Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чашкин, О нижних оценках сложности систем векторов k -значной логики, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 1, 46–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:39:23

О нижних оценках сложности систем векторов k -значной логики

© 1998 г. А. В. Чашкин

Исследуется сложность порождения систем векторов схемами в базисах $B_{k,1}$, $B_{k,2}$, $B_{k,3}$, где $B_{k,1}$ — множество всех не более чем двуместных операций k -значной логики, $B_{k,2}$ — множество всех не более чем одноместных операций k -значной логики, содержащее также двуместные операции $\max$ и $\min$, $B_{k,3}$ — множество всех не более чем одноместных монотонных операций k -значной логики, содержащее также двуместные операции $\max$ и $\min$.

Основными результатами работы являются нижние оценки сложности порождения систем векторов и соотношения, связывающие нижние оценки сложности порождения систем векторов и нижние оценки сложности функций k -значной логики. Из этих соотношений следует, что установление нижних оценок сложности порождения узких систем векторов, асимптотически больших, чем полученные в этой работе, влечет установление экспоненциальных нижних оценок сложности функций k -значной логики при их реализации схемами в полных базисах. Под узкими системами понимаются системы, у которых число векторов по порядку не превосходит логарифма числа компонент этих векторов. Ранее автором были получены аналогичные результаты для систем булевых векторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01068.

1. Введение

Множество n -мерных векторов k -значной логики $\{0, 1, \dots, k-1\}^n$ обозначим через E_k^n . Пусть $G \subseteq E_k^n$, $|G| = m$, $B \subseteq \{f: E_k^n \rightarrow E_k^1\}$.

(B, G) -схемой называется ориентированный ациклический граф S , обладающий следующими свойствами.

Граф S содержит m вершин с входной степенью, равной нулю, и каждой из этих вершин приписан некоторый вектор g из G , причем разным вершинам приписаны разные векторы. Такие вершины называются входами схемы. Множество G называется множеством генераторов схемы.

Входные степени остальных вершин не превосходят двух. Эти вершины называются элементами схемы. Каждому элементу схемы с входной степенью, равной j , $j = 0, 1, 2$, приписана j -местная операция из B . Множество B называется базисом схемы.

Если вершины w и u схемы S связаны ребром, ориентированным от u к w , то будем говорить что выход u подключен к w (или к входу w).

Сложностью схемы S назовем число $|S|$ элементов этой схемы.

Для каждой вершины w схемы S определим вектор $S(w)$, порождаемый в этой вершине. Сделаем это индуктивно.

- (1) Если w — вход схемы, которому приписан вектор g , то $S(w) = g$.
- (2) Если вершине w приписана нульместная операция f , то $S(w)$ — постоянный вектор, все компоненты которого равны значению f .
- (3) Если вершине w приписана одноместная операция f и к w подключен выход вершины u , то $S(w) = f(S(u))$.
- (4) Если вершине w приписана двуместная операция f и к w подключены выходы вершин u и v , то $S(w) = f(S(u), S(v))$.

Будем говорить что схема S порождает систему векторов $W = \{w_i\}_{i=1}^p$, если в схеме S найдется p вершин u_i таких, что $S(u_i) = w_i$, $i = 1, \dots, p$. Если среди всех схем, порождающих систему W , схема S содержит наименьшее число элементов, то S называется минимальной схемой.

Число $V_{B,G}(W)$ назовем (B, G) -сложностью системы векторов W , если оно равно сложности минимальной схемы, порождающей W . Если множество генераторов G состоит из всех векторов, единственная ненулевая компонента которых равна единице, $G = \{e_i\}_{i=1}^n$, то, говоря о (B, G) -сложности системы векторов W , будем опускать символ G и обозначать эту сложность через $V_B(W)$.

В работе исследуется сложность порождения систем векторов схемами в базисах $B_{k,1}$, $B_{k,2}$, $B_{k,3}$, где $B_{k,1}$ — множество всех не более чем двуместных операций k -значной логики, $B_{k,2}$ — множество всех не более чем одноместных операций k -значной логики, содержащее также двуместные операции $\max$ и $\min$, $B_{k,3}$ — множество всех не более чем одноместных монотонных операций k -значной логики, содержащее также двуместные операции $\max$ и $\min$. Операцию $\max$ будем иногда обозначать через $\vee$.

Матрицей системы векторов

$$\left\{ w_i = \sum_j w_{ij} e_j \right\}_{i=1}^p$$

назовем матрицу W с элементами $W_{i,j} = w_{ij}$ при всех i и j . Далее при доказательстве различных утверждений вместо систем векторов будем использовать матрицы этих систем. Такая замена часто позволяет упростить изложение.

Основными результатами работы являются доказанные в леммах 2–4 нижние оценки сложности порождения систем векторов и доказанные в теоремах 4–6 соотношения, связывающие нижние оценки сложности порождения систем векторов и нижние оценки сложности функций k -значной логики. Из этих соотношений следует, что установление нижних оценок сложности порождения узких систем векторов, асимптотически больших, чем полученные в леммах 2–4, влечет установление экспоненциальных нижних оценок сложности функций k -значной логики при их реализации схемами в полных базисах. Здесь под узкими системами понимаются

системы, у которых число векторов по порядку не превосходит логарифма числа компонент этих векторов. Ранее аналогичные результаты для систем булевых векторов были получены автором в [1]. Неопределяемые в работе понятия можно найти в [2].

2. Нижние оценки сложности

Лемма 1. Пусть схема S содержит

- (1) p вершин со входной степенью, равной нулю,
- (2) q вершин со входной степенью, равной единице,
- (3) не более r вершин с выходной степенью, равной нулю,
- (4) не менее s вершин с выходной степенью, равной двум.

Тогда схема S содержит не менее $p + q + s - r$ элементов.

Доказательство. Сравним количество входящих и исходящих ребер схемы S . Число вершин схемы S обозначим через t . Легко видеть, что S содержит $2(t - p - q) + q$ входящих ребер и не менее $(t - r - s) + 2s$ исходящих ребер. Следовательно,

$$2(t - p - q) + q \geq (t - r - s) + 2s.$$

Тогда

$$|S| \geq (t - p) \geq p + q + s - r.$$

Лемма доказана.

