Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, Р. А. Бердышева, О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 1, 20–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:41:53

УДК 519.10

О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации

© 1998 г. В. А. Емеличев, Р. А. Бердышева

Рассматривается многокритериальная задача лексикографической оптимизации на системе подмножеств конечного множества (траекторная задача) с векторной целевой функцией, состоящей из линейных критериев. Исследуются различные типы устойчивости лексикографического множества при малых изменениях параметров целевых функций. Найдены формулы для вычисления радиусов устойчивости, квазиустойчивости и стабильности в случае чебышевской нормы в пространстве возмущающих параметров.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, проекты Ф 23–70 и Ф 95–70, Международной Соросовской программы образования в области точных наук и фонда DAAD (для первого автора).

1. Введение

Исследованию устойчивости как однокритериальных, так и многокритериальных задач дискретной оптимизации посвящено значительное число работ (см., например, [1–9]). При этом под устойчивостью задачи обычно понимается свойство нерасширяемости либо множества всех оптимальных решений (в однокритериальном случае), либо множества Парето (в многокритериальном случае) при переходе от исходной задачи к возмущенной. В работах [6, 8, 9] исследуются и другие типы устойчивости многокритериальной дискретной задачи: квазиустойчивость, при которой допускается возможность появления новых паретовских оптимумов при сохранении старых, и стабильность, которая понимается как неизменность всего множества Парето при малых возмущениях параметров задачи.

Широко известные лексикографические задачи оптимизации (см., например, [10–13]) возникают в том случае, когда частные критерии упорядочены (перенумерованы) по важности. В данной работе исследуется устойчивость траекторных задач лексикографической оптимизации. Получены аналоги упомянутых выше результатов для лексикографического множества, являющегося подмножеством множества Парето.

2. Траекторные задачи

В схему однокритериальных задач укладываются, как известно, все задачи так называемой комбинаторной оптимизации [1, 2, 5].

Следуя [6–9], введем понятие n -критериальной траекторной задачи.

Пусть E — конечное множество элементов, T — совокупность непустых подмножеств этого множества, называемых траекториями. В дальнейшем будем считать, что число траекторий в T больше единицы. На множестве E зададим векторную весовую функцию

$$a(e) = (a_1(e), a_2(e), \dots, a_n(e)),$$

где

$$a_i(e) \in \mathbf{R}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}, \quad e \in E,$$

а на множестве траекторий $T = \{t\}$ векторный критерий

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)),$$

частными критериями которого являются линейные критерии, т.е. критерии вида MINSUM

$$f_i(t) = \sum_{e \in t} a_i(e) \rightarrow \min_T \quad \forall i \in N_n.$$

Если занумеровать все элементы множества $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, то функцию $a(e)$ можно представить в виде матрицы $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$, где $a_{ij} = a_i(e_j)$. Изменяя матрицу $A \in \mathbf{R}^{nm}$, будем получать различные векторные весовые функции. Поэтому, если предположить, что множества E и T зафиксированы, то матрица A может служить для индексации векторного критерия $f(t)$, который будем обозначать через $f(t, A)$, а частные критерии через $f_i(t, A)$.

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\tau_i(t, t', A) = f_i(t, A) - f_i(t', A).$$

Говоря о многокритериальной задаче, обычно имеют в виду задачу поиска одного, нескольких (определенных) или всех элементов паретовского множества.

В данной работе будет исследоваться n -критериальная траекторная задача поиска лексикографического множества, которое является подмножеством паретовского множества и определяется следующим образом (см. [10–13]).

Пусть $S_n = \{s\}$ — множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. Траекторию $t \in T$ назовем лексикографически оптимальной траекторией (ЛОТ) или лексикографическим оптимумом, если существует такая перестановка $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_n$, что для любой траектории $t' \in T$ выполняется одно из двух условий:

- (1) $\tau_i(t, t', A) = 0 \quad \forall i \in N_n$;
- (2) $\exists k \in N_n \quad \forall i \in N_{k-1} \quad (t_{s_k}(t, t', A) < 0 \ \& \ \tau_{s_i}(t, t', A) = 0)$.

В случае, когда $k = 1$, последние равенства отсутствуют.

Легко видеть, что всякая ЛОТ является паретовским оптимумом.

Множество всех ЛОТ, определенных для всех $n!$ перестановок, будем называть лексикографическим множеством и обозначать через $T_{\text{lex}}(A)$, а задачу поиска этого множества через $Z^n(A)$.

Ясно, что обычная траекторная задача дискретной оптимизации (см., например, [2, 5]) является частным случаем задачи $Z^n(A)$ (при $n = 1$).

Следующие свойства ЛОТ очевидны.

