Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Косточка, В. Д. Мазуров, Л. Я. Савельев, Число q -ичных слов с ограничениями на длину максимальной серии, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 1, 10–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:27:17

УДК 519.2

Число q -ичных слов с ограничениями на длину максимальной серии

© 1998 г. А. В. Косточка, В. Д. Мазуров, Л. Я. Савельев

Установлено, что число $g(q, s, n)$ слов длины n в q -буквенном алфавите таких, что длина любого подслова из стоящих рядом одинаковых букв не превосходит s , весьма близка к λ^n , где λ – наибольший действительный корень полинома $x^{s+1} - qx^s + q - 1$. Найдено представление λ в виде суммы ряда. Результаты позволяют вычислять асимптотические значения $g(q, s, n)$ и функции $h(q, s, n) = g(q, s, n) - g(q, s - 1, n)$ при $n \rightarrow \infty$ и $s > c \log n$ для любого фиксированного $c > 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-01614, 96-01-01893 и 96-01-01496 соответственно для каждого из авторов.

Введение

Пусть $G(q, s, n)$ обозначает множество слов длины n в алфавите $\{0, 1, \dots, q - 1\}$, в которых длина любой серии (т.е. подслова из стоящих рядом одинаковых букв) не превосходит s , а $H(q, s, n)$ обозначает подмножество слов из $G(q, s, n)$, содержащих хотя бы одну серию длины s . Пусть, далее, $g(q, s, n) = |G(q, s, n)|$, $h(q, s, n) = |H(q, s, n)|$.

Задача подсчета $g(q, s, n)$ и $h(q, s, n)$ связана с рядом других постановок. В частности, $g(2, s, n)$ (соответственно, $h(2, s, n)$) равно удвоенному числу представлений числа n в виде суммы упорядоченных слагаемых, каждое из которых не превосходит s (соответственно, максимальное из которых равно s). Задача подсчета $g(q, s, n)$ является частным случаем задачи вычисления вероятности того, что в случайном q -ичном слове длины n длина максимальной серии не превосходит s . В. Л. Гончаров [4] вывел общую производящую функцию для ряда вероятностных задач, связанных с максимальными сериями для $q = 2$, когда каждая из букв слова независимо от других с вероятностью p принимает одно из значений и с вероятностью $1 - p$ другое. Используя эту формулу, он нашел асимптотику распределения вероятностей длины максимальной серии в типичных случаях. Позднее Л. Я. Савельевым [9, 14] и другими исследовались аналогичные задачи при более сложных зависимостях событий; некоторые ссылки можно найти в [9, 6]. А. Д. Коршунов [6] нашел асимптотику $h(2, s, n)$ при $n \rightarrow \infty$ и $s \geq (1/2) \log_2 n + 2 \log_2 \log_2 n$. В настоящей работе используется подход, отличный от подхода в [6], и получены более общие результаты.

Понятно, что

$$h(q, s, n) = g(q, s, n) - g(q, s - 1, n) \quad (1)$$

и

$$g(q, s, n) = q^n, \quad n = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Задача нахождения $g(q, s, n)$ сводится к исследованию корней некоторых многочленов. Пусть

$$\begin{aligned} A_{q,s}(x) &= x^s - (q-1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{s-1}), \\ B_{q,s}(x) &= (x-1)A_{q,s}(x) = x^{s+1} - qx^s + q - 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $q \geq 2$, $s \geq 2$ — натуральные числа, $\lambda_1 = \lambda_1(q, s)$ — наибольший положительный корень многочлена $A_{q,s}(x)$, а

$$b(q, s) = \frac{q(\lambda_1 - 1)}{(q-1)((s+1)\lambda_1 - sq)}.$$

Тогда при $n \geq s$ число $g(2, s, n)$ равно ближайшему к $b(2, s)\lambda_1^n$ четному числу, а для $q \geq 3$ число $g(q, s, n)$ равно ближайшему к $b(q, s)\lambda_1^n$ целому числу.

Из дальнейшего будет видно, что $b(q, s)$ близко к 1.

Следствие 1. При $n \geq s$

$$h(2, s, n) = 2([0.5b(2, s)\lambda_1(2, s)^n] - [0.5b(2, s-1)\lambda_1(2, s-1)^n]), \quad (4)$$

и для $q \geq 3$

$$h(q, s, n) = [b(q, s)\lambda_1(q, s)^n] - [b(q, s-1)\lambda_1(q, s-1)^n],$$

где $[z]$ обозначает ближайшее к z целое число.

Таким образом, задача нахождения или оценивания $g(q, s, n)$ и $h(q, s, n)$ эквивалентна задаче нахождения или оценивания $\lambda_1(q, s)$. Понятно, что

$$\lambda_1(q, 2) = (q-1)(1 + \sqrt{5})/2 \quad (5)$$

и $g(2, 2, n)$ равно удвоенному n -му числу Фибоначчи.

Формулы для нахождения $\lambda_1(q, s)$ дает следующий результат.

