, 1]$, знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ в этом соотношении означает сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1]$ с топологией Скорохода [5] при любом фиксированном $u \in (0, 1)$.

Положим

$$X_n = \ln f'_{n-1}(1), \quad \eta_n = f''_{n-1}(1)/(2f'_{n-1}(1)^2), \quad n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

В настоящей работе устанавливается следующая функциональная предельная теорема.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — умеренно докритический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}$, дробно-линейны. Пусть конечны $\mathbf{M} \exp |X_1|$, $\mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1)$ и, если случайная величина X_1 решетчатая, то она имеет атом в нуле. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu,$$

где μ — случайный процесс с положительными постоянными реализациями на $(0, 1)$, знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1-u]$ с топологией Скорохода при любом фиксированном $u \in (0, 1/2)$.

Теорему 1 дополняет следующий результат, касающийся начального и конечного отрезков случайной последовательности $\xi_0/m_0, \xi_1/m_1, \dots, \xi_n/m_n$, рассматриваемой при условии $\{\xi_n > 0\}$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 при любых фиксированных $k, l \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_0/m_0, \xi_1/m_1, \dots, \xi_k/m_k; \xi_{n-l}/m_{n-l}, \xi_{n-l+1}/m_{n-l+1}, \dots, \xi_n/m_n \mid \xi_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k; \psi_l, \psi_{l-1}, \dots, \psi_0\}, \quad (2)$$

где $\{\varphi_i, i \in \mathbf{N}_0\}$, $\{\psi_i, i \in \mathbf{N}_0\}$ — некоторые случайные последовательности, причем при $i \rightarrow \infty$

$$\varphi_i \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (3)$$

$$\psi_i \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (4)$$

где μ — случайная величина из теоремы 1.

2. В силу требований, предъявляемых к случайной среде $\{\pi_n\}$, пары случайных величин $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ независимы и одинаково распределены. Введем случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Снос этого блуждания отрицательный, поскольку

$$\mathbf{M}X_1 = \mathbf{M} \ln f'_0(1) < 0$$

и процесс $\{\xi_n\}$ докритический. Рассмотрим функцию $\Theta(t) = \mathbf{M} \exp(tX_1)$. Согласно условию $\mathbf{M} \exp |X_1| < \infty$, она определена при $t \in [0, 1]$ и

$$\Theta''(t) = \mathbf{M}(X_1^2 \exp(tX_1)) > 0, \quad t \in (0, 1),$$

поэтому функция $\Theta'(t) = \mathbf{M}(X_1 \exp(tX_1))$ возрастает на $(0, 1)$. Далее,

$$\lim_{t \downarrow 0} \Theta'(t) = \mathbf{M}X_1 < 0,$$

$$\lim_{t \uparrow 1} \Theta'(t) = \mathbf{M}(X_1 \exp X_1) = \mathbf{M}(f'_0(1) \ln f'_0(1)) > 0,$$

поскольку процесс $\{\xi_n\}$ умеренно докритический. Таким образом, существует единственная точка $\tau \in (0, 1)$, в которой функция $\Theta(t)$, $t \in [0, 1]$, достигает своего минимума $\gamma < 1$.

Из сказанного вытекает, что случайное блуждание $\{S_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (A) $\mathbf{M}X_1 < 0$;
- (B) функция $\Theta(t)$ определена при $t \in [0, a]$, где $0 < a$ — постоянная;
- (C) функция $\Theta(t)$, $t \in [0, a]$, достигает своего минимума $\gamma < 1$ в точке $\tau \in (0, a)$;
- (D) случайная величина X_1 имеет атом в нуле, если она решетчатая.

Приведем некоторые результаты, полученные для случайного блуждания, удовлетворяющего свойствам (A)–(D). Пусть $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ — строгие нижние лестничные моменты, то есть

$$\tau_1 = \inf\{n: S_n < 0\}, \quad \tau_2 = \inf\{n > \tau_1: S_n < S_{\tau_1}\}, \dots$$

В [6] установлено, что при любых фиксированных $k, l \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{S_0, S_1, \dots, S_k; S_{n-l}, S_{n-l+1}, \dots, S_{n-1}, S_n \mid \tau_1 > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{S_0^{(1)}, S_1^{(1)}, \dots, S_k^{(1)}; S_l^{(2)}, S_{l-1}^{(2)}, \dots, S_1^{(2)}, S_0^{(2)}\}, \quad (5)$$

где $\{S_k^{(1)}, k \in \mathbf{N}_0\}$ и $\{S_l^{(2)}, l \in \mathbf{N}_0\}$ — независимые стационарные марковские цепи.

