Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чеплюкова, Возникновение гигантского дерева
в случайном лесе, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, вы-
пуск 1, 111–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:27:10

УДК 519.2

Возникновение гигантского дерева в случайном лесе

© 1998 г. И. А. Чеплюкова

Рассматриваются случайные леса, состоящие из N деревьев просто генерируемого семейства корневых деревьев с n некорневыми вершинами. Для таких лесов проведены исследования условий возникновения гигантского дерева в случайном лесе и показано, что гигантская компонента появляется только тогда, когда $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00065.

В [1] было введено понятие просто генерируемого семейства $\mathcal{F}$ корневых деревьев. В соответствии с этим понятием существует степенной ряд

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad (1)$$

где $p_0 > 0$, $p_k \geq 0$ при $k \geq 1$, коэффициенты которого определяют вес $\omega(T)$ плоского дерева T с висячим корнем по формуле

$$\omega(T) = \prod_{k \geq 0} p_k^{m_k},$$

в которой m_k означает число вершин дерева кратности k (кратность вершины есть число дуг, выходящих из нее при ориентации дуг от корня). Пусть $\mathcal{F}_n$ — множество деревьев $T \in \mathcal{F}$, содержащих n вершин. Согласно [1] семейство $\mathcal{F}_n$ есть просто генерируемое, если производящая функция

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n,$$

где

$$y_n = \sum_{T \in \mathcal{F}_n} \omega(T),$$

удовлетворяет уравнению

$$\varphi(z) = zF(\varphi(z)). \quad (2)$$

Простейшими примерами просто генерируемых деревьев являются плоские деревья с висячими корнями, деревья с помеченными вершинами, бинарные деревья.

Если $F(1) = 1$, то семейство просто генерируемых деревьев можно интерпретировать [2, 3] как совокупность реализаций ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с производящей функцией (1) распределения числа прямых потомков каждой частицы. При этом вес $\omega(T)$ равен вероятности реализации T , а y_n есть вероятность того, что в ветвящемся процессе существовало n частиц за все время его эволюции. Известно (см., например, [4]), что для таких процессов соотношение (2) выполняется.

В настоящей статье рассматриваются леса, состоящие из N деревьев из $\mathcal{F}$. Множество таких лесов в соответствии со сказанным выше естественно рассматривать как ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона G , начинающийся с N частиц. Обозначим $\mathcal{F}_{N,n}$ совокупность рассматриваемых лесов с n некорневыми вершинами. Ветвящийся процесс G естественным образом индуцирует распределение вероятностей на $\mathcal{F}_{N,n}$, при этом, если $G_{N,n}$ — реализация процесса G с $N + n$ частицами, то

$$\mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid \nu = N + n\} = \frac{p_0^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}}{\mathbf{P}\{\nu = N + n\}}, \quad (3)$$

где ν — общее число частиц, существовавших в ветвящемся процессе,

$$m_0 + m_1 + \dots + m_n = N + n, \quad m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n$$

и p_i , в соответствии с (1), есть вероятность рождения i прямых потомков у одной частицы, $i = 0, 1, 2, \dots$

В [5] получены предельные распределения важнейших характеристик случайных лесов. Заметим, что рассматриваемый здесь класс лесов $\mathcal{F}_{N,n}$ шире рассматриваемого в [5], поскольку там предполагается, что

$$\mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid \nu = N + n\} = \frac{|\Delta(G_{N,n})|}{|\mathcal{F}_{N,n}|},$$

где $\Delta(G_{N,n})$ означает класс лесов из $\mathcal{F}_{N,n}$ изоморфных реализации $G_{N,n}$, а $|\Delta(G_{N,n})|$ и $|\mathcal{F}_{N,n}|$ — мощности множеств $\Delta(G_{N,n})$ и $\mathcal{F}_{N,n}$ соответственно.

Пусть $\xi(G_{N,n})$ — некоторая числовая характеристика $G_{N,n}$, а $\xi(G)$ — аналогичная характеристика соответствующего ветвящегося процесса G . Если лес f , принадлежащий $\mathcal{F}_{N,n}$, содержится в множестве $\Delta(G_{N,n})$, то положим

$$\xi = \xi(f) = \xi(G_{N,n}).$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\xi = x\} = \mathbf{P}\{\xi(G) = x \mid \nu = N + n\}.$$

Доказательство. Пусть $\chi(A)$ — индикатор события A , а $\mathbf{P}\{f\}$ — вероятность появления леса f . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi = x\} &= \sum_{G_{N,n}} \sum_{f \in \Delta(G_{N,n})} \mathbf{P}\{f\} \chi(\xi(f) = x) \\ &= \sum_{G_{N,n}} \chi(\xi(G_{N,n}) = x) \sum_{f \in \Delta(G_{N,n})} \mathbf{P}\{f\} \\ &= \sum_{G_{N,n}} \chi(\xi(G_{N,n}) = x) \mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid \nu = N + n\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3) следует утверждение леммы 1.

