Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Алексейчук, Об однозначности проблемы моментов в классе q -распределений, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 1, 95–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:00:01

УДК 512.21

Об однозначности проблемы моментов в классе q -распределений

© 1998 г. А. Н. Алексейчук

Вводится понятие $\bar{q} = (q_1, \dots, q_t)$ -биномиальных инвариантов случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_t)$, распределенного на множестве векторов, i -я координата каждого из которых является степенью числа $q_i > 1$ с неотрицательным целым показателем, $i = 1, \dots, t$. Устанавливаются соотношения между $\bar{q}$ -биномиальными инвариантами и смешанными моментами, указываются условия, при которых распределение вектора $\bar{\xi}$ однозначно определяется последовательностью его $\bar{q}$ -биномиальных инвариантов и приводятся выражения для вероятностей

$$P(\xi_1 = q_1^{r_1}, \dots, \xi_t = q_t^{r_t}), \quad r_1, \dots, r_t = 0, 1, \dots,$$

через соответствующие $\bar{q}$ -биномиальные инварианты, а также оценки указанных вероятностей. Доказывается теорема о сходимости последовательности распределений случайных векторов при условии сходимости соответствующих $\bar{q}$ -биномиальных инвариантов.

Полученные результаты применяются при исследовании предельного распределения числа решений одного класса систем случайных линейных уравнений над конечным полем.

1. Введение

В [2, 3, 4] рассматривается класс систем случайных линейных уравнений над конечным полем или кольцом R мощности q следующего вида:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, n + s, \quad (1)$$

где s — целое фиксированное число, a_{ij} — независимые в совокупности случайные величины, распределения которых удовлетворяют условию

$$\delta_n \leq P(a_{ij} = a), \quad i = 1, \dots, n + s, \quad j = 1, \dots, n, \quad a \in R. \quad (2)$$

Основная задача, решаемая в [2–4], это установление правильной границы δ_n , для которой предельное распределение числа $\nu_{n,s}$ решений системы (1) при $n \rightarrow \infty$

инвариантно относительно распределений коэффициентов (1), удовлетворяющих (2), т.е. имеет тот же вид, что и в случае

$$P(a_{ij} = a) = q^{-1}, \quad i = 1, \dots, n + s, \quad j = 1, \dots, n, \quad a \in R.$$

В [4, стр. 139–214] для решения этой задачи используются результаты асимптотического анализа моментов $M\nu_{n,s}^r$, $r \geq 1$, на основании которого определяется граница δ_n области инвариантности для $\lim_{n \rightarrow \infty} M\nu_{n,s}^r$, $r \geq 1$, и приводятся явные выражения для $\lim_{n \rightarrow \infty} M\nu_{n,s}^r$, $r \geq 1$. Здесь доказано, что для конечных колец с левой единицей граница области инвариантности для предельного распределения случайной величины ν_s , являющейся слабым пределом при $n \rightarrow \infty$ последовательности случайных величин $\nu_{n,s}$, и любого конечного момента этой случайной величины одна и та же.

В связи с полученными в [4] результатами возникает вопрос, является ли сходимость моментов $M\nu_{n,s}^r \rightarrow M\nu_s^r$, $r \geq 1$, при $n \rightarrow \infty$ достаточным условием для сходимости последовательности распределений случайных величин $\nu_{n,s}$ к распределению случайной величины ν_s . Вопрос не является тривиальным. Известные признаки, например, признак Карлемана [8], гарантирующие однозначность восстановления распределения по последовательности его моментов, не позволяют утвердительно ответить на него (подробнее об этом см. п.4).

Настоящая работа посвящена решению более общей задачи, нахождению условий, при которых распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_t)$, принимающего значения во множестве

$$\{(q_1^{r_1}, \dots, q_t^{r_t}) \mid r_i = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, t\},$$

где $q_i > 1$, $i = 1, \dots, t$, однозначно определяется последовательностью его смешанных моментов в классе так называемых $\bar{q}$ -распределений. Удобным средством для исследования $\bar{q}$ -распределений оказываются $\bar{q}$ -биномиальные инварианты, определяемые в п. 4. В терминах $\bar{q}$ -биномиальных инвариантов случайного вектора $\bar{\xi}$, имеющего q -распределение, установлены достаточные условия, при которых распределение этого вектора однозначно определяется последовательностью его смешанных моментов, и приведены точные выражения для вероятностей

$$P(\xi_1 = q_1^{r_1}, \dots, \xi_t = q_t^{r_t}), \quad r_1, \dots, r_t = 0, 1, \dots,$$

через соответствующие $\bar{q}$ -биномиальные инварианты, а также оценки указанных вероятностей, которые при $t = 1$ можно рассматривать как q -аналоги известных неравенств Бонферони. Установлены также соотношения между $\bar{q}$ -биномиальными инвариантами и смешанными моментами случайного вектора ξ (теорема 5). Доказана теорема о сходимости последовательности $\bar{q}$ -распределений при условии сходимости соответствующих $\bar{q}$ -биномиальных инвариантов, из которой, в частности, вытекает положительный ответ на поставленный выше вопрос о сходимости при $n \rightarrow \infty$ последовательности распределений случайных величин $\nu_{n,s}$ к распределению случайной величины ν_s при условии сходимости соответствующих моментов. В заключение приведен пример, показывающий, что если упомянутые выше достаточные условия, гарантирующие однозначность восстановления $\bar{q}$ -распределения по последовательности его смешанных моментов, не выполняются, то может существовать более одного $\bar{q}$ -распределения с заданными моментами.

2. Основные обозначения понятия и вспомогательные результаты

Положим

$$(a; z)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - az^i), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(a; z)_0 = 1, \quad a, z \in \mathbb{C}, \quad (a; z)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; z)_n, \quad |z| < 1.$$

Зафиксируем число $q > 1$ и будем писать $(a)_n$ вместо $(a; q)_n$. Коэффициенты Гаусса определяются с помощью соотношений

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{cases} (q)_n / ((q)_k (q)_{n-k}), & \text{если } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеет место равенство

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} (q^k - q^i)^{-1} \prod_{i=0}^{n-k-1} (q^n - q^i), \quad 0 \leq k \leq n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

При $k = 0$ полагаем

$$\prod_{i=0}^{k-1} (z - q^i) = 0$$

для любого $z \in \mathbb{C}$.

Нам понадобятся следующие тождества [1, стр. 108]:

$$\prod_{i=0}^{n-1} (z - q^i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} z^{n-k}, \quad (4)$$

$$z^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{k-1} (z - q^i), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

При $z = 1$ из (4) получаем, что

$$\delta_{0,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}},$$

где $\delta_{0,n}$ — символ Кронекера.