Свойство 1. Траектория t принадлежит $T_{\text{lex}}(A)$, если существует такой индекс $i \in N_n$, что

$$\tau_i(t, t', A) < 0 \quad \forall t' \in T, \quad t' \neq t.$$

Свойство 2. Траектория t не принадлежит $T_{\text{lex}}(A)$, если для каждого индекса $i \in N_n$ существует такая траектория $t' \neq t$, что $\tau_i(t, t', A) > 0$.

3. Радиус устойчивости

В пространстве $\mathbf{R}^{nm}$ матриц $B = \{b_{ij}\}_{n \times m}$ зададим Чебышевскую норму

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}.$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество возмущающих матриц

$$\mathfrak{R}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm} : \|B\| < \varepsilon\}.$$

Пусть $A, B \in \mathbf{R}^{nm}$. Задачу $Z^n(A + B)$, полученную из исходной задачи $Z^n(A)$ при сложении матриц A и B , будем называть возмущенной, а матрицу B возмущающей.

По аналогии с [7, 8] радиусом устойчивости задачи $Z^n(A)$ назовем число

$$\rho_1^n(A) = \begin{cases} \sup Q_1(A), & \text{если } Q_1(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q_1(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$Q_1(A) = \{\varepsilon > 0 : T_{\text{lex}}(A + B) \subseteq T_{\text{lex}}(A) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\}.$$

Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^n(A)$ определяет предел возмущений элементов матрицы A , при которых не возникает новых лексикографических оптимумов.

Очевидно, что в случае, когда $T = T_{\text{lex}}(A)$, радиус устойчивости $\rho_1^n(A)$ равен бесконечности. Поэтому этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z^n(A)$, для которой $\bar{T}_{\text{lex}}(A) = T \setminus T_{\text{lex}}(A) \neq \emptyset$, будем называть нетривиальной.

Из определения радиуса устойчивости с очевидностью вытекают следующие свойства.

Свойство 3. Пусть $\varphi > 0$. Тогда $\rho_1^n(A) \geq \varphi$, если

$$\bar{T}_{\text{lex}}(A) \subseteq \bar{T}_{\text{lex}}(A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi).$$

Свойство 4. Пусть задача $Z^n(A)$ нетривиальна, $\varphi \geq 0$. Тогда $\rho_1^n(A) \leq \varphi$, если для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существует возмущающая матрица $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ и траектория $t \in \bar{T}_{\text{lex}}(A)$ такие, что $t \in T_{\text{lex}}(A + B)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} E(t, t') &= t \setminus t' \cup t' \setminus t, \\ \Delta(t, t') &= |E(t, t')|. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\Delta(t, t') > 0$, если $t \neq t'$.

Теорема 1. Радиус устойчивости нетривиальной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, выражается формулой

$$\rho_1^n(A) = \min_{t \in \bar{T}_{\text{lex}}(A)} \min_{i \in N_n} \max_{t' \neq t} \frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')}. \quad (1)$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство $\rho_1^n(A) \geq \varphi^n(A)$, где через $\varphi^n(A)$ обозначена правая часть (1). Это неравенство очевидно, если $\varphi^n(A) = 0$.

Пусть $\varphi^n(A) > 0$. Тогда в силу определения числа $\varphi^n(A)$ для любой траектории $t \in \bar{T}_{\text{lex}}(A)$ и любого индекса $i \in N_n$ существует траектория $t' \in T$, $t' \neq t$, такая, что

$$0 < \varphi^n(A) \leq \frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')}.$$

Поэтому для всякой матрицы $B \in \mathfrak{B}(\varphi^n(A))$ в силу неравенства $\|B\| < \varphi^n(A)$

$$\tau_i(t, t', A + B) \geq \tau_i(t, t', A) - \sum_{j \in N_m : e_j \in E(t, t')} |b_{ij}| \geq \tau_i(t, t', A) - \|B\| \Delta(t, t') > 0.$$

Отсюда согласно свойству 2

$$t \in \bar{T}_{\text{lex}}(A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi^n(A)).$$

Следовательно,

$$\bar{T}_{\text{lex}}(A) \subseteq \bar{T}_{\text{lex}}(A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi^n(A)),$$

т.е. на основании свойства 3 получаем неравенство $\rho_1^n(A) \geq \varphi^n(A)$.

Теперь докажем, что $\rho_1^n(A) \leq \varphi^n(A)$. Пусть $\varepsilon > \varphi^n(A)$. Тогда, в силу определения числа $\varphi^n(A)$, найдутся траектория $t \in \bar{T}_{\text{lex}}(A)$ и индекс $k \in N_n$ такие, что

$$\gamma = \max\{\tau_k(t, t', A)/\Delta(t, t') : t' \in T, t' \neq t\} < \varepsilon. \quad (2)$$

Если в качестве возмущающей матрицы $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ возьмем матрицу с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} -b, & \text{если } e_j \in t, i = k, \\ b, & \text{если } e_j \notin t, i = k, \\ 0, & \text{если } j \in N_m, i \neq k, \end{cases}$$

где $\gamma < b < \varepsilon$, то с учетом (2) находим, что

$$\tau_k(t, t', A + B) = \tau_k(t, t', A) - b\Delta(t, t') < \tau_k(t, t', A) - \gamma\Delta(t, t') \leq 0 \quad \forall t' \neq t.$$

Поэтому согласно свойству 1 t — ЛОТ возмущенной задачи $Z^n(A + B)$, т.е. на основании свойства 4 получаем, что $\rho_1^n(A) \leq \varphi^n(A)$.