Эта лемма показывает, что изучение числовых характеристик случайного леса можно свести к исследованию аналогичных характеристик ветвящихся процессов при условии $\nu = N + n$. Лемма 1 является обобщением леммы 1.4.1 книги [5], поэтому все результаты [5], опирающиеся на эту лемму, оказываются справедливыми и для лесов из рассматриваемого множества $\mathcal{F}_{N,n}$. В [5], в частности, получены предельные распределения максимального объема дерева в случайном лесе при $N, n \rightarrow \infty$. По аналогии с эволюцией случайного графа говорят, что при некотором соотношении между параметрами $N, n \rightarrow \infty$, в случайном лесе возникает гигантское дерево, если число вершин в этом дереве имеет порядок n , в то время как каждое из остальных деревьев содержит меньшее по порядку число вершин. В [5] доказано, что число вершин в максимальном дереве имеет порядок n в следующих двух случаях.

Пусть $\nu_1(\mathcal{F}), \dots, \nu_N(\mathcal{F})$ — случайные величины, равные объемам деревьев из $\mathcal{F}_{N,n}$, имеющих корневые вершины с номерами $1, \dots, N$ соответственно, а $\nu_{(1)}(\mathcal{F}), \dots, \nu_{(N)}(\mathcal{F})$ — вариационный ряд объемов деревьев в лесе, полученный расположением $\nu_1(\mathcal{F}), \dots, \nu_N(\mathcal{F})$ в неубывающем порядке. Введем вспомогательную случайную величину η , имеющую целочисленное распределение

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

с максимальным шагом d и производящей функцией (1), где множество значений η , имеющих ненулевую вероятность, содержит нуль и не совпадает с множеством $\{0, 1\}$. Пусть

$$\mathbf{M}\eta = 1, \quad \mathbf{D}\eta = B, \quad F'''(1) < \infty,$$

а число прямых потомков одной частицы ветвящегося процесса G имеет распределение

$$p_k(\lambda) = \lambda^k p_k / F(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $0 < \lambda \leq 1$.

В [5] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что n пробегает значения, кратные d , и $Bn/N^2 \rightarrow \gamma$, где γ — некоторая положительная постоянная.

Тогда для любого фиксированного положительного z

$$\mathbf{P}\{\nu_{(N)}(\mathcal{F})/n \leq z\} \rightarrow \exp\left\{\frac{1}{2\gamma}\right\} \gamma^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(\gamma z, \gamma),$$

где

$$I_k(u, v) = \int_{X_k(u, v)} \frac{\exp\{-1/(2(v - x_1 - \dots - x_k))\} dx_1 \dots dx_k}{(2\pi)^{k/2} (x_1 \dots x_k (v - x_1 - \dots - x_k))^{3/2}},$$

$$I_0(u, v) = 1/\sqrt{2v^3 \exp\{1/v\}},$$

$$X_k(u, v) = \{x_i \geq u, i = 1, \dots, k, x_1 + \dots + x_k \leq v\},$$

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что n пробегает значения, кратные d , и $n/N^2 \rightarrow \infty$. Тогда для любого фиксированного положительного z

$$\mathbf{P}\{(n - \nu_{(N)})B/N^2 \leq z\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y^{-3/2} \exp\{-1/(2y)\} dy.$$

Из этих теорем не видно, является ли в рассмотренных случаях максимальное дерево гигантским, поскольку не выяснено поведение следующего по величине члена вариационного ряда. В настоящей статье изучается поведение членов вариационного ряда $\nu_{(N-j)}(\mathcal{F})$ при любом фиксированном $j = 0, 1, 2, \dots$. Оказывается, что гигантское дерево возникает лишь в случае, когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow \infty$.

Возникновение гигантского дерева в эволюции случайного леса из некорневых деревьев изучалось в [6, 7].

Ветвящийся процесс G распадается на N процессов $G^{(1)}, \dots, G^{(N)}$, каждый из которых начинается с одной частицы. Введем случайные величины $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(N)}$, равные числу частиц, существовавших соответственно в процессах $G^{(1)}, \dots, G^{(N)}$ до их вырождения.

В данной статье получены следующие результаты.

Теорема 3. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что n пробегает значения, кратные d , $n/N \rightarrow 0$, а параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N + n}. \quad (4)$$

Пусть

$$N\mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + 1\} \rightarrow \infty, \quad N\mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + s + 1\} \rightarrow \gamma,$$

где γ — неотрицательная постоянная, а натуральные r и s кратны d и удовлетворяют одному из условий:

$$(1) \quad r \rightarrow \infty, \quad s = d;$$

$$(2) \quad r \text{ фиксировано, } r \geq m + 1,$$

$$\mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + s + 1\} > 0, \quad \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + i + 1\} = 0,$$

где m — наименьшее целое положительное число такое, что $p_m > 0$ и $0 < i < s$.