В [7] показано, что при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \sim c_1^{(j)} \frac{\gamma^n}{n^{3/2}}, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}(\tau_j = n) \sim c_2^{(j)} \frac{\gamma^n}{n^{3/2}}, \quad (7)$$

где $c_1^{(j)}, c_2^{(j)}$ — положительные постоянные. Заметим, что соотношение (5) при $k = l = 0$ и соотношение (6) при $j = 1$ были получены в [8]. В [7] также установлено, что при любом фиксированном $\lambda > \tau$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}e^{-\lambda\mu_n} \sim c(\lambda) \frac{\gamma^n}{n^{3/2}}, \quad (8)$$

и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \gamma^{-n} \mathbf{M}(e^{-\lambda\mu_n}; \tau_m \leq n) = 0, \quad (9)$$

где

$$\mu_n = \max_{0 \leq i \leq n} (-S_i),$$

$c(\lambda) > 0$ не зависит от n (доказательство (9) содержится в доказательстве леммы 10 работы [7]).

3. Установим несколько вспомогательных результатов для случайного блуждания $\{S_n\}$, удовлетворяющего условиям (A)–(D). Для этого нам потребуется следующая лемма, доказанная в [9].

Лемма 1. Пусть последовательность $\{c_{m,r}; m, r \in \mathbf{N}_0\}$ ограничена,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} c_{m,r} &= c'_m, & \lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,r} &= c''_r, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} p_n n^{3/2} \gamma^{-n} &= p, & \lim_{n \rightarrow \infty} q_n n^{3/2} \gamma^{-n} &= q. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n c_{m,n-m} p_m q_{n-m} n^{3/2} \gamma^{-n} = pQ + qP,$$

где

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} c'_m p_m \gamma^{-m}, \quad Q = \sum_{m=0}^{\infty} c''_m q_m \gamma^{-m}.$$

Обобщим соотношение (5). Положим

$$\zeta_n^{k,l} = \{S_0, S_1, \dots, S_k; S_{n-l}, S_{n-l+1}, \dots, S_n\}.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (A)–(D). Тогда при любых фиксированных $k, l \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$ случайные векторы

$$\{\zeta_n^{k,l} \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}, \quad \{\zeta_n^{k,l} \mid \tau_j = n\}$$

сходятся по распределению при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Чтобы установить утверждение леммы, покажем, что при любых фиксированных $k, l \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$ и любом борелевском множестве $B \subset \mathbf{R}^{k+l+2}$ существуют

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = P_j^{k,l}(B), \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_j = n) = Q_j^{k,l}(B), \quad (11)$$

где $P_j^{k,l}, Q_j^{k,l}$ — некоторые собственные распределения. Соотношения (10), (11) докажем по индукции.

В [6] установлено соотношение (10) при $j = 1$. Покажем справедливость соотношения (11) при $j = 1$. Запишем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_1 = n) &= \mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_1 > n - 1) \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n - 1)}{\mathbf{P}(\tau_1 = n)} \\ &\quad - \mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_1 > n) \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n)}{\mathbf{P}(\tau_1 = n)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Положим при фиксированном $x \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{P}(\{\zeta_{n-1}^{k,l-1}, S_{n-1} + x\} \in B \mid \tau_1 > n - 1) = F_n(x).$$

Поскольку

$$\zeta_n^{k,l} = \{\zeta_{n-1}^{k,l-1}, S_{n-1} + X_n\}$$

и X_n не зависит от $\zeta_{n-1}^{k,l-1}, S_{n-1}, \{\tau_1 > n - 1\}$, то

$$\mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_1 > n - 1) = \mathbf{M}F_n(X_n) = \mathbf{M}F_n(X_1). \quad (13)$$

Ввиду справедливости соотношения (10) при $j = 1$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

при всех $x \in \mathbf{R}$, откуда, переходя в (13) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_1 > n - 1) = \mathbf{M}F(X_1). \quad (14)$$

Из соотношений (6), (7), (10) (при $j = 1$), (12) и (14) следует соотношение (11) при $j = 1$.

Пусть (11) справедливо при некотором $j \in \mathbf{N}$. Запишем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_{j+1} = n) \\ = \frac{1}{\mathbf{P}(\tau_{j+1} = n)} \sum_{m=j}^{n-1} c_{m,r} \mathbf{P}(\tau_j = m) \mathbf{P}(\tau_{j+1} - \tau_j = n - m), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$c_{m,r} = \mathbf{P}(\zeta_{m+r}^{k,l} \in B \mid \tau_j = m, \tau_{j+1} - \tau_j = r).$$

Покажем, что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,r}$. Положим

$$S'_i = S_{\tau_j+i} - S_{\tau_j}, \quad i \in \mathbf{N}_0; \quad \tau_{j+1} - \tau_j = \tau'_1.$$

Пусть $m > k + l$.