Зафиксируем натуральное число t и вектор $\bar{q} = (q_1, \dots, q_t)$, где $q_i > 1$, $i = 1, \dots, t$. Для любых целочисленных векторов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ и $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_t)$ положим

$$\begin{aligned} \max\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\} &= (\max\{\alpha_1, \beta_1\}, \dots, \max\{\alpha_t, \beta_t\}), & \bar{\alpha}\bar{\beta} &= (\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_t\beta_t), \\ \min \bar{\alpha} &= \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}, & |\bar{\alpha}| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_t. \end{aligned}$$

Будем писать $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$, $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$, если, соответственно, $\alpha_i \leq \beta_i$, $\alpha_i < \beta_i$ для всех $i = 1, \dots, t$.

Пусть N_0 — множество неотрицательных целых чисел. Введем обозначения

$$\bar{q}^{\bar{\alpha}} = \prod_{j=1}^t q_j^{\alpha_j}, \quad \bar{q}^{\binom{\bar{\alpha}}{2}} = \prod_{j=1}^t q_j^{\binom{\alpha_j}{2}}, \quad \left[\begin{matrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} = \prod_{j=1}^t \left[\begin{matrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{matrix} \right]_{q_j},$$

где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t), \bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_t) \in N_0^t$. Тот же смысл имеют другие аналогичные обозначения, например,

$$(\bar{q}^{-1}; \bar{q}^{-1})_{\infty} = \prod_{j=1}^n (q^{-1}; q^{-1})_{\infty}.$$

Ниже будем рассматривать кратные числовые ряды вида

$$\sum_{\bar{\alpha} \in A, \bar{\beta} \in B} c_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}, \quad (6)$$

где $A, B \in N_0^t$.

Приведем необходимый для дальнейшего результат о сходимости рядов (6), который содержится в [5, стр. 169].

Теорема 1. *Если ряд (6) сходится абсолютно, то каждый из повторных рядов*

$$\sum_{\bar{\alpha} \in A} \sum_{\bar{\beta} \in B} c_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}, \quad \sum_{\bar{\beta} \in B} \sum_{\bar{\alpha} \in A} c_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$$

сходится и их суммы равны.

Очевидно, что для абсолютной сходимости ряда (6) достаточно, чтобы сходил ряд

$$\sum_{\bar{\alpha} \in A} \sum_{\bar{\beta} \in B} |c_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}|.$$

3. Основные результаты

Пусть

$$\bar{\gamma} \in \mathbf{Z}^t, \quad U_{\bar{\gamma}}^{(t)} = \{\bar{r} \in \mathbf{Z}^t \mid \bar{r} \geq -\bar{\gamma}\},$$

p и B — некоторые отображения множества $U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ в множество N_0 .

Теорема 2. *Предположим, что*

$$\sum_{\bar{k} \geq -\bar{\gamma}} q^{\binom{\bar{k} + \bar{\gamma}}{2}} B(\bar{k}) < \infty. \quad (7)$$

Тогда, если для любого $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ имеет место соотношение

$$p(\bar{r}) = \sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} B(\bar{k}), \quad (8)$$

то для любого $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$

$$B(\bar{r}) = \sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} p(\bar{k}) \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{matrix} \right]_{\bar{q}}. \quad (9)$$

Верно и обратное.

Доказательство теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма 1. При выполнении условия (7) кратные ряды

$$\sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} B(\bar{k}), \quad (10)$$

$$\sum_{\bar{k} \geq \bar{r}, \bar{l} \geq \bar{k}} (-1)^{|\bar{l} - \bar{k}|} \bar{q}^{\binom{\bar{l} - \bar{k}}{2}} \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{k} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} B(\bar{l}) \quad (11)$$

сходятся абсолютно для любого $\bar{r} \geq -\bar{\gamma}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$. Для любого $\bar{k} \geq \bar{r}$ имеет место цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} \bar{q}^{-\binom{\bar{k} + \bar{\gamma}}{2}} &= \prod_{j=1}^t q_j^{\binom{k_j - r_j}{2}} \left[\begin{matrix} \gamma_j + k_j \\ \gamma_j + r_j \end{matrix} \right]_{q_j} q_j^{-\binom{k_j + \gamma_j}{2}} \\ &= \prod_{j=1}^t q_j^{\binom{k_j - r_j}{2}} \frac{(q_j^{-1}; q_j^{-1})_{\gamma_j + k_j}}{(q_j^{-1}; q_j^{-1})_{\gamma_j + r_j} (q_j^{-1}; q_j^{-1})_{k_j - r_j}} q_j^{(k_j - r_j)(\gamma_j + r_j) - \binom{k_j + \gamma_j}{2}} \\ &< \prod_{j=1}^t (q_j^{-1}; q_j^{-1})_{\infty}^{-2} q_j^{\binom{k_j - r_j}{2} + (k_j - r_j)(\gamma_j + r_j) + \binom{k_j + \gamma_j}{2}} \\ &= (\bar{q}^{-1}; \bar{q}^{-1})_{\infty}^{-2} \bar{q}^{\binom{\bar{r}}{2} - \bar{r}\bar{\gamma} - \binom{\bar{\gamma}}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\bar{k} \geq \bar{r}$ выполняется неравенство

$$\bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} B(\bar{k}) < (\bar{q}^{-1}; \bar{q}^{-1})_{\infty}^{-2} (\bar{q}^{\binom{\bar{k} + \bar{\gamma}}{2}} B(\bar{k})) \bar{q}^{\binom{\bar{r}}{2} - \bar{r}\bar{\gamma} - \binom{\bar{\gamma}}{2}}. \quad (12)$$

Далее, заменяя в (12) $\bar{r}$ на $\bar{k}$, $\bar{k}$ на $\bar{l}$, с учетом оценки

$$\left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} < (\bar{q}^{-1}; \bar{q}^{-1})_{\infty}^{-2} \bar{q}^{(\bar{r} + \bar{\gamma})(\bar{k} - \bar{r})}, \quad \bar{k} \geq \bar{r},$$

после несложных преобразований получаем, при $\bar{l} \geq \bar{k} \geq \bar{r}$, неравенство

$$\bar{q}^{\binom{\bar{l} - \bar{k}}{2}} \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{k} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} \left[\begin{matrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} B(\bar{l}) < (\bar{q}^{-1}; \bar{q}^{-1})^{-4} (\bar{q}^{\binom{\bar{l} + \bar{\gamma}}{2}} B(\bar{l})) \bar{q}^{-\binom{\bar{k}}{2} - \binom{\bar{\gamma}}{2} - \bar{\gamma}\bar{r} + \bar{r}\bar{k} - \bar{r}\bar{r}}. \quad (13)$$