Тогда для любого фиксированного $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\nu_{(N-j)}(\mathcal{F}) = r + 1\} = e^{-\gamma} \sum_{i=0}^j \frac{\gamma^i}{i!},$$

$$\mathbf{P}\{\nu_{(N-j)}(\mathcal{F}) = r + s + 1\} = 1 - e^{-\gamma} \sum_{i=0}^j \frac{\gamma^i}{i!}.$$

Теорема 4. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что n пробегает значения, кратные d , и $n/N \rightarrow b$, где b — положительная постоянная. Пусть параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (4),

$$\alpha = (\lambda_b / F(\lambda_b))^d,$$

где λ_b — корень уравнения

$$\lambda F'(\lambda)/F(\lambda) = b/(b+1).$$

Если $r = r(N, n)$ пробегает значения, кратные d , такие, что

$$\frac{N}{F(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{F(\lambda)} \right)^r \frac{d}{r^{3/2} \sqrt{2\pi B}} \rightarrow \gamma,$$

где γ — положительная постоянная, то для любых фиксированных $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\nu_{(N-j)}(\mathcal{F}) \leq r + kd + 1\} \rightarrow \exp \left\{ -\frac{\gamma \alpha^{k+1}}{1-\alpha} \right\} \sum_{i=0}^j \frac{1}{i!} \left(\frac{\gamma \alpha^{k+1}}{1-\alpha} \right)^i.$$

Теорема 5. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что n пробегает значения, кратные d , и $n/N \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$. Пусть параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (4). Тогда для любого фиксированного z

$$\mathbf{P}\{\beta \nu_{(N-j)}(\mathcal{F}) - u \leq z\} \rightarrow e^{-e^{-z}} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-iz}}{i!},$$

где

$$\beta = \beta(\lambda) = -\ln(\lambda/F(\lambda)),$$

а $u = u(\lambda)$ выбрано так, что

$$N\beta^{1/2}u^{-3/2}e^{-u} = \sqrt{2\pi B}.$$

Теорема 6. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что n пробегает значения, кратные d , и $Bn/N^2 \rightarrow \gamma$, где γ — положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного положительного z и любого фиксированного $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\nu_{(N-j)}(\mathcal{F})/n \leq z\} \rightarrow \exp \left\{ \frac{1}{2\gamma} \right\} \gamma^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^j \frac{1}{i!} I_{k+i}(\gamma z, \gamma),$$

где

$$\begin{aligned} I_k(u, v) &= \int_{X_k(u, v)} \frac{\exp \{-1/(2(v - x_1 - \dots - x_k))\}}{(2\pi)^{k/2} (x_1 \dots x_k (v - x_1 - \dots - x_k))^{3/2}} dx_1 \dots dx_k, \\ I_0(u, v) &= 1/\sqrt{2v^3 \exp\{1/v\}}, \\ X_k(u, v) &= \{x_i \geq u, i = 1, \dots, k, x_1 + \dots + x_k \leq v\}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что n пробегает значения, кратные d , и $n/N^2 \rightarrow \infty$. Тогда для любого фиксированного положительного z

$$\mathbf{P}\{\nu_{(N-1)}(\mathcal{F}) \leq zN^2\} \rightarrow e^{-E(0, z)},$$

где

$$E(0, z) = \sqrt{2/(z\pi B)}. \quad (6)$$

Из теорем 1–7 видно, что гигантское дерево возникает в случайном лесе только в случае, когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow \infty$.

Для доказательства теорем 2–7 докажем несколько лемм.

Из леммы 1 следует, что для всех n , удовлетворяющих условию $\mathbf{P}\{\nu = N+n\} > 0$, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\nu_1(\mathcal{F}) = k_1, \dots, \nu_N(\mathcal{F}) = k_N\} = \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = k_1, \dots, \nu^{(N)} = k_N \mid \nu = N+n\}. \quad (7)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\nu_r^{(1)}, \dots, \nu_r^{(N)}$ и $\tilde{\nu}_r^{(1)}, \dots, \tilde{\nu}_r^{(N)}$ для которых

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu_r^{(i)} = k\} &= \mathbf{P}\{\nu^{(i)} = k \mid \nu^{(i)} \leq r+1\}, \\ \mathbf{P}\{\tilde{\nu}_r^{(i)} = k\} &= \mathbf{P}\{\nu^{(i)} = k \mid \nu^{(i)} > r+1\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} \nu_{r,i} &= \nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-i)} + \tilde{\nu}_r^{(N-i+1)} + \dots + \tilde{\nu}_r^{(N)}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ P_r &= \mathbf{P}\{\nu^{(1)} > r+1\}, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\nu^{(1)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$P_r = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r+kd+1\}.$$

Из (7) и соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu_{(N-j)}(\mathcal{F}) \leq r+1\} &= \sum_{i=0}^j \binom{N}{i} \mathbf{P}\{\nu_{(1)}(\mathcal{F}) \leq r+1, \dots, \nu_{(N-i)}(\mathcal{F}) \leq r+1, \\ &\quad \nu_{(N-i+1)}(\mathcal{F}) > r+1, \dots, \nu_{(N)}(\mathcal{F}) > r+1\} \end{aligned}$$

нетрудно получить следующий результат, являющийся обобщением леммы 1.2.2 из [5].