Рассмотрим сначала случай, когда $l \leq r$. Очевидно,

$$c_{m,r} = \mathbf{P}(\{S_0, \dots, S_k; S_m + S'_{r-l}, \dots, S_m + S'_r\} \in B \mid \tau_j = m, \tau'_1 = r).$$

Положим при фиксированных $x_0, x_1, \dots, x_l \in \mathbf{R}$

$$G_m(x_0, x_1, \dots, x_l) = \mathbf{P}(\{S_0, \dots, S_k; S_m + x_0, S_m + x_1, \dots, S_m + x_l\} \in B \mid \tau_j = m).$$

Случайная последовательность $\{S'_i\}$ образует точную вероятностную копию случайного блуждания $\{S_i\}$ и не зависит от $S_1, \dots, S_{\tau_j}$, причем τ'_1 является первым строгим нижним лестничным моментом для $\{S'_n\}$, поэтому

$$\begin{aligned} c_{m,r} &= \mathbf{M}[G_m(S'_{r-l}, S'_{r-l+1}, \dots, S'_r) \mid \tau'_1 = r] \\ &= \mathbf{M}[G_m(S_{r-l}, S_{r-l+1}, \dots, S_r) \mid \tau_1 = r]. \end{aligned}$$

По предположению индукции при любых $x_0, x_1, \dots, x_l \in \mathbf{R}$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_m(x_0, x_1, \dots, x_l) = G(x_0, x_1, \dots, x_l).$$

Таким образом, существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,r} = \mathbf{M}[G(S_{r-l}, S_{r-l+1}, \dots, S_r) \mid \tau_1 = r].$$

Теперь рассмотрим случай, когда $l > r$. Тогда

$$c_{m,r} = \mathbf{P}(\{S_0, \dots, S_k; S_{m+r-l}, \dots, S_m, S_m + S'_1, \dots, S_m + S'_r\} \in B \mid \tau_j = m, \tau'_1 = r).$$

Положим при фиксированных $x_1, \dots, x_r \in \mathbf{R}$

$$H_m(x_1, \dots, x_r) = \mathbf{P}(\{S_0, \dots, S_k; S_{m+r-l}, \dots, S_m, S_m + x_1, \dots, S_m + x_r\} \in B \mid \tau_j = m),$$

тогда

$$c_{m,r} = \mathbf{M}[H_m(S'_1, \dots, S'_r) \mid \tau'_1 = r] = \mathbf{M}[H_m(S_1, \dots, S_r) \mid \tau_1 = r].$$

По предположению индукции при любых $x_1, \dots, x_r \in \mathbf{R}$ существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H_m(x_1, \dots, x_r) = H(x_1, \dots, x_r),$$

следовательно, существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,r} = \mathbf{M}[H(S_1, \dots, S_r) \mid \tau_1 = r].$$

Итак, существование $\lim_{m \rightarrow \infty} c_{m,r}$ доказано в обоих случаях. Аналогично показывается, что существует $\lim_{r \rightarrow \infty} c_{m,r}$. Применяя лемму 1 к соотношению (15) и учитывая соотношение (7), получаем, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_{j+1} = n),$$

являющийся собственным распределением. Таким образом, соотношение (11) доказано.

Соотношение (10) доказывается аналогично, исходя из доказанного соотношения (11) и представления

$$\mathbf{P}(\zeta_n^{k,l} \in B \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = \sum_{m=j-1}^n \tilde{c}_{m,n-m} \mathbf{P}(\tau_{j-1} = m) \mathbf{P}(\tau_1 > n - m),$$

где

$$\tilde{c}_{m,r} = \mathbf{P}(\zeta_{m+r}^{k,l} \in B \mid \tau_{j-1} = m, \tau_j - \tau_{j-1} > r).$$

Лемма 2 доказана.

Наряду с последовательностью случайных величин $\{X_i, i \in \mathbf{N}\}$ рассмотрим последовательность неотрицательных случайных величин $\eta_i, i \in \mathbf{N}$, предполагая при этом, что пары $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ независимы и одинаково распределены. Положим

$$a_n = e^{-S_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0;$$

$$b_0 = 0, \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия (A)–(D), причем $\tau < 1$, и конечны $\mathbf{M} \exp(-X_1), \mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1)$. Тогда при любых $n, j \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{M}(b_n \mid \tau_j = n) \leq K_j, \quad (16)$$

$$\mathbf{M}(a_n \mid \tau_j = n) \leq L_j, \quad (17)$$

где K_j, L_j — положительные постоянные, не зависящие от n ;
при любом $j \in \mathbf{N}$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = 0, \quad (18)$$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_j = n) = 0. \quad (19)$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции.

Пусть $j = 1$. Положим для $x \in \mathbf{R}$ и борелевского множества $\Gamma \subset \mathbf{R}$

$$F(x) = \mathbf{P}(X_1 \leq x),$$

$$G(x; \Gamma) = \mathbf{P}(\eta_1 \in \Gamma \mid X_1 = x).$$

Напомним, что

$$\mu_n = \max_{0 \leq i \leq n} (-S_i).$$

При $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(\eta_{i+1} e^{-S_i}; \tau_1 > n) \\ &= \int_0^\infty e^{-x} d\mathbf{P}(S_i \leq x, \tau_1 > i) \int_0^\infty \mathbf{P}(\mu_{n-i-1} \leq y) dF(y-x) \int_0^\infty z G(y-x; dz). \end{aligned} \quad (20)$$

В силу неравенства Чебышева, соотношения (8) и условия $\tau < 1$, при всех $n \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{P}(\mu_n < y) \leq K e^y \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)^{3/2}}, \quad (21)$$