Вершину u схемы S назовем особой вершиной схемы S , если либо выходная степень u больше единицы, либо если u — выход S .

Особую вершину u схемы S назовем особой вершиной i -го входа S , если i -й вход и u связаны ориентированной цепью, не проходящей через другие особые вершины.

Если вершины w и u схемы S связаны цепью, ориентированной от u к w , то будем говорить что вершина w находится ниже вершины u .

Схему S в базисе $B_{k,1}$ назовем нормальной, если S содержит только двухвходовые элементы. Схему S в базисе $B_{k,2}$ назовем нормальной, если S содержит только одновходовые и двухвходовые элементы. Легко показать, что любая схема как в базисе $B_{k,1}$, так и в базисе $B_{k,2}$ может быть преобразована в нормальную схему без увеличения сложности.

Будем полагать что к i -му входу всех рассматриваемых ниже (B) -схем приписан вектор e_i .

Преобразование схемы S в базисе $B_{k,1}$ ($B_{k,2}$), заключающееся в замене вектора, подключенного к i -му входу, нулевым вектором, удалении i -й компоненты из всех векторов, подключенных к входам схемы, и преобразование S в нормальную схему назовем удалением i -го входа. Легко показать, что сложность любой схемы, полученной в результате удаления произвольного неизолированного входа, не больше сложности исходной схемы.

Пусть $W(k, n, m)$ — множество всех матриц k -значной логики размера $n \times m$, состоящих из попарно различных столбцов.

Лемма 2. Пусть $W \in W(k, n, m)$. Тогда

$$V_{B_{k,1}}(W) \geq m - 1 + \lfloor (m - 1) / (k - 1) \rfloor - 2n.$$

Доказательство. Пусть W — множество матриц, имеющих минимальную сложность среди всех матриц множества $W(k, n, m)$. Покажем, что среди минимальных схем, порождающих матрицы этого множества, обязательно найдется схема с изолированным входом. Предположим, что это не так. Пусть W_0 — произвольная матрица из W . Преобразуем некоторую минимальную схему S_0 , порождающую эту матрицу, следующим образом:

- добавим к схеме новый $(m + 1)$ -й изолированный вход,
- увеличим длину всех генераторов на единицу, добавив к каждому из них $(m + 1)$ -ю нулевую компоненту.

Преобразованная схема S'_0 будет порождать некоторую матрицу k -значной логики W'_0 размера $n \times (m + 1)$. Возможны два случая:

W'_0 принадлежит множеству $W(k, n, m + 1)$,

в W'_0 найдутся два одинаковых столбца, $(m + 1)$ -й и некоторый j -й.

Если имеет место первый случай, то удалим из схемы S'_0 произвольный неизолированный вход. Новая схема S''_0 будет порождать некоторую матрицу W''_0 . Очевидно, что W''_0 принадлежит множеству $W(k, n, m)$ и

$$V_{B_{k,1}}(W''_0) \leq V_{B_{k,1}}(W'_0).$$

Последнее неравенство противоречит сделанному предположению, и, следовательно, первый случай невозможен.

Во втором случае из схемы S'_0 удалим j -й вход. Новая схема S'''_0 будет порождать матрицу W'''_0 , отличающуюся от матрицы W_0 только порядком следования столбцов. Очевидно, что $|S'''_0| \leq |S_0|$, а это вновь противоречит сделанному предположению. Следовательно, второй случай также невозможен, и поэтому обязательно найдется схема, содержащая изолированный вход. Без ограничения общности будем полагать, что таким входом является первый вход.

Теперь покажем, что в схеме S_0 никакие k входов не могут иметь общую особую вершину. Предположим, что это не так, и некоторая вершина u является особой вершиной входов $i_1, i_2, \dots, i_k$ (заметим, что ни один из этих входов не равен единице, так как изолированным по предположению является первый вход). Очевидно, что среди компонент вектора $S_0(u)$, соответствующих первому входу и входам i_j , $j = 1, \dots, k$, найдется не менее двух одинаковых компонент. Но тогда эти компоненты будут одинаковы и во всех других векторах, порождаемых элементами схемы S_0 , находящимися ниже u . Это следует из того, что все ориентированные цепи, соединяющие входы i_j с этими элементами, проходят через вершину u . Следовательно, матрица, порождаемая схемой S_0 , будет содержать не менее двух одинаковых столбцов, а это противоречит определению матрицы W_0 .

Из выявленных выше свойств схемы S_0 следует, что в этой схеме найдется не менее $\lfloor (m - 1) / (k - 1) \rfloor$ особых вершин, и по крайней мере $\lfloor (m - 1) / (k - 1) \rfloor - n$ из них не являются выходами S_0 . Следовательно, в схеме S_0 содержится не менее

$\lfloor (m-1)/(k-1) \rfloor - n$ вершин, выходная степень которых не менее двух. В соответствии с леммой 1

$$|S_0| \geq m - (n+1) + (\lfloor (m-1)/(k-1) \rfloor - n) = m - 1 + \lfloor (m-1)/(k-1) \rfloor - 2n.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $W \in W(k, n, m)$. Тогда

$$V_{B_{k,2}}(W) \geq 2m - 2n - 2.$$

Доказательство. Пусть W — множество матриц, имеющих минимальную сложность среди всех матриц множества $W(k, n, m)$. Как и при доказательстве предыдущей леммы, несложно показать, что в W обязательно найдется матрица, одна из минимальных схем которой содержит по крайней мере один изолированный вход. Эту схему обозначим через S_0 . Как и ранее, полагаем, что изолированным является первый вход.