Лемма 2. При n таких, что $\mathbf{P}\{\nu = N+n\} > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu_{(N-j)}(\mathcal{F}) \leq r+1\} \\ = \sum_{i=0}^j (1-P_r)^{N-i} P_r^i \frac{N(N-1)\dots(N-i+1)}{i!} \frac{\mathbf{P}\{\nu_{r,i} = n+N\}}{\mathbf{P}\{\nu = n+N\}}. \end{aligned}$$

Лемма 2 показывает, что для получения предельных распределений случайных величин $\nu_{(N-j)}(\mathcal{F})$ достаточно изучить асимптотику $\mathbf{P}\{\nu_{r,i} = N+n\}$ и поведение NP_r в случае $n/N^2 \rightarrow \infty$, поскольку асимптотическое поведение бинома $(1-P_r)^{N-i}$ в остальных случаях и вероятностей P_r и $\mathbf{P}\{\nu = n+N\}$ изучено в [5]. Ниже, в леммах 3–8, описывается предельное поведение $\mathbf{P}\{\nu_{r,i} = N+n\}$ и NP_r , а затем с помощью этих результатов доказываются утверждения теорем 3–7.

Пусть $\varphi_{r,t}(u)$ означает характеристическую функцию случайной величины

$$\frac{\nu_{r,t} - N - n}{\sigma\sqrt{N}}, \quad t = 1, \dots, j.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $n, N \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$, параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (4), а $r = r(N, n)$ пробегает значения, кратные d , такие, что $NP_r \rightarrow \gamma$, где γ — положительная постоянная.

Тогда для любого фиксированного u

$$\varphi_{r,t}(u) \rightarrow \exp\{-u^2/2\}.$$

Доказательство. Лемма 3 доказывается аналогично лемме 2.4.1 из [5]. Обозначим через $\varphi_{\tilde{\nu}_r^{(1)}}(u)$, $\varphi_{\nu_r^{(1)}}(u)$, $\varphi(u)$ характеристические функции случайных величин $\tilde{\nu}_r^{(1)}$, $\nu_r^{(1)}$, $\nu^{(1)}$ соответственно. Нетрудно получить, что

$$\varphi_{\tilde{\nu}_r^{(1)}}(u) = P_r^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + kd + 1\} \exp\{iu(r + kd + 1)\},$$

$$\varphi_{\nu_r^{(1)}}(u) = (1 - P_r)^{-1} (\varphi(u) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + kd + 1\} \exp\{iu(r + kd + 1)\}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{r,t}(u) &= \frac{1}{(1 - P_r)^{N-t}} \left(\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{N}}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + kd + 1\} \exp\left\{iu \frac{r + kd + 1}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \right)^{N-t} \\ &\quad \times P_r^{-t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + kd + 1\} \exp\{iu(r + kd + 1)/(\sigma\sqrt{N})\} \right)^t \\ &\quad \times \exp\{-iu(N + n)/(\sigma\sqrt{N})\}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2.4.1 из [5] справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \varphi_{r,t}(u) &= (1 + o(1)) e^{-u^2/2} P_r^{-t} \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + kd + 1\} \exp\{iu(r + kd + 1)/(\sigma\sqrt{N})\} \right)^t. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + kd + 1\} \exp\{iu(r + kd + 1)/(\sigma\sqrt{N})\} = P_r + Q(u), \quad (9)$$

где

$$|Q(u)| \leq |u|(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (r + kd + 1) \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + kd + 1\}. \quad (10)$$

В [5] показано, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (r + kd + 1) \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + kd + 1\} = o(N^{-1}) \quad (11)$$

Из (8)–(11) следует утверждение леммы 3.

Лемма 3 утверждает, что распределение случайной величины $\nu_{r,t}$ слабо сходится к нормальному закону с параметрами $(N+n, \sigma\sqrt{N})$. Докажем локальное сближение этих распределений.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3 и, кроме того, пусть $N\lambda^{m+l} \rightarrow \infty$, где l — натуральное число, не кратное m , удовлетворяющее условию $p_{m+l} > 0$, если такого l нет, то $l = 0$.