где K — положительная постоянная. Из соотношений (20), (21) следует, что при $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\mathbf{M}(\eta_{i+1} e^{-S_i}; \tau_1 > n) \leq K \mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1) \mathbf{P}(\tau_1 > i) \frac{\gamma^{n-i}}{(n-i)^{3/2}}$$

(заметим, что по условию леммы $\mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1) < \infty$). Применяя к правой части лемму 1 и учитывая соотношение (6), находим, что при $k, l \in \mathbf{N}_0$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_1 > n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left(\sum_{i=k}^{n-l-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} \mid \tau_1 > n \right) \\ &\leq \frac{K}{c_1^{(1)}} \mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1) \left(c_1^{(1)} \sum_{i=l+1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > i)}{\gamma^i} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

откуда, переходя к пределу при $k, l \rightarrow \infty$, получаем соотношение (18) при $j = 1$.

Соотношение (19) при $j = 1$ следует из того, что при $n \geq k + l$

$$\mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_1 = n) \leq \mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_1 > n-1) \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n-1)}{\mathbf{P}(\tau_1 = n)}, \quad (23)$$

и соотношений (6), (7) и (18) при $j = 1$.

Аналогично том, как было доказано соотношение (22), можно показать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_{n+1} \mid \tau_1 > n) \leq L,$$

где L — положительная постоянная. Откуда, учитывая соотношения (6), (7) и (23) (при $k = l = 0$), получаем (16) при $j = 1$. Соотношение (17) при $j = 1$ вытекает из условия $\mathbf{M} \exp(-X_1) < \infty$, соотношений (6), (7) и неравенства

$$\mathbf{M}(a_n \mid \tau_1 = n) \leq \mathbf{M} e^{-X_n} \mathbf{M}(e^{-S_{n-1}} \mid \tau_1 > n-1) \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n-1)}{\mathbf{P}(\tau_1 = n)}.$$

Предположим, что при некотором $j \in \mathbf{N}$ справедливы соотношения (16)–(19). Покажем, что

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0. \quad (24)$$

Запишем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \frac{1}{\mathbf{P}(\tau_j \leq n < \tau_{j+1})} \sum_{m=j}^n c_{m, n-m}^{k, l} \mathbf{P}(\tau_j = m) \mathbf{P}(\tau_1 > n-m), \end{aligned}$$

где

$$c_{m, r}^{k, l} = \mathbf{M}(b_{m+r-l} - b_k \mid \tau_j = m, \tau_{j+1} - \tau_j > r).$$

Ввиду леммы 1 и соотношений (6), (7) для справедливости (24) достаточно установить, что последовательность $\{c_{m, r}^{k, l}\}$ ограничена по совокупности $k, l, m, r \in \mathbf{N}_0$ и

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} c_{m, r}^{k, l} = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \limsup_{r \rightarrow \infty} c_{m, r}^{k, l} = 0. \quad (26)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} c_{m,r}^{k,l} &\leq \mathbf{M}(b_{m+r} \mid \tau_j = m, \tau_{j+1} - \tau_j > r) \\ &= \mathbf{M} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} + e^{-S_m} \sum_{i=0}^{r-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} \mid \tau_j = m, \tau'_1 > r \right) \\ &= \mathbf{M}(b_m \mid \tau_j = m) + \mathbf{M}(a_m \mid \tau_j = m) \mathbf{M}(b_r \mid \tau_1 > r), \end{aligned}$$

где $\{S'_i\}$ и τ'_1 определены при доказательстве леммы 2,

$$\eta'_j = \eta_{\tau_j+i} - \eta_{\tau_j}, \quad i \in \mathbf{N},$$

то из неравенств (16), (17) и соотношения (22) следует ограниченность $\{c_{m,r}^{k,l}\}$. Если $m > k + l$, $l \geq r$, то $b_{m+r-l} - b_k$ не зависит от τ'_1 и поэтому

$$c_{m,r}^{k,l} = \mathbf{M}(b_{m+r-l} - b_k \mid \tau_j = m).$$

Откуда в силу соотношения (19) вытекает (25).

Если же $r > k + l$, $k \geq m$, то

$$b_{m+r-l} - b_k = e^{-S_m} \left(\sum_{i=0}^{r-l-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} - \sum_{i=0}^{k-m-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} \right)$$

и поэтому

$$c_{m,r}^{k,l} = \mathbf{M}(a_m \mid \tau_j = m) \mathbf{M}(b_{r-l} - b_{k-m} \mid \tau_1 > r).$$

Откуда в силу соотношений (17), (18) (при $j = 1$) получаем (26). Итак, соотношение (24) доказано. Поскольку

$$\{\tau_{j+1} = n\} \subseteq \{\tau_j < n \leq \tau_{j+1}\},$$

из соотношения (24) вытекает, что

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_{j+1} = n) = 0.$$

Аналогично осуществляется индуктивный переход для соотношений (16)–(17). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. В условиях леммы 3 при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{b_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \Rightarrow \{\nu_j(t), t \in (0, 1]\}, \quad (27)$$

$$\{a_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \Rightarrow \{\rho_j(t), t \in (0, 1]\}, \quad (28)$$

где $\nu_j(t)$ — случайный процесс с неотрицательными на $(0, 1]$ и постоянными на $(0, 1)$ траекториями, $\rho_j(t)$ — случайный процесс, такой, что $\rho_j(t) = 0$ при $t \in (0, 1)$ и $\rho_j(1) = \rho_j > 0$; знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость конечномерных распределений.