Теорема 2. При $s \geq 2$ для $\lambda_1(q, s)$ справедливы формулы

$$\lambda_1(q, s) = q \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{k(s+1)-2}{k-1} \left(\frac{q-1}{q^{s+1}} \right)^k \right), \quad (6)$$

$$\lambda_1(q, s) = q \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{k(s+1)-1}{k-1} \left(\frac{q-1}{q^{s+1}} \right)^k \right\}. \quad (7)$$

Работа построена следующим образом. В параграфе 2 выведены свойства корней вспомогательных многочленов. На основе этого в параграфе 3 доказана теорема 1. В параграфе 4 доказана теорема 2. В параграфе 5 выводятся асимптотические свойства $g(q, s, n)$ и $h(q, s, n)$ при $n \rightarrow \infty$. Параграф 6 посвящен обсуждению полученных результатов.

1. О корнях многочлена $A_{q,s}(x)$

Предложение 1. Пусть $q \geq 2$, $s \geq 2$ — натуральные числа. Тогда многочлен $A_{q,s}(x)$ не имеет кратных корней. Он обладает вещественным корнем λ_1 , принадлежащим промежутку $(q - q^{1-s}, q)$. Модули всех остальных корней меньше единицы.

Доказательство. Производная многочлена $B_{q,s}(x)$ имеет ровно два корня: 0 (кратности $s-1$) и $\alpha = qs/(s+1)$. Очевидно, 0 не является корнем $B_{q,s}(x)$. Предположим, что α — корень $B_{q,s}(x)$. Поскольку все коэффициенты $B_{q,s}(x)$ являются целыми и старший коэффициент равен 1, любой рациональный корень $B_{q,s}(x)$ обязан быть целым (см., например, [7, §57]) и являться делителем $q-1$. Так как s и $s+1$ взаимно просты, $s+1$ делит q и $\alpha = q_0s$, где $q_0 = \alpha/s$ — целое число. Поскольку q_0 делит q и $q-1$, необходимо $q_0 = 1$ и $\alpha = s = q-1$. Следовательно,

$$0 = B_{q,s}(\alpha) = s^{s+1} - (s+1)s^s + s = -s^s + s,$$

что невозможно.

Итак, $B_{q,s}(x)$ не имеет общих корней с производной, то есть не имеет кратных корней. Следовательно, $A_{q,s}(x) = B_{q,s}(x)/(x-1)$ тоже не имеет кратных корней.

Заметим, что

$$\begin{aligned} B_{q,s}(q - q^{1-s}) &= (q - q^{1-s})^s (q - q^{1-s} - q) + q - 1 \\ &= -q(1 - q^{-s})^s + q - 1 \\ &< -q(1 - sq^{-s}) + q - 1 \\ &= sq^{-s} - 1 < 0, \\ B_{q,s}(q) &= q^{s+1} - q^{s+1} + q - 1 = q - 1 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{q,s}(x)$ имеет некоторый корень λ_1 в промежутке $(q-1, q)$.

Допустим, что $A_{q,s}(x)$ имеет корень $\lambda \neq \lambda_1$ с $|\lambda| > 1$. Поскольку λ и λ_1 — корни $B_{q,s}(x)$,

$$q - \lambda = \frac{q-1}{\lambda^s}, \quad q - \lambda_1 = \frac{q-1}{\lambda_1^s}.$$

Отсюда

$$\lambda - \lambda_1 = \frac{q-1}{\lambda_1^s} - \frac{q-1}{\lambda^s} = (q-1) \frac{\lambda^s - \lambda_1^s}{\lambda^s \lambda_1^s},$$

и после деления на $\lambda - \lambda_1$ получаем, что

$$1 = (q-1) \frac{\lambda_1^{s-1} + \lambda_1^{s-2}\lambda + \dots + \lambda^{s-1}}{\lambda^s \lambda_1^s}.$$

Переходя к модулям, находим, что

$$\begin{aligned} 1 &\leq (q-1) \frac{\lambda_1^{s-1} + \lambda_1^{s-2}|\lambda| + \dots + |\lambda|^{s-1}}{|\lambda|^s \lambda_1^s} \\ &< (q-1) \frac{\lambda_1^{s-1} + \lambda_1^{s-2} + \dots + \lambda_1 + 1}{\lambda_1^s}, \end{aligned}$$

поскольку $|\lambda| > 1$. Так как λ_1 — корень $A_{q,s}(x)$, последняя дробь равна 1. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

Лемма 1. Для каждого отличного от λ_1 корня λ многочлена $B_{q,s}(x)$ справедливо неравенство

$$\frac{|1 - \lambda|}{|q - \lambda|^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{q}(q - 1)}. \quad (8)$$

Доказательство. Ввиду предложения 1 достаточно доказать, что неравенство (8) справедливо для любого комплексного λ , принадлежащего кругу $|\lambda| \leq 1$.