Тогда для любого фиксированного $t = 0, 1, \dots, j$ и для целых неотрицательных h , кратных d , равномерно относительно $(h-n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\nu_{r,t} = N + h\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(h-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}.$$

Доказательство. Используя формулу обращения, представим $\mathbf{P}\{\nu_{r,t} = N + h\}$ в виде интеграла

$$\mathbf{P}\{\nu_{r,t} = N + h\} = \frac{d}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}/d}^{\pi\sigma\sqrt{N}/d} \exp\{-iuz\} \varphi_{r,t}(u) du,$$

где $z = (h-n)/(\sigma\sqrt{N})$. Рассмотрим разность

$$R = 2\pi \left(\frac{\sigma\sqrt{N}}{d} \mathbf{P}\{\nu_{r,t} = N + h\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \right).$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz - x^2/2} dx,$$

разность R можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-iuz} (\varphi_{r,t}(u) - e^{-u^2/2}) du, \\ I_2 &= \int_{A < |u| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-iuz} \varphi_{r,t}(u) du, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |u| \leq d^{-1}\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-iuz} \varphi_{r,t}(u) du, \\ I_4 &= - \int_{A < |u|} e^{-iuz - u^2/2} du, \end{aligned}$$

A и ε — положительные постоянные. В силу леммы 3 интеграл $I_1 \rightarrow 0$. Оценки интегралов I_2, I_3, I_4 аналогичны соответствующим оценкам, приведенным при доказательстве леммы 2.4.2 в книге [5], где показано, что выбором достаточно больших N, n, A и достаточно малого ε интегралы I_2, I_3, I_4 можно сделать сколь угодно малыми, что и доказывает лемму 4.

Лемма 5. Пусть $n, N \rightarrow \infty$, $Bn/N^2 \rightarrow \gamma$, где γ — положительная постоянная. Пусть $v = (N + h)B/N^2$, h — натуральное число, кратное d . Если r кратно d и $r = zn + O(1)$, где z — фиксированное положительное число, то для любого фиксированного натурального t равномерно относительно v в любом конечном интервале вида $0 < v_0 \leq v \leq v_1$

$$\frac{N^2}{B} \mathbf{P}\{B\nu_{r,t}/N^2 = v\} \rightarrow \frac{de^{E(0,z)}}{\sqrt{2\pi}E^t(0,z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_{k+t}(\gamma z, v),$$

где $E(0, z)$ и $I_k(\gamma z, v)$ определены соотношениями (6) и (5) соответственно.

Доказательство. Обозначим через $\psi_{r,t}(u)$ характеристическую функцию случайной величины $B\nu_{r,t}/N^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{r,t}(u) &= \frac{1}{(1-P_r)^{N-t}} (\varphi(Bu/N^2) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r+kd+1\} \exp\{iuB(r+kd+1)/N^2\})^{N-t} \\ &\quad \times P_r^{-t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r+kd+1\} \exp\{iuB(r+kd+1)/N^2\} \right)^t. \end{aligned}$$

В [5] показано, что

$$\varphi^N(uB/N^2) \rightarrow \exp\{-\sqrt{-2iu}\},$$

а из леммы 1.3.12 из [5] следует, что если $N, n \rightarrow \infty$ так, что $Bu/N^2 \rightarrow \gamma$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r+kd+1\} \exp\{iuB(r+kd+1)/N^2\} &= \frac{E(u, v)}{N} (1 + o(1)), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r+kd+1\} &= \frac{E(0, z)}{N} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где

$$E(u, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma z}^{\infty} y^{-3/2} e^{iuy} dy.$$

Тогда

$$\psi_{r,t}(u) = \exp\{-\sqrt{-2iu} - E(u, z) + E(0, z)\} \frac{E^t(u, z)}{E^t(0, z)} (1 + o(1)). \quad (12)$$

Поскольку $E(u, z)$ является преобразованием Фурье функции

$$f(t) = \begin{cases} (\sqrt{2\pi t^3})^{-1}, & t \geq \gamma z, \\ 0, & t < \gamma z, \end{cases}$$

и $\exp\{-\sqrt{-2iu}\}$ — характеристическая функция устойчивого закона с показателем $\alpha = 1/2$, имеющего плотность

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-1/(2x)}, \quad x > 0,$$

нетрудно показать, что $\psi_{r,t}(u)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью

$$g(v) = \frac{e^{E(0,z)}}{\sqrt{2\pi}E^t(0,z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(\gamma z, v).$$

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\nu_{r,t} = N + h\} = \frac{dB}{2\pi N^2} \int_{-N^2\pi/(dB)}^{N^2\pi/(dB)} e^{-itv} \psi_{r,t}(t) dt.$$

Поэтому

$$\frac{2\pi N^2}{dB} \mathbf{P}\{B\nu_{r,t}/N^2 = v\} - 2\pi g(v) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-iuv} \left(\psi_{r,t}(u) - \exp\{-\sqrt{-2iu} - E(u, z) + E(0, z)\} \frac{E^t(u, z)}{E^t(0, z)} \right) du,$$

$$I_2 = \int_{A < |u| \leq \varepsilon \sigma \sqrt{N}} e^{-iuv} \psi_{r,t}(u) du,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon \sigma \sqrt{N} < |u| \leq d^{-1} \pi \sigma \sqrt{N}} e^{-iuv} \psi_{r,t}(u) du,$$

$$I_4 = - \int_{A < |u|} \exp\{-iuv - \sqrt{-2iu} - E(u, z) + E(0, z)\} \frac{E^t(u, z)}{E^t(0, z)} du,$$

положительные постоянные A и ε , как показано при доказательстве леммы 2.5.1 в [5], можно выбрать так, что интегралы I_2, I_3, I_4 при достаточно больших N, n становятся сколь угодно малыми. Отсюда и из (12) следует утверждение леммы 5.