Доказательство. Незначительно видоизменяя доказательство леммы 2, можно установить, что при любых фиксированных $k \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$ последовательность случайных векторов

$$\{S_0, \eta_1, S_1, \eta_2, \dots, S_k, \eta_{k+1}; S_{n-k}, \eta_{n-k+1}, \dots, S_{n-1}, \eta_n, S_n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}$$

сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$. Откуда при фиксированных $k \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$\{b_k \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \beta_k^{(j)}, \quad (29)$$

$$\{g_{k,n} \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \gamma_k^{(j)}, \quad (30)$$

где $g_{k,n} = b_n - b_{n-k} + b_k$, $\beta_k^{(j)}$, $\gamma_k^{(j)}$ — некоторые случайные величины. Согласно лемме 3

$$\begin{aligned} \lim_{k,m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(|b_m - b_k| \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) &= 0, \\ \lim_{k,m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(|g_{m,n} - g_{k,n}| \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) &= 0. \end{aligned}$$

По обобщенной лемме Фату (см. теорему 5.3 из [5])

$$\begin{aligned} \mathbf{M}|\beta_m^{(j)} - \beta_k^{(j)}| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(|b_m - b_k| \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j), \\ \mathbf{M}|\gamma_m^{(j)} - \gamma_k^{(j)}| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(|g_{m,n} - g_{k,n}| \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{k,m \rightarrow \infty} \mathbf{M}|\beta_m^{(j)} - \beta_k^{(j)}| &\leq \lim_{k,m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(|b_m - b_k| \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = 0, \\ \lim_{k,m \rightarrow \infty} \mathbf{M}|\gamma_m^{(j)} - \gamma_k^{(j)}| &\leq \lim_{k,m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(|g_{m,n} - g_{k,n}| \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = 0, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что при $k \rightarrow \infty$

$$\beta_k^{(j)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \beta^{(j)}, \quad (31)$$

$$\gamma_k^{(j)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \gamma^{(j)}, \quad (32)$$

где $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$ — некоторые случайные величины. Пусть

$$r \in \mathbf{N}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r < 1, \quad k < n \min(t_1, 1 - t_r),$$

тогда

$$\max \left(\max_{1 \leq i \leq r} |b_{[nt_i]} - b_k|, |b_n - g_{k,n}| \right) = b_n - g_{k,n} = b_{n-k} - b_k,$$

поэтому в силу леммы 3

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left(\max \left(\max_{1 \leq i \leq r} |b_{[nt_i]} - b_k|, |b_n - g_{k,n}| \right) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j \right) = 0. \quad (33)$$

Из соотношений (29)–(33) в силу теоремы 4.2 из [5] следует, что

$$\{b_{[nt_1]}, \dots, b_{[nt_r]}, b_n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\beta^{(j)}, \dots, \beta^{(j)}, \gamma^{(j)}\},$$

а это означает справедливость соотношения (27), причем $\nu_j(t) = \beta^{(j)}$ при $t \in (0, 1)$ и $\nu_j(1) = \gamma^{(j)}$.

Из соотношения (27) при $\eta_i \equiv 1$, $i \in \mathbf{N}$, видно, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{a_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \Rightarrow 0. \quad (34)$$

По лемме 1 случайная величина $\{S_n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$\{a_n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \rho_j, \quad (35)$$

где ρ_j — положительная случайная величина. Из соотношений (34), (35) вытекает (28). Лемма 4 доказана.

Замечание 1. Как видно из доказательства леммы 4, при любых фиксированных $k, l \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$ имеет место слабая сходимость при $n \rightarrow \infty$ конечномерных распределений последовательности случайных элементов

$$\{\{b_{[nt]}, t \in (0, 1]\}; S_0, \eta_1, \dots, S_k, \eta_{k+1}; S_{n-l}, \eta_{n-l+1}, \dots, S_{n-1}, \eta_n, S_n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}.$$

Из этого факта и леммы 4 следует, в частности (при $k = l = 0$), что

$$\{(a_{[nt]}, b_{[nt]}), t \in (0, 1) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \Rightarrow \{(\rho_j(t), \mu_j(t)), t \in (0, 1]\}$$

(здесь $\rho_j(t)$ и $\mu_j(t)$ определены на одном и том же вероятностном пространстве).

4. Перейдем к изучению умеренно докритического ветвящегося процесса $\{\xi_n\}$ в случайной среде $\{\pi_n\}$. Напомним, что с этим процессом связана последовательность независимых одинаково распределенных пар $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ случайных величин, определяемая соотношением (1). Из п.2 следует, что если выполнены условия теоремы 1, то для указанной последовательности выполнены условия всех лемм, доказанных в п.3. Пусть $T = \inf\{n: \xi_n = 0\}$ — момент вырождения $\{\xi_n\}$.