В силу сходимости ряда

$$\sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} \bar{q}^{-\binom{\bar{k}}{2} + \bar{k}\bar{r}}$$

и условия (7) из (12), (13) следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Пусть для любого $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ выполняется (9). Докажем справедливость (8). В силу абсолютной сходимости ряда (10) сходится ряд

$$\sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} \sum_{\bar{l} \geq \bar{k}} \left| (-1)^{|\bar{k}-\bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k}-\bar{r}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{k} \end{bmatrix}_{\bar{q}} p(\bar{l}) \right|.$$

Следовательно, на основании теоремы 1

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} (-1)^{|\bar{k}-\bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k}-\bar{r}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} B(\bar{k}) &= \sum_{\bar{l} \geq \bar{r}} \sum_{\bar{r} \leq \bar{k} \leq \bar{l}} (-1)^{|\bar{k}-\bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k}-\bar{r}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{k} \end{bmatrix}_{\bar{q}} p(\bar{l}) \\ &= \sum_{\bar{l} \geq \bar{r}} p(\bar{l}) \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} \sum_{\bar{r} \leq \bar{k} \leq \bar{l}} (-1)^{|\bar{k}-\bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k}-\bar{r}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{l} - \bar{r} \\ \bar{k} - \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} \\ &= \sum_{\bar{l} \geq \bar{r}} p(\bar{l}) \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} \delta_{\bar{l}, \bar{l}-\bar{r}} = p(\bar{r}). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что при выполнении (7) из (8) следует (9). На основании леммы 1 ряд (11) сходится абсолютно. Следовательно, по теореме 1 сумма данного ряда, с одной стороны равна

$$\sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} \sum_{\bar{l} \geq \bar{k}} (-1)^{|\bar{l}-\bar{k}|} \bar{q}^{\binom{\bar{l}-\bar{k}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{k} \end{bmatrix}_{\bar{q}} B(\bar{l}) \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} = \sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} p(\bar{k}) \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{k} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}},$$

а, с другой стороны, равна

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{l} \geq \bar{r}} \sum_{\bar{r} \leq \bar{k} \leq \bar{l}} (-1)^{|\bar{l}-\bar{k}|} \bar{q}^{\binom{\bar{l}-\bar{k}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} \begin{bmatrix} \bar{l} - \bar{r} \\ \bar{k} - \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} B(\bar{l}) \\ = \sum_{\bar{l} \geq \bar{r}} B(\bar{l}) \begin{bmatrix} \bar{\gamma} + \bar{l} \\ \bar{\gamma} + \bar{r} \end{bmatrix}_{\bar{q}} \sum_{0 \leq \bar{k} \leq \bar{l}-\bar{r}} (-1)^{|\bar{k}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{l} - \bar{r} \\ \bar{k} \end{bmatrix}_{\bar{q}} = B(\bar{r}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть имеют место (7) и (9). Построим оценки для $p(\bar{r})$, $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$.

Для любого вектора $\bar{d} = (d_1, \dots, d_t) \geq \bar{r}$ и множества $M \subseteq \{1, 2, \dots, t\}$ введем вектор $\bar{d}(M)$, который получается из вектора $\bar{r}$ путем замены его координат с номерами из множества M на соответствующие координаты вектора $\bar{d}$. Каждому вектору $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ поставим в соответствие векторы $\bar{\alpha}^{(i)}$, $\bar{\alpha}_i$, $i = 0, 1, \dots, t$, состоящие, соответственно из первых i и последних $t - i$ координат вектора $\bar{\alpha}$. Запись $(\bar{\alpha}^{(i)}, \bar{\beta}_i)$ используется для обозначения вектора, состоящего из первых i координат вектора $\bar{\alpha}$ и последних $t - i$ координат вектора $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_t)$.

Для каждого $i = 1, \dots, t$ определим величину

$$C^{(i)}(\bar{d}, \bar{r}) = \sum_{\bar{k}^{(i)} \geq \bar{d}^{(i)}} (-1)^{|\bar{k}^{(i)} - \bar{d}^{(i)}|} \begin{bmatrix} \bar{k}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \\ \bar{r}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \end{bmatrix}_{\bar{q}^{(i)}} B((\bar{k}^{(i)}, \bar{d}_i)) \bar{q}^{(i)\binom{\bar{k}^{(i)} - \bar{r}^{(i)}}{2}}, \quad (14)$$

для $i = 0$ полагаем

$$C^{(0)}(\bar{d}, \bar{r}) = B(\bar{d}). \quad (15)$$

Оценим $C^{(i)}(\bar{d}, \bar{r})$. Можно записать

$$\begin{aligned} |C^{(i)}(\bar{d}, \bar{r})| &\leq \sum_{\bar{k}^{(i)} \geq \bar{d}^{(i)}} \left[\bar{k}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \right]_{\bar{r}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)}} \bar{q}^{(i)} \binom{\bar{k}^{(i)} - \bar{r}^{(i)}}{2} B((\bar{k}^{(i)}, \bar{d}_i)) \left[\bar{d}_i + \bar{\gamma}_i \right]_{\bar{r}_i + \bar{\gamma}_i} \bar{q}_i^{\binom{\bar{d}_i - \bar{r}_i}{2}} \\ &\leq \sum_{\bar{k} \geq \bar{d}} \left[\bar{k} + \bar{\gamma} \right]_{\bar{r} + \bar{\gamma}} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} B(\bar{k}). \end{aligned}$$

Отсюда на основании леммы 1 следует, что ряд (14) сходится абсолютно.

Обозначим $W^{(t)}(\bar{d}, \bar{r})$ остаток ряда в выражении для $p(\bar{r})$:

$$W^{(t)}(\bar{d}, \bar{r}) = p(\bar{r}) - \sum_{\bar{r} \leq \bar{k} \leq \bar{d}-1} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\bar{k} + \bar{\gamma} \right]_{\bar{r} + \bar{\gamma}} \bar{q} B(\bar{k}), \quad \bar{d} > \bar{r}. \quad (16)$$

Справедливо соотношение

$$W^{(t)}(\bar{d}, \bar{r}) = \sum_{\bar{k} \in D_{\bar{d}, \bar{r}}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\bar{k} + \bar{\gamma} \right]_{\bar{r} + \bar{\gamma}} \bar{q} B(\bar{k}), \quad \bar{d} > \bar{r}, \quad (17)$$

где

$$D_{\bar{d}, \bar{r}} = \{\bar{k} \geq \bar{r} \mid \exists i: 1 \leq i \leq t, k_i \geq d_i\}.$$