Аналогично лемме 2.2.6 из книги [5] доказывается следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow \infty$, r кратно d и $r = zN^2$, где z — положительная постоянная, $\lambda = 1$. Тогда

$$NP_r \rightarrow E(0, z).$$

Лемма 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow \infty$, r кратно d и $r = zN^2$, где z — фиксированное положительное число. Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu_{r,1} = N + n\} = \frac{Nd\sqrt{z}}{2n^{3/2}} (1 + o(1)).$$

Доказательство. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\nu_{r,1} = N + n\} \\ &= \sum_{0 \leq k < n - zN^2} \mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-1)} = N - 1 + k\} \mathbf{P}\{\tilde{\nu}_r^{(N)} = 1 + n - k\}. \end{aligned}$$

Положим

$$\gamma = (N^2/n)^{1/7},$$

разобьем область суммирования на три части:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{k: 0 \leq k \leq \gamma n\}, \\ M_2 &= \{k: \gamma n < k \leq n - \gamma n\}, \\ M_3 &= \{k: n - \gamma n < k < n - zN^2\} \end{aligned}$$

и обозначим соответствующие суммы через S_1, S_2, S_3 . Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu_{r,1} = N + n\} = S_1 + S_2 + S_3. \quad (13)$$

Используя лемму 1.3.12 из [5], легко показать, что

$$S_1 = \frac{d(1 + o(1))}{P_r n^{3/2} \sqrt{2\pi B}} \sum_{0 \leq k \leq \gamma n} \mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-1)} = N + k - 1\}. \quad (14)$$

Обозначим $\varphi_r(u)$ характеристическую функцию суммы

$$\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-1)}.$$

Тогда аналогично нахождению характеристической функции $\psi_r(u)$ в доказательстве леммы 5, нетрудно показать, что $\varphi_r(u)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{E(0,z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(z, v).$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$S_1 = \frac{Nd(1 + o(1))}{E(0, z)n^{3/2}\sqrt{2\pi B}}. \quad (15)$$

Используя леммы 1.3.12 и 2.3.4 из [5], и лемму 6, легко показать, что

$$S_2 \leq C_1 \frac{N^2}{\gamma^3 n^2} = o(N/n^{3/2}), \quad (16)$$

здесь и далее $C_1, C_2, \dots$ означают некоторые положительные постоянные. По лемме 1.3.12 из [5]

$$S_3 \leq \frac{C_2}{N^2} \sum_{n(1-\gamma) < k < n - zN^2} \mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-1)} = N + k - 1\}. \quad (17)$$

Легко видеть, что если $n/N^3 \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-1)} = N + k - 1\} = 0.$$

Пусть $n/N^3 \leq C_3 < \infty$. Рассмотрим вероятность

$$Q_{N-1} = \mathbf{P}\{\nu_{n-zN^2}^{(1)} + \dots + \nu_{n-zN^2}^{(N-1)} = N + k - 1, \nu_{n-zN^2}^{(i)} \leq zN^2, i = 1, \dots, N-1\}.$$

Нетрудно показать, что

$$Q_{N-1} = \left(\frac{1 - P_r}{1 - P_{n-zN^2}} \right)^{N-1} \mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-1)} = N + k - 1\}. \quad (18)$$

Согласно лемме 2.2.7 из [5]

$$(1 - P_{n-zN^2})^{N-1} = 1 + o(1),$$

а из леммы 6 следует, что

$$(1 - P_r)^{N-1} \rightarrow e^{-E(0,z)}.$$

Поэтому из (18) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-1)} = N + k - 1\} = Q_{N-1} e^{E(0,z)} (1 + o(1)). \quad (19)$$

Оценим вероятность

$$Q_{N-1} = \mathbf{P}\{\nu_{n-zN^2}^{(1)} + \dots + \nu_{n-zN^2}^{(N-1)} = N + k - 1, \nu_{n-zN^2}^{(i)} \leq zN^2, i = 1, \dots, N-1\}.$$

Положим

$$R(\omega) = \sum_{k \leq zN^2/d} \exp\{\omega(kd + 1)\} \mathbf{P}\{\nu_{n-zN^2}^{(1)} = kd + 1\}. \quad (20)$$

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\nu_i(z)$, для которых

$$\mathbf{P}\{\nu_1(z) = sd + 1\} = \exp\{(sd + 1)/(zN^2)\} \frac{\mathbf{P}\{\nu_{n-zN^2}^{(1)} = sd + 1\}}{R(1/(zN^2))}, \quad (21)$$

при этом $s \leq zN^2/d$. Положим

$$\zeta_{N-1}(z) = \nu_1(z) + \dots + \nu_{N-1}(z).$$

Нетрудно показать, что

$$Q_{N-1} = \frac{P\{\zeta_{N-1}(z) = N + k - 1\} R(1/(zN^2))}{\exp\{(N + k - 1)/(zN^2)\}}. \quad (22)$$