Лемма 5. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_1 \gamma^n}{n^{3/2}}, \quad (36)$$

где c_1 — положительная постоянная.

Доказательство. В [10] показано, что если производящие функции $f_n(s)$ дробно-линейны, то

$$\mathbf{P}_\pi(T > n) = \frac{1}{a_n + b_n} \quad (37)$$

(символы $\mathbf{P}_\pi$ и $\mathbf{M}_\pi$ означают, что вероятность и математическое ожидание вычисляются при фиксированной среде). Исходя из этого, запишем представление

$$\mathbf{P}(T > n) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M}(1/(a_n + b_n) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \mathbf{P}(\tau_{j-1} \leq n < \tau_j). \quad (38)$$

Поскольку $0 \leq 1/(a_n + b_n) \leq 1$ (см. (37)), в силу леммы 4 и замечания к ней при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(1/(a_n + b_n) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = \mathbf{M} \frac{1}{\rho_j + \nu_j(1)} > 0. \quad (39)$$

При всех $i \leq n$

$$\frac{1}{a_n + b_n} \leq \frac{1}{a_i + b_i} \leq e^{S_i},$$

поэтому

$$\frac{1}{a_n + b_n} \leq e^{-\mu_n}, \quad (40)$$

где $\mu_n = \max_{0 \leq i \leq n} (-S_i)$. Поэтому вследствие соотношения (9)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \gamma^{-n} \mathbf{M}(1/(a_n + b_n); \tau_m \leq n) = 0. \quad (41)$$

Из соотношений (6), (38), (39), (41) следует утверждение леммы 5 с

$$c_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{c_1^{(j)}}{\rho_j + \nu_j(1)} < \infty.$$

Из леммы 5 можно получить грубую асимптотику для вероятности невырождения в случае произвольного умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде (без предположения о том, что производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}_0$, дробно-линейны).

Следствие 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — умеренно докритический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$. Пусть конечны $\mathbf{M} \exp |X_1|$, $\mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1)$ и, если случайная величина X_1 решетчатая, то она имеет атом в нуле.

Тогда при всех $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{c_2 \gamma^n}{n^{3/2}} \leq \mathbf{P}(T > n) \leq \frac{c_3 \gamma^n}{n^{3/2}},$$

где c_2, c_3 — положительные постоянные.

Доказательство. В лемме 2 из [10] показано, что при любом $n \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}_\pi(T > n) \geq \frac{1}{a_n + 2b_n}.$$

С другой стороны, в силу соотношений (37) и (40)

$$\mathbf{P}_\pi(T > n) \leq e^{-\mu_n}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M} \frac{1}{a_n + 2b_n} \leq \mathbf{P}(T > n) \leq \mathbf{M} e^{-\mu_n}.$$

Асимптотика левой части находится так же, как и асимптотика $\mathbf{M}(a_n + b_n)^{-1}$ в лемме 5, асимптотика же правой части дается соотношением (8) при $\lambda = 1$. Следствие доказано.

В [4] доказано следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть $\{\xi_n\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и пусть с вероятностью единица случайные величины X_1, η_1 конечны, тогда при любых $k, l \in \mathbb{N}_0, l \geq k$, справедливо соотношение

$$\mathbf{M}_\pi(\xi_l/m_l - \xi_k/m_k)^2 = 2(b_l - b_k) + a_l - a_k.$$

Лемма 7. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\{A_n\}$ — такая последовательность случайных событий, что при любом фиксированном $j \in \mathbb{N}$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n, T > n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = d_j.$$

Тогда существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n \mid T > n) = \frac{1}{c_1} \sum_{j=1}^{\infty} c_1^{(j)} d_j,$$

где постоянные c_1 и $\{c_1^{(j)}\}$ те же, что и в соотношениях (36), (6).

Доказательство. Запишем представление

$$\mathbf{P}(A_n \mid T > n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(n), \quad (42)$$

где

$$a_j(n) = \mathbf{P}(\tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \mathbf{P}^{-1}(T > n) \mathbf{P}(A_n, T > n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j).$$

По условию доказываемой леммы и ввиду соотношений (6), (36)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_j(n) = c_1^{(j)} d_j / c_1. \quad (43)$$

Поскольку (см. (37))

$$\mathbf{P}(T > n; \tau_m \leq n) = \mathbf{M} \left(\frac{1}{a_n + b_n}; \tau_m \leq n \right),$$

в силу соотношений (36) и (41)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{P}(T > n)} \mathbf{P}(T > n; \tau_m \leq n) = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j(n) = 0. \quad (44)$$

Из соотношений (42)–(44) получаем утверждение леммы 7.