Докажем ряд вспомогательных утверждений

Лемма 2. Для любых $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$, $\bar{d} > \bar{r}$ имеет место равенство

$$W^{(t)}(\bar{d}, \bar{r}) = \sum_{f=1}^t (-1)^{f-1} \sum_{M \subseteq \{1, \dots, t\}, |M|=f} (-1)^{|\bar{d}(M) - \bar{r}|} C^{(t)}(\bar{d}(M), \bar{r}). \quad (18)$$

Доказательство. Для каждого $\bar{h} \geq \bar{d}$ рассмотрим сумму

$$W^{(t)}(\bar{d}, \bar{r}, \bar{h}) = \sum_{\bar{k} \in D_{\bar{d}, \bar{r}}, \bar{k} \leq \bar{h}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \left[\bar{k} + \bar{\gamma} \right]_{\bar{r} + \bar{\gamma}} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} B(\bar{k}). \quad (19)$$

Используя метод включения–исключения [6], находим, что

$$\begin{aligned} W^{(t)}(\bar{d}, \bar{r}, \bar{h}) &= \sum_{f=1}^t (-1)^{f-1} \sum_{M \subseteq \{1, \dots, t\}, |M|=f} \sum_{\bar{d}(M) \leq \bar{k} \leq \bar{h}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\bar{k} + \bar{\gamma} \right]_{\bar{r} + \bar{\gamma}} \bar{q} B(\bar{k}) \\ &= \sum_{f=1}^t (-1)^{f-1} \sum_{M \subseteq \{1, \dots, t\}, |M|=f} (-1)^{|\bar{d}(M) - \bar{r}|} \sum_{\bar{d}(M) \leq \bar{k} \leq \bar{h}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{d}(M)|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\bar{k} + \bar{\gamma} \right]_{\bar{r} + \bar{\gamma}} \bar{q} B(\bar{k}). \end{aligned}$$

Переходя в полученном равенстве к пределу при $\min \bar{h} \rightarrow \infty$, с учетом (14), (17), (19) получаем (18).

Для оценки величин $C^{(t)}(\bar{d}(M), \bar{r})$, входящих в выражение (18), нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. Для любых целых $r < d \leq j$ выполняется неравенство

$$V_q(r, d, j) = \sum_{k=d}^j (-1)^{k-d} \begin{bmatrix} j-r \\ j-k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k-r}{2}} \geq 0. \quad (20)$$

Доказательство. Полагая в (4) $n = j - r$, $z = -t$ и заменяя в правой части полученного равенства k на $j - r - k$, приходим к соотношению

$$\prod_{i=0}^{j-r-1} (t + q^i) = \sum_{k=0}^{j-r} \begin{bmatrix} j-r \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{j-r-k}{2}} t^k. \quad (21)$$

На основании (21) при $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \text{coef}_{t^{j-d}} \left[\prod_{i=1}^{\infty} (t + q^i) \right] &= \text{coef}_{t^{j-d}} \left[(1+t)^{-1} \prod_{i=0}^{j-r-1} (t + q^i) \right] \\ &= \text{coef}_{t^{j-d}} \left[\sum_{s=0}^{\infty} t^s (-1)^s \sum_{k=0}^{j-r} \begin{bmatrix} j-r \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{j-r-k}{2}} t^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{j-d} (-1)^{j-d-k} \begin{bmatrix} j-r \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{j-r-k}{2}} = V_q(r, d, j). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V_q(r, d, j) = \text{coef}_{t^{j-d}} \left[\prod_{i=1}^{j-r-1} (t + q^i) \right] \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. Для любых $\bar{r} \in U_{\bar{q}}^{(t)}$, $\bar{d} \geq \bar{r}$, $i = 1, \dots, t$

$$C^{(i)}(\bar{d}, \bar{r}) \geq 0, \quad (22)$$

$$C^{(i)}(\bar{d}, \bar{r}) \leq q_i^{\binom{d_i - r_i}{2}} \begin{bmatrix} d_i + \gamma_i \\ r_i + \gamma_i \end{bmatrix}_{q_i} C^{(i-1)}(\bar{d}, \bar{r}), \quad (23)$$

$$C^{(t)}(\bar{d}, \bar{r}) \leq \bar{q}^{\binom{\bar{d} - \bar{r}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{d} + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{bmatrix}_{\bar{q}} B(\bar{d}). \quad (24)$$

Доказательство. Докажем (22). На основании леммы 1

$$\begin{aligned} C^{(i)}(\bar{d}, \bar{r}) &= \sum_{\bar{k}^{(i)} \geq \bar{d}^{(i)}} (-1)^{|\bar{k}^{(i)} - \bar{d}^{(i)}|} \bar{q}^{(i)} \binom{\bar{k}^{(i)} - \bar{r}^{(i)}}{2} \begin{bmatrix} \bar{k}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \\ \bar{r}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \end{bmatrix}_{\bar{q}^{(i)}} \\ &\quad \times \sum_{\bar{j}^{(i)} \geq \bar{k}^{(i)}, \bar{j}_i \geq \bar{d}_i} \begin{bmatrix} \bar{j}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \\ \bar{k}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \end{bmatrix}_{\bar{q}^{(i)}} \begin{bmatrix} \bar{j}_i + \bar{\gamma}_i \\ \bar{d}_i + \bar{\gamma}_i \end{bmatrix}_{\bar{q}_i} p((\bar{j}^{(i)}, \bar{j}_i)) \\ &= \sum_{\bar{j}_i \geq \bar{d}_i} \begin{bmatrix} \bar{j}_i + \bar{\gamma}_i \\ \bar{d}_i + \bar{\gamma}_i \end{bmatrix}_{\bar{q}_i} \sum_{\bar{j}^{(i)} \geq \bar{d}^{(i)}} p((\bar{j}^{(i)}, \bar{j}_i)) \begin{bmatrix} \bar{j}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \\ \bar{r}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \end{bmatrix}_{\bar{q}^{(i)}} \\ &\quad \times \sum_{\bar{d}^{(i)} \geq \bar{k}^{(i)} \geq \bar{j}^{(i)}} (-1)^{|\bar{k}^{(i)} - \bar{d}^{(i)}|} \begin{bmatrix} \bar{j}^{(i)} - \bar{r}^{(i)} \\ \bar{j}^{(i)} - \bar{k}^{(i)} \end{bmatrix}_{\bar{q}^{(i)}} \bar{q}^{(i)} \binom{\bar{k}^{(i)} - \bar{r}^{(i)}}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (20) следует (22).