По формуле обращения

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(z) = N + k - 1\} \\ &= \frac{dB}{2\pi N^2} \int_{-\pi N^2/(dB)}^{\pi N^2/(dB)} \exp\left\{-\frac{iBy}{N^2}(N + k - 1)\right\} \varphi_{\nu_1(z)}^{N-1}(By/N^2) dy, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\varphi_{\nu_1(z)}(u)$ означает характеристическую функцию случайной величины $\nu_1(z)$. Рассмотрим $|\varphi_{\nu_1(z)}(u)|$. Нетрудно показать, что

$$|\varphi_{\nu_1(z)}(u)|^{N-1} = |R(iu + 1/(zN^2))/R(1/(zN^2))|^{N-1}. \quad (24)$$

Если $k \leq zN^2/d$, то справедливо неравенство

$$\exp\{(kd+1)/(zN^2)\} \leq 1 + 2(kd+1)/(zN^2).$$

Отсюда и из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{2}{zN^2} \sum_{k \leq zN^2/d} (kd+1) \mathbf{P}\{\nu_{n-zN^2}^{(1)} = kd+1\} &\leq \frac{C_4}{zN^2} \sqrt{zN^2/d} = o\left(\frac{1}{N}\right) \\ \sum_{k > zN^2/d} \mathbf{P}\{\nu_{n-zN^2}^{(1)} = kd+1\} &\leq \frac{C_5}{\sqrt{zN^2/d}} = o\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

следует, что

$$|R(1/(zN^2) + iu)| \leq |\varphi_{\nu_{n-zN^2}^{(1)}}(u)| + o(1/N), \quad (25)$$

где $\varphi_{\nu_{n-zN^2}^{(1)}}(u)$ — характеристическая функция случайной величины $\nu_{n-zN^2}^{(1)}$. Для любого u справедливо неравенство $|\varphi_{\nu^{(1)}}(u)| \geq C_6$, поэтому

$$|\varphi_{\nu_{n-zN^2}^{(1)}}(u)| \geq C_7.$$

Аналогично можно показать, что

$$R(1/(zN^2)) = 1 + o(1/(zN^2)).$$

Тогда из (24) и (25) следует, что

$$|\varphi_{\nu^{(1)}}(u)|^{N-1} \leq C_8 |\varphi_{\nu_{n-zN^2}^{(1)}}(u)|^{N-1}. \quad (26)$$

Если $|u| \leq \varepsilon N^2$, то

$$|\varphi(u/N^2)| \leq \exp\{-\sqrt{|u|/2BN^2}\},$$

а для $\varepsilon < |u| \leq \pi/d$ справедливо неравенство $|\varphi(u)| \leq e^{-C_9}$. Тогда при $|u| \leq \varepsilon N^2$

$$|\varphi_{\nu_{n-zN^2}^{(1)}}(Bu/N^2)|^{N-1} \leq C_{10} \exp\{-\sqrt{|u|/2}\},$$

а при $\varepsilon N^2 < |u| < \pi N^2/(dB)$

$$|\varphi_{\nu_{n-zN^2}^{(1)}}(Bu/N^2)|^{N-1} \leq C_{11} e^{-C_{12}N}.$$

Отсюда, из (23) и (26) следует, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(z) = N + k - 1\} \leq C_{13}/N^2. \quad (27)$$

Теперь из (22) получаем, что

$$Q_{N-1} \leq \frac{C_{14}}{N^2} \exp\{-(N+k-1)/(zN^2)\}.$$

Отсюда и из (19) следует, что

$$\mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N-1)} = N + k - 1\} \leq \frac{C_{15}}{N^2} \exp\{-(N+k-1)/(zN^2)\},$$

поэтому из (17) получаем, что

$$\begin{aligned} S_3 &\leq \frac{C_{16}}{N^4} \sum_{n(1-\gamma) < k < n-zN^2} \exp\{-(N+k-1)/(zN^2)\} \\ &\leq \frac{C_{17}}{N^4} \exp\{-n/N^2\} n\gamma = o(N/n^{3/2}). \end{aligned}$$

Утверждение леммы 7 следует теперь из (13), (15) и (16).

Лемма 8. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow \infty$, r кратно d и $r = zN^2$, где z — фиксированное положительное число. Тогда

$$n^{3/2} \mathbf{P}\{\nu_{r,0} = N + n\}/N \rightarrow 0.$$

Доказательство. Аналогично тому, как это делалось в доказательстве леммы 7, легко показать, что если $n/N^3 \rightarrow \infty$, то $\mathbf{P}\{\nu_{r,0} = N + n\} = 0$. В случае $n/N^3 \leq C_{18} < \infty$, рассмотрим вероятность

$$Q_N = \mathbf{P}\{\nu_{n-zN^2}^{(1)} + \dots + \nu_{n-zN^2}^{(N)} = N + n, \nu_{n-zN^2}^{(i)} \leq zN^2, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} Q_N &= \left(\frac{1 - P_r}{1 - P_{n-zN^2}} \right)^N \mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N)} = N + n\} \\ &= e^{-E(0,z)} \mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N)} = N + n\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (28)$$