Теперь покажем, что в схеме S_0 никакие два входа не могут иметь общую особую вершину. Предположим, что это не так и некоторая вершина u является особой вершиной входов i_1 и i_2 . Очевидно, что среди компонент вектора $S_0(u)$, соответствующих первому входу и входам i_j , найдется не менее двух одинаковых компонент. Это связано с тем, что цепи, соединяющие каждый из входов i_j с u , проходят только через элементы, которым приписаны $\max$ или $\min$. Но тогда эти компоненты будут одинаковы и во всех других векторах, порождаемых элементами схемы S_0 , находящимися ниже u . Следовательно, матрица, порождаемая схемой S_0 , будет содержать не менее двух одинаковых столбцов, а это противоречит определению матрицы W_0 .

Из выявленных выше свойств схемы S_0 следует, что в этой схеме найдется не менее $m-1$ особых вершин и по крайней мере $m-1-n$ из них не являются выходами S_0 . Следовательно, в схеме S_0 есть не менее $m-1-n$ вершин, выходная степень которых не менее двух. В соответствии с леммой 1

$$|S_0| \geq m - (n+1) + (m-1-n) = 2m - 2n - 2.$$

Лемма доказана.

Пусть $W'(k, n, m)$ — множество всех матриц k -значной логики размера $n \times m$, состоящих из попарно несравнимых столбцов.

Лемма 4. Пусть $W \in W'(k, n, m)$. Тогда

$$V_{B_{k,3}}(W) \geq 2m - 2n - 2.$$

Доказательство. Пусть S — минимальная схема, порождающая матрицу W . Покажем, что в схеме S никакие два входа не могут иметь общую особую вершину. Предположим, что это не так и некоторая вершина u является особой вершиной входов i_1 и i_2 . Очевидно, что либо компоненты вектора $S(u)$, соответствующие входам i_j , будут одинаковы, либо одна из них будет меньше другой. В первом случае

эти компоненты будут одинаковы и во всех других векторах, порождаемых элементами схемы S , находящимися ниже u . Следовательно, матрица, порождаемая схемой S , будет содержать не менее двух одинаковых столбцов, а это противоречит определению матрицы W . Во втором случае компонента, меньшая в $S(u)$, будет не больше и во всех векторах, порождаемых элементами схемы S , находящимися ниже u . Это следует из монотонности базиса схемы. Следовательно, матрица, порождаемая схемой S , будет содержать не менее двух сравнимых столбцов, а это противоречит определению матрицы W .

Как и при доказательстве предыдущей леммы, заключаем, что в схеме S найдется не менее $m - 1$ особых вершин, не менее $m - 1 - n$ из которых не являются выходами S . Использование леммы 1 завершает доказательство.

3. Верхние оценки сложности

Обозначим через $f_k(\alpha, \beta)$ и $g_k(\alpha, \beta)$ произвольные функции k -значной логики, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned} f_k(0, \alpha) &= \begin{cases} \alpha + 1, & \text{если } 1 \leq \alpha \leq k - 2, \\ 1, & \text{если } \alpha \leq k - 1, \end{cases} \\ f_k(\alpha, 0) &= \alpha, \\ g_k(\alpha, 0) &= g_k(0, \alpha) = \alpha. \end{aligned}$$

Схему S назовем *разделимой*, если любой вход S связан с любым выходом S не более, чем одной ориентированной цепью.

Положим

$$D_k = \{f_k, g_k\}.$$

Лемма 5. Пусть S — разделимая схема в базисе D_k , W — матрица, порождаемая схемой S , t_{ij} — число вторых входов элементов f_k , через которые проходит, цепь соединяющая j -й вход и i -й выход схемы S . Тогда

$$W_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если нет цепи, соединяющей } j\text{-й вход и } i\text{-й выход,} \\ 1 + (t_{ij} \bmod (k - 1)) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть цепь, соединяющую j -й вход и i -й выход схемы (если такая цепь есть) и определить, как преобразуют элементы, через которые эта цепь проходит, j -ю компоненту вектора, подключенного к j -му входу.

Пусть $B(k, n)$ — матрица размера $(n + 1) \times k^n$, первые n строк которой образуют некоторую матрицу W из множества $W(k, n, k^n)$, а последняя строка содержит только единицы. Без ограничения общности будем считать, что j -й столбец матрицы W совпадает с k -ичным разложением числа $j - 1$.

Лемма 6. Существует разделимая схема S в базисе D_k , порождающая матрицу $B(k, n)$, такая, что

$$|S| \leq 2(k^n - 1) - n.$$

Доказательство. Построим разделимую схему $S_{k,n}$, порождающую матрицу $B(k, n)$ и имеющую сложность $2(k^n - 1) - n$. Строить схему $S_{k,n}$ при произвольных $k \geq 2$ и $n \geq 1$ будем индукцией по n . Основанием индукции будет схема $S_{k,1}$. Эта схема порождает первую строку матрицы $B(k, 1)$ в соответствии с формулой

$$f_k(x_2, f_k(x_3, \dots, x_{k-2}, f(x_{k-1}, x_k) \dots)),$$

вторую строку в соответствии с формулой

$$g_k(x_1, g_k(x_3, \dots, x_{k-2}, g(x_{k-1}, x_k) \dots)).$$

Очевидно, что

$$|S_{k,1}| = 2k - 3 = 2(k - 1) - 1,$$

то есть сложность схемы $S_{k,1}$ удовлетворяет неравенству леммы.

Предположим далее, что при некотором $n \geq 1$ и при произвольном $k \geq 2$ существует схема $S_{k,n}$, порождающая матрицу $B(k, n)$ с требуемой сложностью. На основе этой схемы построим схему $S_{k,n+1}$, порождающую матрицу $B(k, n+1)$. Схема $S = S_{k,n+1}$ будет состоять из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 . Опишем эти подсхемы.

Подсхема S_1 порождает все векторы

$$y_i = \bigvee_j x_j, \quad (i-1)k^n < j \leq ik^n, \quad 2 \leq i \leq k.$$

Подсхема S_2 порождает все векторы

$$z_i = \bigvee_j x_{i+jk^n}, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad 1 \leq i \leq k^n,$$

Подсхема S_3 является экземпляром схемы $S_{k,n}$. К i -му входу S_3 подключается вектор z_i , порождаемый подсхемой S_2 . Легко видеть, что подсхема S_3 порождает последние n строк матрицы $B(k, n+1)$.