Докажем (23). Для $i = 1, \dots, t$, $\bar{r} \leq \bar{d} \leq \bar{k}$ положим

$$T^{(i)}(\bar{k}, \bar{d}, \bar{r}) = (-1)^{|\bar{k}^{(i)} - \bar{d}^{(i)}|} \left[\begin{matrix} \bar{k}^{(i)} + \bar{\gamma}^{(i)} \\ \bar{r}^{(i)} + \gamma^{(i)} \end{matrix} \right]_{\bar{q}^{(i)}} B((\bar{k}^{(i)}, \bar{d}^{(i)})_{\bar{q}^{(i)}})^{\binom{\bar{k}^{(i)} - \bar{r}^{(i)}}{2}},$$

Из (14) получаем, что

$$\begin{aligned} C^{(i)}(\bar{d}, \bar{r}) &= \sum_{\bar{k}^{(i)} \geq \bar{d}^{(i)}} T^{(i)}(\bar{k}, \bar{d}, \bar{r}) \\ &= \sum_{\bar{k}^{(i-1)} \geq \bar{d}^{(i-1)}, k_i = d_i} T^{(i)}(\bar{k}, \bar{d}, \bar{r}) + \sum_{\bar{k}^{(i-1)} \geq \bar{d}^{(i-1)}, k_i \geq d_i + 1} T^{(i)}(\bar{k}, \bar{d}, \bar{r}) \\ &= \sum_{\bar{k}^{(i-1)} \geq \bar{d}^{(i-1)}} \bar{q}_i^{\binom{d_i - r_i}{2}} \left[\begin{matrix} d_i + \gamma_i \\ r_i + \gamma_i \end{matrix} \right]_{q_i} T^{(i-1)}(\bar{k}, \bar{d}, \bar{r}) - \sum_{\bar{k}^{(i-1)} \geq \bar{d}^{(i-1)}, k_i \geq d_i + 1} T^{(i)}(\bar{k}, \bar{d}', \bar{r}) \\ &= \bar{q}_i^{\binom{d_i - r_i}{2}} \left[\begin{matrix} d_i + \gamma_i \\ r_i + \gamma_i \end{matrix} \right]_{q_i} C^{(i-1)}(\bar{d}, \bar{r}) - C^{(i)}(\bar{d}', \bar{r}), \end{aligned}$$

где $\bar{d}' = (d_1, \dots, d_{i-1}, d_i + 1, d_{i+1}, \dots, d_t)$. Отсюда и на основании (22) вытекает (23).

Соотношение (24) непосредственно следует из (23).

Используя полученные результаты, докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть имеют место (7) и (9). Тогда для любых $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$, $\bar{d} > \bar{r}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \left| p(\bar{r}) - \sum_{\bar{r} \leq \bar{k} \leq \bar{d} - \bar{1}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\begin{matrix} \bar{k} + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} B(\bar{k}) \right| \\ \leq \sum_{\emptyset \neq M \subseteq \{1, \dots, t\}} \left[\begin{matrix} \bar{d}(M) + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} B(\bar{d}(M)) \bar{q}^{\binom{\bar{d}(M) - \bar{r}}{2}}. \quad (25) \end{aligned}$$

Кроме того, при $t = 1$ и $\nu = 0, 1, \dots$

$$\sum_{k=r}^{r+2\nu+1} (-1)^{k-r} q^{\binom{k-r}{2}} \left[\begin{matrix} k + \gamma \\ r + \gamma \end{matrix} \right]_q B(k) \leq p(r) \leq \sum_{k=r}^{r+2\nu} (-1)^{k-r} q^{\binom{k-r}{2}} \left[\begin{matrix} k + \gamma \\ r + \gamma \end{matrix} \right]_q B(k). \quad (26)$$

Доказательство. При $t = 1$ в силу (18) соотношение (16) имеет вид

$$p(r) - \sum_{k=r}^{d-1} (-1)^{k-r} q^{\binom{k-r}{2}} \left[\begin{matrix} k + \gamma \\ r + \gamma \end{matrix} \right]_q B(k) = (-1)^{d-r} C^{(1)}(d, r). \quad (27)$$

Неравенства (26) вытекают из (27), (22); (25) непосредственно следует из (16), (18), (24).

Теорема 4. Пусть для каждого натурального n заданы отображения $p^{(n)}, B^{(n)}$ множества $U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ во множество N_0 , удовлетворяющие (7), (9). Предположим, что для любого $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B^{(n)}(\bar{r}) = B(\bar{r}), \quad (28)$$

причем отображение B удовлетворяет условию (7). Тогда для любого $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(\bar{r}) = p(\bar{r}),$$

и отображения p и B связаны соотношениями (8), (9).

Доказательство. Поскольку отображение B удовлетворяет условию (7), в соответствии с леммой 1 для любых $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$, $M \subseteq \{1, \dots, t\}$, $M \neq \emptyset$, выполняется соотношение

$$\lim_{\min \bar{d} \rightarrow \infty} \left[\frac{\bar{d}(M) + \bar{\gamma}}{\bar{r} + \bar{\gamma}} \right]_{\bar{q}} \bar{q}^{(\bar{d}(M) - \bar{r})} B(\bar{d}(M)) = 0. \quad (29)$$

Введем обозначения

$$S_t^{(n)}(\bar{d}, \bar{r}) = \sum_{\bar{r} \leq \bar{k} \leq \bar{d} - \bar{1}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\frac{\bar{k} + \bar{\gamma}}{\bar{r} + \bar{\gamma}} \right]_{\bar{q}} B^{(n)}(\bar{k}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$S_t(\bar{d}, \bar{r}) = \sum_{\bar{r} \leq \bar{k} \leq \bar{d} - \bar{1}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\frac{\bar{k} + \bar{\gamma}}{\bar{r} + \bar{\gamma}} \right]_{\bar{q}} B(\bar{k}), \quad -\bar{\gamma} \leq \bar{r} \leq \bar{d}.$$

На основании теоремы 3 для любых $\bar{r} \geq -\bar{\gamma}$, $\bar{d} > \bar{r}$, $n = 1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} S_t^{(n)}(\bar{d}, \bar{r}) - \sum_{\emptyset \neq M \subseteq \{1, \dots, t\}} \left[\frac{\bar{d}(M) + \bar{\gamma}}{\bar{r} + \bar{\gamma}} \right]_{\bar{q}} \bar{q}^{(\bar{d}(M) - \bar{r})} B^{(n)}(\bar{d}(M)) \\ \leq p^{(n)}(\bar{r}) \leq S_t^{(n)}(\bar{d}, \bar{r}) + \sum_{\emptyset \neq M \subseteq \{1, \dots, t\}} \left[\frac{\bar{d}(M) + \bar{\gamma}}{\bar{r} + \bar{\gamma}} \right]_{\bar{q}} \bar{q}^{(\bar{d}(M) - \bar{r})} B(\bar{d}(M)), \end{aligned}$$