Собирая все доказанное, убеждаемся в справедливости теоремы 1.

Замечание 1. Формула (1) при $n = 1$ превращается в известную формулу радиуса устойчивости однокритериальной траекторной задачи с линейными критериями [1, 2].

Замечание 2. Формула (2) свидетельствует о том, что бесконечный радиус устойчивости имеет лишь тривиальная задача $Z^n(A)$.

Задачу $Z^n(A)$ назовем устойчивой, если $Q_1(A) \neq \emptyset$, т.е. если существует такое число $\varepsilon > 0$, что выполняются включения

$$T_{\text{lex}}(A + B) \subseteq T_{\text{lex}}(A) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon).$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Нетривиальная задача $Z^n(A)$ поиска лексикографического множества $T_{\text{lex}}(A)$ устойчива тогда и только тогда, когда*

$$\forall i \in N_n \quad \forall t' \in \bar{T}_{\text{lex}}(A) \quad \exists t \neq t' \quad (\tau_i(t, t', A) < 0). \quad (3)$$

Замечание 3. В однокритериальном случае ($n = 1$) аналогом лексикографического множества является множество всех оптимальных траекторий. Поэтому, учитывая следствие 1, легко видеть, что всякая однокритериальная задача $Z^1(A)$ является устойчивой.

4. Радиус квазиустойчивости

Радиусом квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$ назовем число

$$\rho_2^n(A) = \begin{cases} \sup Q_2(A), & \text{если } Q_2(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q_2(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$Q_2(A) = \{\varepsilon > 0: T_{\text{lex}}(A) \subseteq T_{\text{lex}}(A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\}.$$

Иными словами, такой радиус определяет предел возмущений элементов матрицы A , при которых допускается возможность появления новых ЛОТ при сохранении всех старых (ср. с [9]).

Непосредственно из этого определения вытекают следующие свойства, аналогичные свойствам 3 и 4.

Свойство 5. Пусть $\varphi > 0$. Тогда $\rho_2^n(A) \geq \varphi$, если

$$T_{\text{lex}}(A) \subseteq T_{\text{lex}}(A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon).$$

Свойство 6. Пусть $\varphi \geq 0$. Тогда $\rho_2^n(A) \leq \varphi$, если для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существуют траектории $t \in T_{\text{lex}}(A)$ и матрица $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ такие, что $t \in \bar{T}_{\text{lex}}(A + B)$.

Теорема 2. Радиус квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, выражается формулой

$$\rho_2^n(A) = \min_{t \in T_{\text{lex}}(A)} \min_{i \in N_n} \max_{t' \neq t} \frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')}. \quad (4)$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство $\rho_2^n(A) \geq \psi^n(A)$, где через $\psi^n(A)$ обозначена правая часть (4). Это неравенство очевидно, если $\psi^n(A) = 0$.

Пусть $\psi^n(A) > 0$. Тогда $\mathfrak{R}(\psi^n(A)) \neq \emptyset$ и в силу определения числа $\psi^n(A)$ для любой ЛОТ t' задачи $Z^n(A)$ существует индекс $k \in N_n$ такой, что

$$0 < \psi^n(A) \leq \frac{\tau_k(t, t', A)}{\Delta(t, t')} \quad \forall t \neq t'.$$

Поэтому для всякой возмущающей матрицы $B \in \mathfrak{B}(\psi^n(A))$

$$\tau_k(t, t', A+B) \geq \tau_k(t, t', A) - \sum_{j \in N_m: e_j \in E(t, t')} |b_{kj}| \geq \tau_k(t, t', A) - \|B\| \Delta(t, t') > 0 \quad \forall t \neq t'.$$

Отсюда на основании свойства 1 находим, что

$$t' \in T_{\text{lex}}(A+B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\psi^n(A)).$$

Следовательно, $T_{\text{lex}}(A) \subseteq T_{\text{lex}}(A+B)$, т.е. согласно свойству 5 получаем неравенство

$$\rho_2^n(A) \geq \psi^n(A).$$

Теперь докажем, что $\rho_2^n(A) \leq \psi^n(A)$. Пусть $\varepsilon > \psi^n(A)$. Тогда, в силу определения числа $\psi^n(A)$, найдутся ЛОТ t' задачи $Z^n(A)$ и траектория $t \neq t'$ такие, что

$$\alpha = \max\{\tau_i(t, t', A)/\Delta(t, t') : i \in N_n\} < \varepsilon. \quad (5)$$