Подсхема S_4 порождает первую строку матрицы $B(k, n+1)$, исходя из векторов y_i , порожденных подсхемой S_1 , в соответствии с формулой

$$f_k(y_2, f_k(y_3, \dots, y_{k-2}, f(y_{k-1}, y_k) \dots)).$$

Оценим сложность схемы S . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{i=1}^4 |S_i| = (k^n - 1)(k - 1) + k^n(k - 1) + |S_{k,n}| + (k - 2) \\ &= |S_{k,n}| + 2(k^{n+1} - k^n) - 1. \end{aligned}$$

По предположению индукции

$$|S_{k,n}| = 2(k^n - 1) - n,$$

поэтому

$$|S_{k,n+1}| = 2(k^n - 1) - n + 2k^n(k - 1) - 1 = 2(k^{n+1} - 1) - (n + 1).$$

Очевидно, что $S_{k,n+1}$ — разделимая схема.

Лемма доказана.

Пусть $k^{n-1} < m < k^n$, $C(n, m)$ — матрица размера $(n+1) \times m$, образованная первыми m столбцами матрицы $B(k, n)$.

Лемма 7. *Существует разделимая схема S в базисе D_k , порождающая матрицу $C(n, m)$, такая, что*

$$|S| \leq 2(m-1) - n.$$

Доказательство. Положим $n' = \lfloor \log_k m \rfloor$. Пусть S' — построенная в доказательстве леммы 6 схема, порождающая матрицу $B(k, n')$. Воспользуемся этой схемой для построения схемы S , порождающей матрицу $C(n, m)$. Схема S состоит из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 . Опишем эти подсхемы.

Подсхема S_1 состоит из элементов g_k и порождает все векторы

$$y_i = \bigvee_j x_j, \quad (i-1)k^{n'} < j \leq \min(ik^{n'}, m), \quad 2 \leq i \leq l, \quad l = \lfloor mk^{-n'} \rfloor.$$

Подсхема S_2 состоит из элементов g_k и порождает все векторы

$$z_i = \bigvee_j x_{i+jk^{n'}}, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad i+jk^{n'} \leq m, \quad 1 \leq i \leq k^{n'}.$$

Подсхема S_3 является экземпляром схемы S' . К i -му входу S_3 подключается вектор z_i , порождаемый подсхемой S_2 . Легко видеть, что подсхема S_3 порождает последние $n' + 1$ строк матрицы $C(n, m)$.

Подсхема S_4 порождает первую строку матрицы $C(n, m)$, исходя из векторов y_i , порожденных подсхемой S_1 , в соответствии с формулой

$$f_k(y_2, f_k(y_3, \dots, y_{k-2}, f(y_{k-1}, y_k) \dots)).$$

Оценим сложность схемы S . Ясно, что

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{i=1}^4 |S_i| \\ &= m - k^{n'} - \lfloor (m - k^{n'})k^{-n'} \rfloor + (\lfloor mk^{-n'} \rfloor - 1)(m - \lfloor mk^{-n'} \rfloor - 1)k^{-m'} \\ &\quad + (\lfloor mk^{-n'} \rfloor - 2)(k^{n'} - (m - \lfloor mk^{-n'} \rfloor - 1)) + 2k^{n'} - n' - 2 + \lfloor (m - k^{-n'})k^{-n'} \rfloor - 1 \\ &= 2m - (n' + 1) - 2 = 2(m-1) - n. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть T_j — множество индексов, определяемых посредством равенств

$$T_j = \{i \mid (k^j - 1)/(k-1) < i \leq (k^{j+1} - 1)/(k-1)\}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Обозначим через $B'(k, n)$ матрицу размера $(n+1) \times ((k^{n+1} - 1)/(k-1))$ k -значной логики такую, что подматрица $B'_s(k, n)$ этой матрицы, образованная первыми s строками и столбцами, номера которых принадлежат множеству T_{s-1} , совпадает с матрицей $B(k, s-1)$, а подматрица, образованная этими же столбцами и последними $n+1-s$ строками состоит только из нулей.

Лемма 8. *Существует разделимая схема S в базисе D_k , порождающая матрицу $B'(k, n)$, такая, что*

$$|S| \leq 2 \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} - 2(n + 1).$$

Доказательство. Построим схему $S'_{k,n}$, порождающую матрицу $B'(k, n)$ и имеющую сложность, равную $2(k^{n+1} - 1)/(k - 1) - 2(n + 1)$. Строить схему $S'_{k,n}$ при произвольных $k \geq 2$, $n \geq 0$ будем индукцией по n на основе схем $S_{k,n}$, приведенных в доказательстве леммы 6. Основанием индукции будет схема $S'_{k,0}$, порождающая матрицу $B'(k, 0)$. Легко видеть, что матрица $B'(k, 0)$ состоит из единственной единичной компоненты и поэтому $V_{D_k}(B'(k, 0)) = 0$.

Предположим теперь, что при некотором $n \geq 0$ и произвольном $k \geq 2$ построена схема $S'_{k,n}$, порождающая с требуемой сложностью матрицу $B'(k, n)$. Воспользуемся этой схемой для построения схемы $S'_{k,n+1}$. Схема $S'_{k,n+1}$ состоит из подсхем S_1 , S_2 , S_3 .

Подсхема S_1 является экземпляром схемы $S'_{k,n}$, к i -му входу которой подключен вектор x_i .

Подсхема S_2 является экземпляром схемы $S_{k,n+1}$, к i -му входу которой подключен вектор $x_{i+(k^n-1)/(k-1)}$.

Подсхема S_3 состоит из элементов $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$, каждый из которых выполняет операцию g_k . При этом к одному из входов каждого элемента s_i подключен i -й выход подсхемы S_1 , а к другому i -й выход подсхемы S_2 .