из которых с учетом (28) получаем, что

$$\begin{aligned} S_t(\bar{d}, \bar{r}) - \sum_{\emptyset \neq M \subseteq \{1, \dots, t\}} \left[\frac{\bar{d}(M) + \bar{\gamma}}{\bar{r} + \bar{\gamma}} \right]_{\bar{q}} \bar{q}^{(\bar{d}(M) - \bar{r})} B(\bar{d}(M)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(\bar{r}) \\ \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(\bar{r}) \leq S_t^{(n)}(\bar{d}, \bar{r}) + \sum_{\emptyset \neq M \subseteq \{1, \dots, t\}} \left[\frac{\bar{d}(M) + \bar{\gamma}}{\bar{r} + \bar{\gamma}} \right]_{\bar{q}} \bar{q}^{(\bar{d}(M) - \bar{r})} B(\bar{d}(M)). \end{aligned}$$

Переходя в полученных соотношениях к пределу при $\min \bar{d} \rightarrow \infty$, на основании (28), условий теоремы и леммы 1 заключаем, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(\bar{r}) = p^{(n)}(\bar{r}) = \sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \left[\frac{\bar{k} + \bar{\gamma}}{\bar{r} + \bar{\gamma}} \right]_{\bar{q}} B^{(n)}(\bar{k}), \quad \bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}.$$

Таким образом, отображения p и B связаны соотношением (8), и в силу теоремы 2 соотношением (9).

4. Приложения к проблеме моментов

Зафиксируем вектор $\bar{\gamma} \in \mathbf{Z}^t$. Пусть $\bar{\gamma}_0 = \max\{\bar{0}, -\bar{\gamma}\}$. Рассмотрим случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_t)$, распределенный на множестве

$$K_{\bar{q}, \bar{\gamma}}^{(t)} = \{(q_1^{r_1}, \dots, q_t^{r_t}) \mid \bar{r} \geq \bar{\gamma}_0\}.$$

Для любого $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ положим

$$p_{\bar{\xi}}(\bar{r}) = \begin{cases} \mathbf{P}(\xi_1 = q_1^{r_1}, \dots, \xi_t = q_t^{r_t}), & \text{если } \bar{r} \geq \bar{\gamma}_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение. Число

$$B_{\bar{\xi}}(\bar{r}) = \mathbf{M} \left[\begin{matrix} \log_{\bar{q}} \bar{\xi} + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} \quad (30)$$

назовем $\bar{q}$ -биномиальным инвариантом порядка $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ случайного вектора $\bar{\xi}$.

Теорема 5. Случайный вектор $\bar{\xi}$ обладает $\bar{q}$ -биномиальными инвариантами тогда и только тогда, когда он обладает смешанными моментами любого порядка. При этом выполняются соотношения

$$B_{\bar{\xi}}(\bar{r}) = \prod_{\bar{0} \leq \bar{j} \leq \bar{r} + \bar{\gamma} - \bar{1}} (\bar{q}^{\bar{\gamma} + \bar{r}} - \bar{q}^{\bar{j}})^{-1} \sum_{-\bar{\gamma} \leq \bar{l} \leq \bar{r}} (-1)^{|\bar{l} + \bar{\gamma}|} \left[\begin{matrix} \bar{r} + \bar{\gamma} \\ \bar{l} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} \mathbf{M}_{\bar{\xi}}^{\bar{r} - \bar{l}} \bar{q}^{\binom{\bar{l} - \bar{\gamma}}{2} + \bar{\gamma}(\bar{r} - \bar{l})}, \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_{\bar{\xi}}^{\bar{r} + \bar{\gamma}} = \bar{q}^{-\bar{\gamma}(\bar{r} + \bar{\gamma})} \sum_{-\bar{\gamma} \leq \bar{l} \leq \bar{r}} \left[\begin{matrix} \bar{r} + \bar{\gamma} \\ \bar{l} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} \prod_{\bar{0} \leq \bar{j} \leq \bar{r} + \bar{l} - \bar{1}} (\bar{q}^{\bar{l} + \bar{\gamma}} - \bar{q}^{\bar{j}}) B_{\bar{\xi}}(\bar{r}), \quad (32)$$

где $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$.

Доказательство. Из (3), (4) следует, что при $\bar{r} \geq -\bar{\gamma}$ для любого $i = 1, \dots, t$

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} \log_{q_i} \xi_i + \gamma_i \\ r_i + \gamma_i \end{matrix} \right]_{q_i} &= \prod_{j=0}^{r_i + \gamma_i - 1} (q_i^{r_i + \gamma_i} - q_i^j)^{-1} \prod_{j=0}^{r_i + \gamma_i - 1} (\xi_i q_i^{\gamma_i} - q_i^j) \\ &= \prod_{j=0}^{r_i + \gamma_i - 1} (q_i^{r_i + \gamma_i} - q_i^j)^{-1} \sum_{l=0}^{r_i + \gamma_i} (-1)^l \left[\begin{matrix} r_i + \gamma_i \\ l \end{matrix} \right]_{q_i} \bar{q}_i^{\binom{l}{2} + \gamma_i(r_i + \gamma_i - l)} \xi_i^{r_i + \gamma_i - l}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left[\begin{matrix} \log_{\bar{q}} \bar{\xi} + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} = \prod_{\bar{0} \leq \bar{j} \leq \bar{r} + \bar{\gamma} - \bar{1}} (\bar{q}^{\bar{r} + \bar{\gamma}} - \bar{q}^{\bar{j}})^{-1} \sum_{\bar{0} \leq \bar{l} \leq \bar{r} + \bar{\gamma}} (-1)^{|\bar{l}|} \left[\begin{matrix} \bar{r} + \bar{\gamma} \\ \bar{l} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} \bar{q}^{\binom{\bar{l}}{2} + \bar{\gamma}(\bar{r} + \bar{\gamma} - \bar{l})} \bar{\xi}^{\bar{r} + \bar{\gamma} - \bar{l}},$$

или

$$\left[\begin{matrix} \log_{\bar{q}} \bar{\xi} + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} = \prod_{\bar{0} \leq \bar{j} \leq \bar{r} + \bar{\gamma} - \bar{1}} (\bar{q}^{\bar{r} + \bar{\gamma}} - \bar{q}^{\bar{j}})^{-1} \sum_{-\bar{\gamma} \leq \bar{l} \leq \bar{r}} (-1)^{|\bar{l} + \bar{\gamma}|} \left[\begin{matrix} \bar{r} + \bar{\gamma} \\ \bar{l} + \bar{\gamma} \end{matrix} \right]_{\bar{q}} \bar{\xi}^{\bar{r} - \bar{l}} \bar{q}^{\binom{\bar{l} + \bar{\gamma}}{2} + \bar{\gamma}(\bar{r} - \bar{l})}. \quad (33)$$