Доказательство теоремы 1. Положим

$$X_n(t) = \frac{\xi_{[nt]}}{m_{[nt]}}, \quad t \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Установим сначала сходимость одномерных распределений последовательности процессов

$$\{X_n(t), t \in (0, 1) \mid T > n\}, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Зафиксируем $t \in (0, 1)$, $x \in [0, \infty)$. В [11] установлено, что если производящие функции $f_n(s)$ дробно-линейны, то при $k, r \in \mathbf{N}_0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_\pi(\xi_k > r, T > n) \\ &= \frac{1}{a_k + b_k} \left(1 - \frac{a_k}{a_k + b_k}\right)^r \left(1 - \left(1 - \frac{a_k + b_k}{a_n + b_n}\right) \left(1 - \frac{a_k}{a_n + b_n - b_k}\right)^r\right). \end{aligned} \quad (45)$$

Заметим, что при $k \in \mathbf{N}_0$

$$m_k = e^{S_k} = 1/a_k.$$

Полагая в соотношении (45) $k = [nt]$, $r = [xm_{[nt]}]$ и учитывая лемму 4 и замечание к ней, получаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_{[nt]}/m_{[nt]} > x, T > n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(\xi_{[nt]}/m_{[nt]} > x, T > n) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ &= \mathbf{M}\left(\frac{1}{\nu_j(t)} e^{-x/\nu_j(t)} \left(1 - \left(1 - \frac{\nu_j(t)}{\rho_j + \nu_j(1)}\right) e^{-x/(\rho_j + \nu_j(1) - \nu_j(t))}\right)\right) \end{aligned}$$

(заметим, что $\nu_j(t) > 0$ при $t \in (0, 1)$, поскольку в силу (37) $a_{[nt]} + b_{[nt]} \geq 1$ при $t \in (0, 1)$). Применяя теперь лемму 7, находим, что при $t \in (0, 1)$, $x \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n(t) > x \mid T > n) \\ &= \frac{1}{c_1} \sum_{j=1}^{\infty} c_1^{(j)} \mathbf{M}\left(\frac{1}{\nu_j(t)} e^{-x/\nu_j(t)} \left(1 - \left(1 - \frac{\nu_j(t)}{\rho_j + \nu_j(1)}\right) e^{-x/(\rho_j + \nu_j(1) - \nu_j(t))}\right)\right), \end{aligned}$$

причем функция, стоящая справа, равна единице при $x = 0$, непрерывна по x на $[0, \infty)$ и стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ (два последних факта следуют из того, что выражение, стоящее под знаком математического ожидания достигает своего максимума по $x \in [0, \infty)$ в точке $x = 0$). Но это означает, что при любом $t \in (0, 1)$ последовательность случайных величин $\{X_n(t) \mid T > n\}$, $n \in \mathbf{N}_0$, сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к одной и той же (поскольку $\nu_j(t)$ не зависит от t на $(0, 1)$) положительной случайной величине, которую мы обозначим μ .

Рассмотрим случайный процесс, сопоставляющий каждому $t \in (0, 1)$ именно эту случайную величину μ . Обозначим его той же буквой и установим, что при любом фиксированном $u \in (0; 1/2)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{X_n(t), t \in [u, 1-u] \mid T > n\} \Rightarrow \mu. \quad (46)$$

Для этого достаточно показать, что при любом $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [u, 1-u]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid T > n\right) = 0. \quad (47)$$

Но вследствие леммы 7 последнее соотношение справедливо, если при любом $j \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [u, 1-u]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\right) = 0. \quad (48)$$

Поскольку при фиксированной среде последовательность $\{\xi_n/m_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ является мартингалом, в силу неравенства Дуба

$$\mathbf{P}_\pi \left(\sup_{t \in [u, 1-u]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \right) \leq \varepsilon^{-2} \mathbf{M}_\pi (X_n(1-u) - X_n(u))^2.$$

Отсюда, учитывая лемму 6, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\pi \left(\sup_{t \in [u, 1-u]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j \right) \\ = \mathbf{M} \left(\mathbf{P}_\pi \left(\sup_{t \in [u, 1-u]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \right) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j \right) \\ \leq \varepsilon^{-2} \mathbf{M} (\mathbf{M}_\pi (X_n(1-u) - X_n(u))^2 \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ = \varepsilon^{-2} \mathbf{M} (2(b_{[n(1-u)]} - b_{[nu]}) + a_{[n(1-u)]} - a_{[nu]} \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j). \end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 3, приходим к соотношению (48) и, следовательно, к (47) и (46).