Очевидно, что

$$|S'_{k,n+1}| = \sum_{i=1}^3 |S_i| = |S'_{k,n}| + |S_{k,n+1}| + (n + 1).$$

Учитывая предположение индукции и неравенство леммы 6 видим, что

$$|S'_{k,n+1}| = 2 \frac{k^{n+2} - 1}{k - 1} - 2(n + 2).$$

Лемма доказана.

Пусть

$$\frac{k^n - 1}{k - 1} < m < \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1},$$

$C'(n, m)$ — матрица размера $(n + 1) \times m$, образованная первыми m столбцами матрицы $B'(k, n)$.

Лемма 9. *Существует разделимая схема S в базисе D_k , порождающая матрицу $C'(n, m)$, такая, что*

$$|S| \leq 2m - 2(n + 1).$$

Доказательство. Пусть

$$k^{t-1} < m - \frac{k^n - 1}{k - 1} < k^t.$$

Пусть далее S' — построенная в доказательстве леммы 8 схема, порождающая матрицу $B'(k, n - 1)$, а S'' — построенная в доказательстве леммы 7 схема, порождающая матрицу $C(t, m - (k^n - 1)/(k - 1))$. Воспользуемся этими схемами для

построения схемы S , порождающей матрицу $C'(n, m)$. Схема S состоит из подсхем S_1, S_2, S_3 .

Подсхема S_1 является экземпляром схемы S' , к i -му входу которой подключен вектор x_i .

Подсхема S_2 является экземпляром схемы S'' , к i -му входу которой подключен вектор $x_{i+(k^n-1)/(k-1)}$.

Подсхема S_3 состоит из элементов $s_1, s_2, \dots, s_t$, каждый из которых выполняет операцию g_k . При этом к одному из входов каждого элемента s_i подключен i -й выход подсхемы S_1 , а к другому i -й выход подсхемы S_2 .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{i=1}^3 |S_i| = |S'| + |S''| + t \\ &= 2 \frac{k^n - 1}{k - 1} - 2n + 2 \left(m - \frac{k^n - 1}{k - 1} - 1 \right) - t + t \\ &= 2m - 2(n + 1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1. При любом $m > 1$ существует такая матрица $W \in W(k, \lfloor \log_k m \rfloor, m)$, что

$$V_{B_{k,1}}(W) = m - 1 + \lfloor (m - 1)/(k - 1) \rfloor [-2] \log_k m.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы построим схему S и покажем, что построенная схема порождает требуемую матрицу.

Пусть $m = (k - 1)m_1 + 1 + m_2$, где $0 \leq m_2 \leq k - 1$. Схема S состоит из трех подсхем S_1, S_2, S_3 .

Подсхема S_1 порождает $m_1 + 1$ различных вектор h_s :

$$h_s = f_k(x_{1+s(k-1)}, f_k(x_{2+s(k-1)}, \dots, f_k(x_{k-2+s(k-1)}, x_{k-1+s(k-1)}) \dots))$$

при $s = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ и при $s = m_1$

$$h_m = f_k(x_{1+s(k-1)}, f_k(x_{2+s(k-1)}, \dots, f_k(x_{m_2-2+s(k-1)}, x_{m_1-1+s(k-1)}) \dots)).$$

Очевидно, что $|S_1| = m_1(k - 2) + m_2 - 1$.

Подсхема S_2 является экземпляром построенной в доказательстве леммы 9 (или леммы 8, если $m_2 = k - 1$) схемы S , порождающей матрицу $C'(n, m_1 + 1)$ (или матрицу $C(n, m_1 + 1)$), к s -му входу которой подключен s -й выход подсхемы S_1 . Так как $m_1 = \lfloor (m - 1)/(k - 1) \rfloor - 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{k^n - 1}{k - 1} &< \lfloor (m - 1)/(k - 1) \rfloor \leq \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}, \\ \frac{k^n - 1}{k - 1} &< \frac{m - 1}{k - 1} \leq \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}, \\ k^n &< m \leq k^{n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $n + 1 = \lfloor \log_k m \rfloor$. В силу леммы 9 (или 8) $|S_2| = 2m_1 - 2n$.

Подсхема S_3 состоит из единственного изолированного m -го входа. Ясно, что

$$\begin{aligned} |S| &= m_1(k-2) + m_2 - 1 + 2m_1 - 2n \\ &= m_1(k-1) + m_1 + m_2 + 1 - 2n - 2 \\ &= m - 1 + \lfloor (m-1)/(k-1) \rfloor [-2] \log_k m. \end{aligned}$$

Покажем, что построенная схема порождает матрицу без совпадающих столбцов. Рассмотрим два столбца порожденной матрицы, i -й и j -й. Будем полагать, что $j < i$ и $\lfloor i/(k-1) \rfloor = \lfloor j/(k-1) \rfloor$.

Пусть $\pi = (1 \ 2 \ \dots \ k-1)$ — цикл из симметрической группы S_{k-1} . Из конструкции построенной схемы и леммы 5 легко следуют соотношения, связывающие значения p_t и q_t ненулевых t -х компонент i -го и j -го столбцов:

$$p_t = \pi^{(i-j)} q_t. \quad (1)$$

Так как $0 < i - j < k - 1$, очевидно, что рассматриваемые столбцы различны.

Рассмотрим случай $\lfloor i/(k-1) \rfloor > \lfloor j/(k-1) \rfloor$. Пусть

$$i = i_1(k-1) + i_0, \quad j = j_1(k-1) + j_0, \quad 0 < i_0 < j_0 < k-1.$$

В силу соотношения (1) значения p_t и p'_t ненулевых t -х компонент i -го и $(i-i_0+1)$ -го столбцов связаны соотношением

$$p_t = \pi^{(i_0-1)} p'_t,$$

а значения q_t и q'_t ненулевых t -х компонент j -го и $(j-j_0+1)$ -го столбцов соотношением

$$q_t = \pi^{(i_0-1)} q'_t.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$p'_t = \pi^{(j_0-i_0)} q'_t.$$

Если разность $j_0 - i_0$ отлична от нуля, то очевидно, что последние ненулевые компоненты $(j-j_0+1)$ -го и $(i-i_0+1)$ -го столбцов не могут быть одновременно равны единице. Но по построению эти столбцы входят в матрицу $C'(n, m_1+1)$, то есть их последние ненулевые компоненты равны единице. Пришли к противоречию. Если $j_0 - i_0 = 0$, то $(j-j_0+1)$ -й и $(i-i_0+1)$ -й столбцы совпадают. Но матрица $C'(n, m_1+1)$ состоит из попарно различных столбцов. Вновь получаем противоречие. Таким образом, показано, что построенная схема порождает матрицу без совпадающих столбцов. Верхняя оценка теоремы доказана. Нижняя оценка следует из леммы 2. Теорема доказана полностью.