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\nu_i(z)$, $i = 1, \dots, N$, с распределением (21) и пусть

$$\zeta_N(z) = \nu_1(z) + \dots + \nu_N(z).$$

Нетрудно показать, что

$$Q_N = \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N(z) = N + n\} R(1/(zN^2))}{\exp\{(N + n)/(zN^2)\}}, \quad (29)$$

где $R(\omega)$ определено соотношением (20). По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N(z) = N + n\} = \frac{dB}{2\pi N^2} \int_{-\pi N^2/(dB)}^{\pi N^2/(dB)} \exp\left\{-\frac{iBy}{N^2}(N + k - 1)\right\} \varphi_{\nu_1(z)}^N(By/N^2) dy.$$

Аналогично (27) можно получить оценку

$$\mathbf{P}\{\zeta_N(z) = N + n\} \leq C_{19}/N^2.$$

Отсюда, из (28) и (29) следует, что

$$\mathbf{P}\{\nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N)} = N + n\} \leq e^{E(0,z)} \frac{C_{20}}{N^2} \exp\left\{-\frac{N + n}{zN^2}\right\} = o(N/n^{3/2}),$$

что и доказывает лемму 8.

Докажем теперь теоремы 3-7. Если выполнены условия теоремы 3, то согласно лемме 2.2.2 из книги [5]

$$NP_{r-d} \rightarrow \infty, \quad NP_{r+k} \rightarrow \gamma, \quad k = 0, d, 2d, \dots, s-d. \quad (30)$$

Поэтому для любого фиксированного $i = 0, 1, \dots, j$

$$(1 - P_{r-d})^{N-i} \rightarrow 0, (1 - P_{r+k})^{N-i} \rightarrow e^{-\gamma}. \quad (31)$$

В [5] показано, что

$$P_{r+s} = \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r + s + l + 1\}(1 + o(1))$$

и

$$NP\{\nu^{(1)} = r + s + l + 1\} \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$(1 - P_{r+s})^{N-i} \rightarrow 1.$$

Отсюда, из лемм 2, 4, леммы 2.3.2 книги [5] и соотношений (30), (31) следует, что

$$\mathbf{P}\{\nu_{(N-j)}(\mathcal{F}) \leq r - d + 1\} \rightarrow 0$$

и

$$\mathbf{P}\{\nu_{(N-j)}(\mathcal{F}) \leq r + k + 1\} \rightarrow \sum_{i=0}^j \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma},$$

что и доказывает теорему 3.

Если выполнены условия теоремы 4, то согласно лемме 2.2.3 из [5], для фиксированных целых k

$$NP_{r+kd} \rightarrow \gamma \alpha^{k+1} (1 - \alpha)^{-1}.$$

Поэтому для любого фиксированного $i = 0, 1, \dots, j$

$$(1 - P_{r+kd})^{N-i} \rightarrow \exp\{-\gamma \alpha^{k+1} (1 - \alpha)^{-1}\}.$$

Отсюда и из лемм 2, 4 и леммы 2.3.2 из [5] следует теорема 4.

Пусть выполнены условия теоремы 5. Согласно лемме 2.2.5 из [5]

$$NP_r \rightarrow e^{-z}.$$

Поэтому

$$(1 - P_r)^{N-i} \rightarrow e^{-e^{-z}}.$$

Отсюда и из лемм 2, 4 и леммы 2.3.2 из [5] получаем утверждение теоремы 5.

Если выполнены условия теоремы 6, то из леммы 2.2.6 книги [5] следует, что

$$NP_r \rightarrow E(0, z).$$

Поэтому для любого фиксированного $i = 0, 1, \dots, j$

$$(1 - P_r)^{N-i} \rightarrow e^{-E(0, z)}.$$

Отсюда и из лемм 2, 5 и леммы 2.3.2 из [4] получаем теорему 6.

Теорема 7 следует из лемм 6-8 и леммы 2.3.4 из [4].

Список литературы

1. Meir A., Moon J. W. On the altitude of nodes in random trees. *Canad. J. Math.* (1978) **30**, 997–1015.
2. Ватутин В. А. Ветвящиеся процессы с финальными типами частиц и случайные деревья. *Теория вероятностей и ее применения* (1994) **39**, №4, 699–716.
3. Дрмота М. Распределения высоты листьев корневых деревьев. *Дискретная математика* (1994) **6**, №1, 67–82.
4. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
5. Павлов Ю. Л. *Случайные леса*. Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, 1996.
6. Бритиков В. Е. Предельные теоремы для максимального объема дерева в случайном лесу из некорневых деревьев. *Вероятностные задачи дискретной математики*. МИЭМ, Москва, 1987, 84–91.
7. Luczak T., Pittel B. Components of random forests. *Combinatorics, Probability and Computing* (1992) **1**, 35–52.

Статья поступила 22.08.1997.