Для функции $f \in D[u, v]$, $0 < u < v < \infty$, введем модуль непрерывности

$$w_f(\delta, u, v) = \sup |f(s) - f(t)|,$$

где супремум берется по всем s, t таким, что $s, t \in [u, v]$, $|t - s| < \delta$, $\delta \in (0, \infty)$. Оказывается, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{X_n}(\delta, u, 1-u) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0. \quad (49)$$

Это следует из соотношения (47), поскольку

$$\{w_{X_n}(\delta, u, 1-u) \geq \varepsilon\} \subset \left\{ \sup_{t \in [u, 1-u]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Из соотношений (46), (49) в силу теорем 15.1 и 15.5 из [5] вытекает утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Для того чтобы установить соотношение (2), достаточно показать, что при любых фиксированных $k, l \in \mathbf{N}_0$ последовательность случайных векторов

$$\{\xi_0, S_0, \xi_1, S_1, \dots, \xi_k, S_k; \xi_{n-l}, S_{n-l}, \xi_{n-l+1}, S_{n-l+1}, \dots, \xi_n, S_n \mid T > n\}$$

сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$. Чтобы не загромождать доказательство техническими деталями, установим лишь сходимость по распределению последовательности векторов

$$\{\xi_{n-l}, S_{n-l} \mid T > n\}.$$

По лемме 2 последовательность случайных величин $\{S_{n-l} \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}$ при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$ сходится по распределению к некоторой случайной величине $\alpha_j^{(l)}$. Пусть I — интервал $\alpha_j^{(l)}$ -непрерывности. Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_{n-l} > r, S_{n-l} \in I, T > n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ = \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(\xi_{n-l} > r, T > n) \chi_{\{S_{n-l} \in I\}} \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j), \end{aligned}$$

где χ_A — индикатор события A . Но ввиду соотношения (45) при $r \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_\pi(\xi_{n-l} > r, T > n) \\ &= \frac{1}{a_{n-l} + b_{n-l}} \left(1 - \frac{a_{n-l}}{a_{n-l} + b_{n-l}}\right)^r \left(1 - \left(1 - \frac{a_{n-l} + b_{n-l}}{a_n + b_n}\right)!\right) \left(1 - \frac{a_{n-l}}{a_n + b_n - b_{n-l}}\right)^r. \end{aligned}$$

Поскольку случайный вектор $\{a_{n-l}, b_{n-l}, a_n, b_n\}$ выражается через

$$b_n, S_{n-l}, \eta_{n-l+1}, \dots, S_{n-1}, \eta_n, S_n,$$

в силу замечания к лемме 4 из двух последних соотношений следует существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_{n-l} > r, S_{n-l} \in I, T > n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j).$$

Отсюда по лемме 7 вытекает существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_{n-l} > r, S_{n-l} \in I \mid T > n),$$

причем нетрудно показать, что последнее выражение стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Но это означает, что последовательность векторов $\{\xi_{n-l}, S_{n-l} \mid T > n\}$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$.

Установим соотношение (3). Ввиду леммы 6 при $j \in \mathbb{N}$ и $n/2 \geq k$

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}((\xi_{[n/2]}/m_{[n/2]} - \xi_k/m_k)^2 \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{M}_\pi(\xi_{[n/2]}/m_{[n/2]} - \xi_k/m_k)^2 \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ &= \mathbf{M}(2(b_{[n/2]} - b_k) + a_{[n/2]} - a_k \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j). \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 3 находим, что при любом фиксированном $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\xi_{[n/2]}/m_{[n/2]} - \xi_k/m_k)^2 \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j = 0,$$

поэтому в силу неравенства Чебышева для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\xi_{[n/2]}/m_{[n/2]} - \xi_k/m_k| > \varepsilon \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = 0.$$

Применяя теперь лемму 7, получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\xi_{[n/2]}/m_{[n/2]} - \xi_k/m_k| > \varepsilon \mid T > n) = 0. \quad (50)$$

По теореме 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[n/2]}/m_{[n/2]} \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (51)$$

а в силу соотношения (2) при фиксированном $k \in \mathbb{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_k/m_k \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi_k. \quad (52)$$

Из соотношений (50)–(52) следует (3). Аналогично устанавливается соотношение (4). Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Athreya K. B., Karlin S. On branching processes with random environments. II *Ann. Math. Statist.* (1971) **42** №6, 1843–1858.
2. Афанасьев В. И. О вероятности невырождения докритического ветвящегося процесса в случайной среде. Деп. ВИНТИ, №М1794-79.
3. Dekking F. M. On the survival probability of a branching process in a finite state i.i.d. environment. *Stochastic Proc. Appl.* (1988) **27**, №1, 151–157.
4. Афанасьев В. И. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 52–67.
5. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1977.
6. Афанасьев В. И. Об условном случайном блуждании с отрицательным сносом. *Вероятностные процессы и управление*. Изд-во КГУ, Краснодар, 1979, №2, 8–12.
7. Афанасьев В. И. О максимуме невозвратного случайного блуждания в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1990) **35**, №2, 209–219.
8. Iglehart D.L. Random walks with negative drift conditioned to stay positive. *J. Appl. Probab.* (1974) **11**, №4, 742–751.
9. Veraverbeke N., Teugels J. L. The exponential rate of convergence of the distribution of the maximum of a random walk. *J. Appl. Probab.* (1976) **13**, №4, 733–740.
10. Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Probab.* (1975) **12**, №1, 39–46.
11. Афанасьев В. И. Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1993) **5**, №1, 45–58.
12. D'Souza J. S., Hambly B. M. On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv. Appl. Probab.* (1997) **29**, №1, 38–55.

Статья поступила 10.03.1997.