Обозначим через $s_i(x)$ (произвольную) функцию, удовлетворяющую условиям $s_i(0) = 0$, $s_i(1) = i$.

Лемма 10. Пусть $W_n \in W(k, n, k^n)$. Тогда

$$V_{B_{k,2}}(B(k, n)) \leq 2k^n - 2n - 2.$$

Доказательство. Построим схему $S_{k,n}$, порождающую матрицу W_n со сложностью $2k^n - 2n - 2$. Без ограничения общности будем полагать, что j -й столбец матрицы W_n совпадает с k -ичным разложением числа $j - 1$. Строить схему $S_{k,n}$ при произвольных $k \geq 2$ и $n \geq 1$ будем индукцией по n . Основанием индукции будет схема $S_{k,1}$. Эта схема порождает единственную строку матрицы W_1 в соответствии с формулой

$$x_2 \vee s_2(x_3) \vee \dots \vee s_{k-1}(x_k).$$

Очевидно, что

$$|S_{k,1}| = 2(k-1) - 2.$$

Предположим далее, что при некотором $n \geq 1$ и при произвольном $k \geq 2$ существует схема $S_{k,n}$, порождающая матрицу W_n из $W(k, n, k^n)$ с требуемой сложностью. На основе этой схемы построим схему $S_{k,n+1}$, порождающую матрицу W_{n+1} из $W(k, n+1, k^{n+1})$. Схема $S = S_{k,n+1}$ будет состоять из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 . Опишем эти подсхемы.

Подсхема S_1 порождает все векторы

$$y_i = \bigvee_j x_j, \quad (i-1)k^n < j \leq ik^n, \quad 2 \leq i \leq k.$$

Подсхема S_2 порождает все векторы

$$z_i = \bigvee x_{i+jk^n}, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad 2 \leq i \leq k^n.$$

Подсхема S_3 является экземпляром схемы $S_{k,n}$. К i -му входу S_3 подключается вектор z_i , порождаемый подсхемой S_2 . Легко видеть, что подсхема S_3 порождает последние n строк матрицы W_{n+1} .

Подсхема S_4 порождает первую строку матрицы W_{n+1} , исходя из векторов y_i , порожденных подсхемой S_1 , в соответствии с формулой

$$y_2 \vee s_2(y_3) \vee \dots \vee s_{k-1}(y_k).$$

Оценим сложность схемы S . Легко видеть что

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{i=1}^4 |S_i| = (k^n - 1)(k - 1) + (k^n - 1)(k - 1) + |S_{k,n}| + (2k - 4) \\ &= |S_{k,n}| + 2(k^{n+1} - k^n) - 2. \end{aligned}$$

По предположению индукции $|S_{k,n}| = 2(k^n - 1) - 2n$, поэтому

$$|S_{k,n+1}| = 2(k^n - 1) - 2n + 2k^n(k - 1) - 2 = 2(k^{n+1} - 1) - 2(n + 1).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. При любом $m > 1$ существует такая матрица $W \in W(k, \lceil \log_k m \rceil, m)$, что

$$V_{B_{k,2}}(W) = 2m - 2 \lceil \log_k m \rceil - 2.$$

Доказательство. Будем полагать, что m не является целой степенью k , в противном случае существование требуемой матрицы следует из лемм 10 и 3. Положим $n = \lfloor \log_k m \rfloor$. Пусть $W' \in W(k, n, k^n)$ и пусть S' — построенная в доказательстве леммы 10 схема, порождающая W' . Воспользуемся этой схемой для построения схемы S , порождающей матрицу W . Схема S состоит из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 . Опишем эти подсхемы.

Подсхема S_1 порождает все векторы

$$y_i = \bigvee x_j, \quad (i-1)k^n < j \leq \min(ik^n, m), \quad 2 \leq i \leq \lceil m/k^n \rceil.$$

Подсхема S_2 порождает все векторы

$$z_i = \bigvee x_{i+jk^n}, \quad 0 \leq j \leq k-1, i+jk^n \leq m, \quad 2 \leq i \leq k^n.$$

Подсхема S_3 является экземпляром схемы S' . К i -му входу S_3 подключается вектор z_i , порождаемый подсхемой S_2 . Легко видеть, что подсхема S_3 порождает последние $n-1$ строк матрицы W .

Подсхема S_4 порождает первую строку матрицы W , исходя из векторов y_i , порожденных подсхемой S_1 , в соответствии с формулой

$$y_2 \vee s_2(y_3) \vee \dots \vee s_{k-1}(y_k).$$

Оценим сложность схемы S . Ясно, что

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{i=1}^4 |S_i| \\ &= m - k^n - \lfloor (m - k^n)/k^n \rfloor + (\lceil m/k^n \rceil - 1)(m - (\lceil m/k^n \rceil - 1)k^n - 1) \\ &\quad + (\lceil m/k^n \rceil - 2)(k^n - (m - (\lceil m/k^n \rceil - 1)k^n)) + 2k^n - 2n - 2 + 2(\lfloor (m - k^n)/k^n \rfloor - 1) \\ &= 2m - 2(n+1) - 2. \end{aligned}$$

Таким образом, верхняя оценка, указанная в теореме, доказана. Нижняя оценка следует из леммы 3. Теорема доказана полностью.