Если в качестве возмущающей матрицы $B \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$ возьмем матрицу с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} -b, & \text{если } e_j \notin t', i \in N_n, \\ b, & \text{если } e_j \in t', i \in N_n, \end{cases}$$

где $\alpha < b < \varepsilon$, то с учетом (5) справедливы неравенства

$$\tau_i(t, t', A+B) = \tau_i(t, t', A) - b\Delta(t, t') < \tau_i(t, t', A) - \alpha\Delta(t, t') \leq 0 \quad \forall i \in N_n.$$

Поэтому согласно свойству 2 траектория $t' \in \bar{T}_{\text{lex}}(A+B)$, т.е. на основании свойства 6 получаем, что $\rho_2^n(A) \leq \psi^n(A)$.

Собирая все доказанное, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Замечание 4. Нетрудно привести примеры матриц A_1, A_2 и A_3 , для которых справедливы соотношения

$$\rho_1^n(A_1) < \rho_2^n(A_2), \quad \rho_1^n(A_2) = \rho_2^n(A_2), \quad \rho_1^n(A_3) > \rho_2^n(A_3).$$

Задачу $Z^n(A)$ назовем квазиустойчивой, если $Q_2(A) \neq \emptyset$, т.е. если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что выполняются включения

$$T_{\text{lex}}(A) \subseteq T_{\text{lex}}(A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon).$$

Тогда из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Задача $Z^n(A)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда*

$$\forall t \in T_{\text{lex}}(A) \quad \exists i \in N_n \quad \forall t' \neq t \quad (\tau_i(t, t', A) < 0). \quad (6)$$

5. Стабильность

Задачу $Z^n(A)$ назовем стабильной, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что выполняются равенства

$$T_{\text{lex}}(A + B) = T_{\text{lex}}(A) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon).$$

Очевидно, что задача $Z^n(A)$ стабильна тогда и только тогда, когда она одновременно устойчива и квазиустойчива. Поэтому ввиду следствий 1 и 2 справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Задача $Z^n(A)$ стабильна тогда и только тогда, когда справедливы формулы (3) и (6).*

Кроме того, нетрудно убедиться, что задача $Z^n(A)$ стабильна, если

$$\forall i \in N_n \quad \exists t \in T_{\text{lex}}(A) \quad \forall t' \neq t \quad (\tau_i(t, t', A) < 0).$$

Для радиуса стабильности задачи $Z^n(A)$, который естественно определить как число

$$\rho_3^n(A) = \begin{cases} \sup Q_3(A), & \text{если } Q_3(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q_3(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$Q_3(A) = \{\varepsilon > 0: T_{\text{lex}}(A) = T_{\text{lex}}(A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\},$$

очевидно соотношение

$$\rho_3^n(A) = \min\{\rho_1^n(A), \rho_2^n(A)\}.$$

Замечание 5. С учетом эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве (см. [14]) следствия 1, 2 и 3 справедливы не только для Чебышевской, но и для других норм в пространстве возмущающих матриц.

Список литературы

1. Леонтьев В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах. *Пробл. киберн.* (1979) **35**, 169–184.
2. Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н. Качественное исследование траекторных задач. *Кибернетика* (1986) №5, 82–89.
3. Гордеев Э. Н. Полиномиальные алгоритмы вычисления радиуса устойчивости для двух классов задач выбора. *Докл. АН СССР* (1987) **297**, №5, 1040–1043.
4. Гордеев Э. Н. Об устойчивости задач на узкие места. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1993) **33**, №9, 1391–1402.
5. Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К. Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1996) **36**, №1, 66–72.
6. Казерацкая А. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И. Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ* (1993) №4, 78–91.
7. Бакурова А. В., Емеличев В. А., Перепелица В. А. Об устойчивости многокритериальных задач на системах подмножеств. *Докл. АН Беларуси* (1995) **39**, №2, 33–35.
8. Емеличев В. А., Кравцов М. К. Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ* (1995) №4, 137–143.
9. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Подкопаев Д. П. О радиусе квазиустойчивости многокритериальной траекторной задачи. *Докл. АН Беларуси* (1996) **40**, №1, 9–12.
10. Подиновский В. В., Гаврилов В. М. *Оптимизация по последовательно применяемым критериям*. Советское радио, Москва, 1975.
11. Подиновский В. В., Ногин В. Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Наука, Москва, 1982.
12. Сергиенко И. В. *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации*. Наукова думка, Киев, 1985.
13. Перепелица В. А., Сергиенко И. В. Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1988) **28**, №3, 400–419.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Наука, Москва, 1972.

Статья поступила 23.09.1996.