Из (5), (3) вытекает, что для любого $i = 1, \dots, t$ имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \xi_i^{r_i + \gamma_i} &= q_i^{-\gamma_i(r_i + \gamma_i)} \sum_{l=0}^{r_i + \gamma_i} \begin{bmatrix} r_i + \gamma_i \\ l \end{bmatrix}_{q_i} \prod_{j=0}^{l-1} (\xi_i q_i^{\gamma_i} - q_i^j) \\ &= q_i^{-\gamma_i(r_i + \gamma_i)} \sum_{l=-\gamma_i}^{\gamma_i} \begin{bmatrix} r_i + \gamma_i \\ l + \gamma_i \end{bmatrix}_{q_i} \prod_{j=0}^{\gamma_i + l - 1} (q_i^{l + \gamma_i} - q_i^j) \begin{bmatrix} \log_{q_i} \xi_i + \gamma_i \\ l + \gamma_i \end{bmatrix}_{q_i}, \quad \bar{r} \geq -\bar{\gamma}_i. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi^{\bar{r} + \bar{\gamma}} = \bar{q}^{-\bar{\gamma}(\bar{r} + \bar{\gamma})} \sum_{-\bar{\gamma} \leq \bar{l} \leq \bar{r}} \begin{bmatrix} \bar{r} + \bar{\gamma} \\ \bar{l} + \bar{\gamma} \end{bmatrix}_{\bar{q}} \prod_{\bar{0} \leq \bar{j} \leq \bar{\gamma} + \bar{l} - \bar{1}} (\bar{q}^{\bar{l} + \bar{\gamma}} - \bar{q}^{\bar{j}}) \begin{bmatrix} \log_{\bar{q}} \bar{\xi} + \bar{\gamma} \\ \bar{l} + \bar{\gamma} \end{bmatrix}_{\bar{q}}. \quad (34)$$

Из (33), (34) следует утверждение теоремы.

Сформулируем установленные выше результаты в виде следующих теорем.

Теорема 6. Пусть случайный вектор $\bar{\xi}$ распределен на множестве $K_{\bar{q}, \bar{\gamma}}^{(t)}$ и обладает $\bar{q}$ -биномиальными инвариантами $B_{\bar{\xi}}(\bar{k})$ любого порядка $\bar{k} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$. Тогда при выполнении условия

$$\sum_{\bar{k} \geq -\bar{\gamma}} B_{\bar{\xi}}(\bar{k}) \bar{q}^{\binom{\bar{k} + \bar{\gamma}}{2}} < \infty \quad (35)$$

распределение вектора $\bar{\xi}$ определяется своими моментами однозначно и имеют место следующие соотношения:

$$p_{\bar{\xi}}(\bar{r}) = \sum_{\bar{k} \geq \bar{r}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{k} + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{bmatrix}_{\bar{q}} B_{\bar{\xi}}(\bar{k}), \quad \bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}, \quad (36)$$

где ряд, стоящий в правой части (36), сходится абсолютно при $-\bar{\gamma} \leq \bar{r} < \bar{d}$,

$$\begin{aligned} &\left| p_{\bar{\xi}}(\bar{r}) - \sum_{\bar{r} \leq \bar{k} \leq \bar{d} - \bar{1}} (-1)^{|\bar{k} - \bar{r}|} \bar{q}^{\binom{\bar{k} - \bar{r}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{k} + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{bmatrix}_{\bar{q}} B_{\bar{\xi}}(\bar{k}) \right| \\ &\leq \sum_{\emptyset \neq M \subseteq \{1, \dots, t\}} \bar{q}^{\binom{\bar{d}(M) - \bar{r}}{2}} \begin{bmatrix} \bar{d}(M) + \bar{\gamma} \\ \bar{r} + \bar{\gamma} \end{bmatrix}_{\bar{q}} B_{\bar{\xi}}(\bar{d}(M)), \quad (37) \end{aligned}$$

причем при $t = 1$, $-\gamma \leq r$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{k=r}^{r+2\nu+1} (-1)^{k-r} q^{\binom{k-r}{2}} \begin{bmatrix} k + \gamma \\ r + \gamma \end{bmatrix} B_{\xi}(k) \leq p_{\xi}(r) \leq \sum_{k=r}^{r+2\nu} (-1)^{k-r} q^{\binom{k-r}{2}} \begin{bmatrix} k + \gamma \\ r + \gamma \end{bmatrix} B_{\xi}(k).$$

Теорема 7. Пусть $\{\bar{\xi}^{(n)}: n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность случайных векторов, распределенных на множестве $K_{\bar{q}, \bar{\gamma}}^{(t)}$ и обладающих $\bar{q}$ -биномиальными инвариантами $B_{(n)}(\bar{r})$, $n = 1, 2, \dots$, любого порядка $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$ (смешанными моментами

$\mathbf{M}\xi^{(n)\bar{r}+\bar{\gamma}}$, $n = 1, 2, \dots$, любого порядка $\bar{r} + \bar{\gamma} \geq 0$). Тогда для существования предельных значений

$$B(\bar{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} B^{(n)}(\bar{r}), \quad \bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$$

$\bar{q}$ -биномиальных инвариантов необходимо и достаточно существование предельных значений

$$M(\bar{r} + \bar{\gamma}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}\xi^{(n)\bar{r}+\bar{\gamma}}, \quad \bar{r} + \bar{\gamma} \geq 0,$$

моментов последовательности случайных векторов $\{\xi^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$.

Значения $M(\bar{r} + \bar{\gamma})$ и $B(\bar{r})$, $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$, связаны соотношениями (31), (32). Если при этом отображения B , $B^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условию (35), то существует единственное сосредоточенное на множестве $K_{\bar{q}, \bar{\gamma}}^{(t)}$ распределение, для которого числа $B(\bar{r})$, $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$, являются $\bar{q}$ -биномиальными инвариантами (а числа $M(\bar{r} + \bar{\gamma})$, $\bar{r} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$, смешанными моментами).