Пусть $W(m) \in W(k, n, m)$ и j -й столбец $W(m)$ совпадает с k -ичным представлением числа $j-1$. Через $NW(m)$ обозначим матрицу из $W(k, n, m)$, у которой j -й столбец совпадает с k -ичным представлением числа $k-j$. Пусть $D(m)$ — матрица размера $2\lfloor \log_k m \rfloor \times m$, у которой i -я строка при $1 \leq i \leq \lfloor \log_k m \rfloor$ совпадает с i -й строкой матрицы $W(m)$, а при $\lfloor \log_k m \rfloor + 1 \leq i \leq 2\lfloor \log_k m \rfloor$ с $i - \lfloor \log_k m \rfloor$ -й строкой матрицы $NW(m)$.

Теорема 3. При любом $m > 1$ справедливо равенство

$$V_{B_{k,3}}(D(m)) = 2m + O(m^{1/2}).$$

Доказательство. Введем четыре множества индексов I_1, I_2, I_3, I_4 , полагая

$$\begin{aligned} I_1 &= \{1, \dots, \lfloor 1/2 \rfloor \log_k m\}, \\ I_2 &= \{\lfloor 1/2 \rfloor \log_k m + 1, \dots, \log_k m\}, \\ I_3 &= \{\log_k m + 1, \dots, \log_k m + \lfloor 1/2 \rfloor \log_k m\}, \\ I_4 &= \{\log_k m + \lfloor 1/2 \rfloor \log_k m + 1, \dots, 2\log_k m\}. \end{aligned}$$

Построим схему S_m , порождающую матрицу $D(m)$. Схема S_m состоит из двух подсхем $S_{m,1}$ и $S_{m,2}$.

Подсхема $S_{m,1}$ порождает матрицу D_1 , состоящую из строк матрицы $D(m)$, номера которых принадлежат множествам I_1 и I_3 . Подсхема $S_{m,2}$ порождает матрицу D_2 , состоящую из строк матрицы $D(m)$, номера которых принадлежат множествам I_2 и I_4 . Легко видеть, что матрица D_1 содержит не более $k^{|I_1|}$, а матрица D_2 не более $k^{|I_2|}$ различных столбцов.

Конструкции подсхем $S_{m,1}$ и $S_{m,2}$ практически одинаковы, поэтому ограничимся описанием только подсхемы $S_{m,1}$. Подсхема $S_{m,1}$ состоит из двух подсхем $S_{m,1}^1$ и $S_{m,1}^2$.

Подсхема $S_{m,1}^1$ порождает все векторы

$$y_i = \bigvee x_j,$$

где

$$(i-1)k^{|I_1|} \leq j \leq \max(ik^{|I_1|}, m), \quad 1 \leq i \leq \lfloor m/k^{|I_1|} \rfloor.$$

Подсхема $S_{m,1}^2$ является экземпляром схемы S , порождающей матрицу

$$B(k, \lfloor 1/2 \rfloor \log_k m[\lfloor \cdot \rfloor]).$$

К i -му входу S подключается вектор y_i , порождаемый подсхемой $S_{m,1}^1$.

Оценим сложность подсхемы $S_{m,1}$. Легко видеть, что

$$|S_{m,1}| = |S_{m,1}^1| + |S_{m,1}^2| \leq m + ck^{\lfloor 1/2 \rfloor \log_k m[\lfloor \cdot \rfloor]},$$

где c — постоянная. Так как $|S_m| = |S_{m,1}| + |S_{m,1}|$, то

$$|S_m| \leq 2m + 2ck^{\lfloor 1/2 \rfloor \log_k m[\lfloor \cdot \rfloor]}.$$

Таким образом, верхняя оценка, указанная в теореме, доказана. Нижняя оценка следует из леммы 4. Теорема доказана полностью.

4. Сложность матриц и сложность функций

Сложность функции k -значной логики f при вычислении ее схемами в базисе B обозначим через $L_B(f)$.

Пусть W — матрица размера $n \times m$, w — частичная функция от $r = r_1 + r_2$ переменных, где $r_1 = \lfloor \log_k n \rfloor$, $r_2 = \lfloor \log_k m \rfloor$.

Будем говорить, что матрица W соответствует функции w , а функция w соответствует матрице W , если при всех i, j таких, что $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, справедливо равенство

$$W_{i,j} = w(\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}, \beta_1, \dots, \beta_{r_2}),$$

где α и β определяются из условий

$$i = \sum_{s=1}^{r_1} k^{s-1} \alpha_s, \quad j = \sum_{s=1}^{r_2} k^{s-1} \beta_s.$$

Через $J = \{J_1, \dots, J_{r_2}\}$ обозначим систему векторов, i -й вектор которой совпадает с i -й строкой матрицы $J(m) \in W(k, r_2, m)$. Через $DJ = \{J_1, \dots, J_{2r_2}\}$ обозначим систему векторов, i -й вектор которой совпадает с i -й строкой матрицы $D(m)$.

Нетрудно убедиться, что всякая (B, J) -схема S , порождающая матрицу W , будет также вычислять систему функций $w_{r_2}(u_1, \dots, u_{r_2})$ при условии, что i -я функция этой системы $w_{r_2,i}$ соответствует i -й строке W , а к каждому входу схемы S вместо вектора J_j подключена j -я переменная системы функций w_{r_2} . Аналогичное утверждение справедливо и для (B, DJ) -схемы.

Лемма 11. Если множество векторов G_2 может быть порождено (B, G_1) -схемой, то

$$V_{B,G_1}(W) \leq V_{B,G_1}(G_2) + V_{B,G_2}(W).$$

Доказательство. Пусть S — схема, порождающая матрицу W , исходя из множества векторов $G_2 = \{G_{21}, \dots, G_{2t}\}$, S' — схема, порождающая множество векторов G_2 , исходя из множества векторов G_1 . Подключим j -й выход схемы S' к j -му входу схемы S . В результате получим схему, порождающую матрицу W , исходя из множества векторов G_1 , сложность которой удовлетворяет утверждению леммы. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть W — матрица размера $n \times t$, w — функция, соответствующая матрице W . Тогда

$$L_{B_{k,1}}(w) \geq \frac{1}{n}(V_{B_{k,1}}(W) - (t-1)(n-1)/(k-1) - 2n).$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 11 и теоремой 1. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} L_{B_{k,1}}(w) &\geq \max_i L_{B_{k,1}}(w_{r_2,i}) \geq \frac{1}{n} L_{B_{k,1}}(w_{r_2}) = \frac{1}{n} V_{B_{k,1}J}(W) \\ &\geq \frac{1}{n}(V_{B_{k,1}}(W) - (t-1)(n-1)/(k-1) - 2n). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема. Для ее доказательства вместо теоремы 1 необходимо воспользоваться теоремой 2.

Теорема 5. Пусть W — матрица размера $n \times t$, w — функция, соответствующая матрице W . Тогда

$$L_{B_{k,2}}(w) \geq \frac{1}{n}(V_{B_{k,2}}(W) - (2t-2) \log_k n - 2).$$

Далее докажем теорему 6, связывающую монотонную сложность порождения матриц и сложность реализации функций схемами в полном базисе. Пусть

$$I_j(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x = j, \\ 0, & \text{если } x \neq j, \end{cases}$$

$$N(x) = k-1-x.$$

Известно, что система функций

$$B = \{I_1(x), \dots, I_{k-1}(x), 0, \dots, k-1, \max(x, y), \min(x, y)\}$$

является полной в P_k . Введем функцию $\bar{I}_j(x)$, полагая

$$\bar{I}_j(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x \geq j, \\ 0, & \text{если } x < j. \end{cases}$$

Так как

$$I_j(x) = \min(\bar{I}_j(x), \bar{I}_{N(j)}(N(x))),$$

система функций

$$B_2 = \{\bar{I}_1(x), \dots, \bar{I}_{k-1}(x), 0, \dots, k-1, N(x) = k-1-x, \max(x, y), \min(x, y)\}$$

является полной в P_k .

Схему S в базисе B_2 назовем приведенной, если в этой схеме символами N отмечены только вершины, смежные входам S . Приведенной сложностью функции f назовем величину $L'_2(f)$, равную сложности минимальной приведенной схемы S , вычисляющей функцию f . Справедлива следующая лемма.

Лемма 12. *Справедливо неравенство*

$$L'_2(f) \leq 2L_{B_2}(f) + n,$$

где n — число существенных переменных функции f .

Доказательство. Неравенство леммы основано на следующем предложении. Пусть S — схема в базисе B_2 и пусть $F(S) = \{f_i\}$ — система всех функций, вычисляемых элементами S . Тогда сложность приведенной схемы S' , вычисляющей систему функций $F'(S) = \{f_i, Nf_i\}$, не превосходит величины $2|S| + n$, где n — число существенных переменных системы $F(S)$. Это предложение докажем индукцией по сложности S . При $|S| = 0$ предложение очевидно. Предположим, что оно верно и при $|S| = m$. Покажем, что предложение справедливо и при $S = m + 1$. Пусть s — элемент схемы S с выходной степенью, равной нулю, и пусть S_1 — схема S без элемента s . По предположению индукции

$$|S'_1| \leq 2m + n. \quad (2)$$

Существование приведенной схемы, вычисляющей систему функций $F'(S)$ с требуемой сложностью, следует из (2) и из легко проверяемых тождеств

$$\begin{aligned} N(\max(x, y)) &= \min(N(x), N(y)), \\ N(\min(x, y)) &= \max(N(x), N(y)), \\ N(\bar{I}_j(x)) &= \bar{I}_{N(j)-1}(N(x)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Воспользовавшись леммой 12 и теоремой 3, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 6. Пусть W — матрица размера $n \times m$, w — функция, соответствующая матрице W . Тогда

$$L_{B_2}(w) \geq \frac{1}{2n}(V_{B_{k,3}}(W) - (2m + O(m^{1/2}))).$$

Теоремы 4–6 показывают, что доказательство сравнительно невысоких линейных нижних оценок сложности порождения узких матриц k -значной логики столь же трудно, как и доказательство нелинейных и даже экспоненциальных нижних оценок сложности вычисления функций k -значной логики схемами в полных базисах. Причем это справедливо и в случае порождения матриц монотонными схемами. Рассмотрим этот случай подробно. Пусть W — матрица размера $n \times m$, где $n = \lceil m/(g(m) \log_k m) \rceil$, $g(m)$ — некоторая неограниченно возрастающая функция, w — функция, соответствующая матрице W . Предположим, что справедливо неравенство

$$V_{B_{k,3}}(W) \geq (2 + \varepsilon)m.$$

В этом случае из теоремы 6 следует, что

$$L_{B_2}(w) \geq \frac{\varepsilon}{2}g(m) \log_k m(1 + O(m^{-1/2})).$$

Так как функция w зависит от $r = r_1 + r_2 \leq 2 \lceil \log_k m \rceil$ аргументов, для этой функции при m , большем некоторого m_0 ,

$$L_{B_2}(w) \geq crh(r),$$

где c — постоянная, а h — неограниченно возрастающая функция. Легко видеть, что правая часть последнего неравенств нелинейна относительно r .

Если $n = \lceil m^{1-\delta} \rceil$ для некоторой постоянной δ , $0 < \delta < 1$, то нетрудно убедиться в том, что

$$L_{B_2}(w) \geq \frac{\varepsilon}{2}m^\delta(1 + O(m^{-1/2})).$$

Как и в предыдущем случае, функция w зависит от $r \leq 2 \lceil \log_k m \rceil$ аргументов, поэтому при m , большем m_0 , справедливо неравенство

$$L_{B_2}(w) \geq c_1 2^{\delta r/2},$$

где c_1 — постоянная. Очевидно, что правая часть неравенства экспоненциальна относительно r .

Автор благодарен О. Б. Лупанову за внимание к работе и Н. А. Карповой за ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Чашкин А. В. О сложности булевых матриц, графов и соответствующих им булевых функций. *Дискретная математика* (1994) 6, №2, 43–73.
2. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 21.03.1996.