Указанное распределение определяется формулой (36) и для любого $\bar{r} \geq \bar{\gamma}_0$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_1^{(n)} = q_1^{r_1}, \dots, \xi_t^{(n)} = q_t^{r_t}) = p_{\bar{r}}(\bar{r}).$$

Пример 1. Рассмотрим систему линейных уравнений (1) над полем $\text{GF}(q)$, причем предположим, что

$$\mathbf{P}(a_{ij} = a) = q^{-1}, \quad a \in \text{GF}(q).$$

Согласно [4, стр. 178, 167] и принятым в п. 1 обозначениям, справедливы соотношения

$$\mathbf{P}(\nu_s = q^k) = (q^{-1}; q^{-1})_{\infty} \frac{q^{-k(k+s)}}{(q^{-1}; q^{-1})_k (q^{-1}; q^{-1})_{k+s}}, \quad k = s_0, s_0 + 1, \dots, \quad (38)$$

где $s_0 = \max\{0, -s\}$,

$$\mathbf{M}\nu_s^k = \sum_{t=0}^k \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}_q q^{-st}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (39)$$

Из соотношения (3) и неравенств $2^{-1}q^t \leq q^t - 1 \leq q^t$, $t = 1, 2, \dots$, вытекает, что

$$\begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}_q \geq 2^{-t} q^{t(k-t)}, \quad t = 0, 1, \dots, k,$$

и следовательно,

$$\mathbf{M}\nu_s^{2k} \geq (2^{-1}q^{-s})^k q^{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Таким образом, условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (\mathbf{M}\nu_s^k)^{1/k} < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{M}\nu_s^{2k})^{-1/(2k)} = \infty$$

известных признаков [8], гарантирующих однозначность восстановления распределения по последовательности его элементов, в данном случае не выполняются. В

работе Такача [7] доказано, что распределение целочисленной случайной величины ξ однозначно определяется последовательностью ее биномиальных моментов $\{M(\xi_k) : k = 0, 1, \dots\}$, если выполняется условие

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(M(\xi_k) \right)^{1/k} < \infty. \quad (41)$$

Используя (40), можно показать, что биномиальные моменты случайной величины ν_s данному условию не удовлетворяют.

Однако, в классе распределений, сосредоточенных на множестве $\{q^{s_0}, q^{s_0+1}, \dots\}$, распределение случайной величины ν_s определяется своими моментами однозначно. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что $\bar{q}$ -биномиальные инварианты B_k , $k \geq -s$, случайной величины ν_s удовлетворяют условию (35). Поскольку $P(\nu_s = q^k) = 0$ при $k < s_0$, на основании (4.8) для любого $k \geq -s$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} B_k &= (q^{-1}; q^{-1})_\infty \sum_{t=\max\{k, 0\}}^{\infty} \begin{bmatrix} t+s \\ k+s \end{bmatrix}_q \frac{q^{-t(t+s)}}{(q^{-1}; q^{-1})_t (q^{-1}; q^{-1})_{t+s}} \\ &= \frac{(q^{-1}; q^{-1})_\infty}{(q^{-1}; q^{-1})_{k+s}} q^{-k(k+s)} \sum_{t=\max\{0, -k\}}^{\infty} \frac{q^{-t(t+s)}}{(q^{-1}; q^{-1})_t (q^{-1}; q^{-1})_{t+k}} = \frac{q^{-k(k+s)}}{(q^{-1}; q^{-1})_{k+s}}; \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались соотношением

$$\sum_{t=\max\{0, -k\}}^{\infty} P(\nu_k = q^t) = 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \geq -s} B_k q^{\binom{k+s}{2}} \leq (q^{-1}; q^{-1})_\infty^{-1} q^{\binom{s}{2}} \sum_{k \geq -s} q^{-\binom{k+1}{2}} < \infty.$$

Если условие (35) не выполняется, то может существовать более одного распределения, имеющего числа $B_{\bar{\xi}(\bar{k})}$, $\bar{k} \in U_{\bar{\gamma}}^{(t)}$, своими $\bar{q}$ -биномиальными инвариантами.

Пример 2. При $q > 1$ рассмотрим числовые последовательности

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{q^n q^{-\binom{n}{2}}}{(q^{-1}; q^{-1})_n}, & n = 0, 1, \dots, \\ b_n^{(r)} &= \frac{q^n q^{-\binom{n}{2}}}{(q^{-1}; q^{-1})_n} (1 + (-q^r)^n q^{-n}), & n = 0, 1, \dots, \quad r = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Согласно следствию 2.2 из [9]

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{q^{-\binom{n}{2}}}{(q^{-1}; q^{-1})_n} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z q^{-n}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда при $z = -q^r$ получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^r)^n q^{-\binom{n}{2}}}{(q^{-1}; q^{-1})_n} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (42)$$

и следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(r)} = \mu < \infty. \quad (43)$$

Положим

$$B(k) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q, \quad B_r(k) = \sum_{n=k}^{\infty} b_n^{(r)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

и покажем, что для любых $r = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots$ выполняется равенство

$$B(k) = B_r(k). \quad (44)$$

Действительно, в силу (42)

$$B_r(k) - B(k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{-\binom{n}{2}} (-q^r)^n}{(q^{-1}; q^{-1})_n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(-q^r)^k q^{-\binom{k}{2}}}{(q^{-1}; q^{-1})_k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-\binom{n}{2}} (-q^r)^n}{(q^{-1}; q^{-1})_n} = 0.$$

Далее, на основании (43)

$$B(k) = (q^{-1}; q^{-1})_k^{-1} q^{k-\binom{k}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n q^{-\binom{n}{2}}}{(q^{-1}; q^{-1})_n} = \mu \frac{q^{-\binom{k}{2}} q^k}{(q^{-1}; q^{-1})_k} < \infty. \quad (45)$$

Пусть теперь $r = 0$ или $r = 1$ в выражении для $b_n^{(r)}$. Очевидно, $b_n^{(r)} \geq 0$, $n = 0, 1, \dots$, для указанных выражений r . Рассмотрим случайные величины ξ и $\eta^{(r)}$, $r \in \{0, 1\}$, распределенные по закону

$$\mathbf{P}(\xi = q^n) = \mu^{-1} a_n, \quad \mathbf{P}(\eta^{(r)} = q^n) = \mu^{-1} b_n^{(r)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

В силу (44), (45) ξ и $\eta^{(r)}$, $r \in \{0, 1\}$, имеют одинаковые $\bar{q}$ -биномиальные инварианты.

Автор выражает благодарность А. А. Левитской за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

Список литературы

1. Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика*. Наука, Москва, 1990.
2. Коваленко И. Н. О теоремах инвариантности для случайных булевых матриц. *Кибернетика* (1975) 5, 138–152.
3. Коваленко И. Н., Левитская А. А. Предельное поведение числа решений системы случайных линейных уравнений над конечным полем и конечным кольцом. *Доклады АН СССР* (1975) 221, №4, 778–779.
4. Коваленко И. Н., Левитская А. А., Савчук М. Н. *Избранные задачи вероятностной комбинаторики*. Наукова думка, Киев, 1986.
5. Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа*. Высшая школа, Москва, 1988.
6. Сачков В. Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
7. Takacs L. A moment problem. *J. Austr. Math. Soc.* (1965) 5, №4, 487–490.
8. Ширяев А. Н. *Вероятность*. Наука, Москва, 1980.
9. Эндрюс Г. *Теория разбиений*. Наука, Москва, 1982.

Статья поступила 28.06.96.