Итак, пусть $|\lambda| \leq 1$, $\lambda = a + bi$, где a и b — действительные числа. Пусть $d = |1 - \lambda|$, $D = |q - \lambda|$. Тогда

$$\begin{aligned} d^2 &= 1 - 2a + a^2 + b^2, \\ D^2 &= q^2 - 2qa + a^2 + b^2 = q^2 - 2(q - 1)a + d^2 - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Поэтому на дуге окружности $|1 - \lambda| = d$, заключенной внутри круга $|\lambda| \leq 1$, минимум D достигается при наибольшем a , то есть на пересечении с окружностью $|\lambda| = 1$. Поэтому в дальнейшем полагаем $a^2 + b^2 = 1$. Тогда, согласно (9), $2a = 2 - d^2$ и

$$\frac{d}{D^2} = \frac{d}{q^2 + d^2 - 1 - (q - 1)(2 - d^2)} = \frac{d}{(q - 1)^2 + qd^2}.$$

Ясно, что максимум последнего выражения для положительных d достигается при $d = (q - 1)/\sqrt{q}$ и равен $1/(2\sqrt{q}(q - 1))$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $G(i, q, s, n)$ — подмножество слов из $G(q, s, n)$, первая буква которых есть i , $i = 0, 1, \dots, q - 1$, а $G(j, i, q, s, n)$ — подмножество слов из $G(i, q, s, n)$, первые j букв которых суть i , $i = 0, 1, \dots, q - 1$, $j = 1, \dots, s$. Нужные нам уравнения выводятся из следующих простых тождеств.

$$|G(i, q, s, n)| = |G(k, q, s, n)| \quad \forall i, k = 0, 1, \dots, q - 1; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} |G(q, s, n)| &= q|G(i, q, s, n)| \\ &= q \sum_{j=1}^s |G(j, i, q, s, n)| \quad \forall i = 0, 1, \dots, q - 1; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |G(j, i, q, s, n)| &= \left| \bigcup_{k \neq i} G(k, q, s, n - j) \right| \\ &= (q - 1)|G(i, q, s, n - j)| \\ &= \frac{q - 1}{q} |G(q, s, n - j)|. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно (11) и (12), для каждого $n \geq s + 1$

$$g(q, s, n) = (q - 1)(g(q, s, n - 1) + g(q, s, n - 2) + \dots + g(q, s, n - s)). \quad (13)$$

Таким образом, при фиксированных q и s последовательность $g(q, s, n)$ является возвратной последовательностью, определяемой уравнениями (13) и начальными значениями (2). Характеристическим многочленом (см. [8, 3, 13]) последовательности $g(q, s, n)$ является $A_{q,s}(x)$. По предложению 1 все корни многочлена $A_{q,s}(x)$ — простые. Следовательно (см., например, [8, 3, 13]), решение уравнений (13) имеет вид

$$g(q, s, n) = b_1 \lambda_1^n + \dots + b_s \lambda_s^n, \quad (14)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ суть корни $A_{q,s}(x)$. Чтобы определить коэффициенты $b_1, \dots, b_s$, воспользуемся (2). Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} q &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_s b_s, \\ q^2 &= \lambda_1^2 b_1 + \lambda_2^2 b_2 + \dots + \lambda_s^2 b_s, \\ &\dots\dots\dots \\ q^s &= \lambda_1^s b_1 + \lambda_2^s b_2 + \dots + \lambda_s^s b_s. \end{aligned} \quad (15)$$

По правилу Крамера $b_i = D_i/D$, $i = 1, \dots, s$, где

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_s^2 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \dots & \lambda_s^s \end{vmatrix},$$

а D_i получается из D заменой i -го столбца на столбец свободных коэффициентов системы (15). Имеем

$$\begin{aligned} D &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), \\ D_i &= \lambda_1 \dots \lambda_{i-1} q \lambda_{i+1} \dots \lambda_s W(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, q, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_s), \end{aligned}$$

где $W(z_1, \dots, z_s)$ обозначает определитель Вандермонда от переменных $z_1, \dots, z_s$. Так как

$$W(z_1, \dots, z_s) = \prod_{i < j} (z_j - z_i),$$

получаем, что

$$\frac{D_i}{D} = \frac{q}{\lambda_i} \frac{\prod_{j \neq i} (q - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — корни $A_{q,s}(x)$,

$$\prod_{j \neq i} (q - \lambda_j) = \frac{A_{q,s}(q)}{q - \lambda_i} = \frac{1}{q - \lambda_i}.$$

Так как $A_{q,s}(\lambda_i) = B_{q,s}(\lambda_i) = 0$, находим, что

$$\begin{aligned} \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) &= \lim_{x \rightarrow \lambda_i} \frac{A_{q,s}(x)}{x - \lambda_i} \\ &= \lim_{x \rightarrow \lambda_i} \frac{B_{q,s}(x)}{(x-1)(x-\lambda_i)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{x-1} \lim_{x \rightarrow \lambda_i} \frac{B_{q,s}(x) - B_{q,s}(\lambda_i)}{x - \lambda_i} \\ &= \frac{1}{\lambda_i - 1} [B_{q,s}(x)]'_{x=\lambda_i} \\ &= \frac{(s+1)\lambda_i^s - sq\lambda_i^{s-1}}{\lambda_i - 1}. \end{aligned}$$

Помня, что $\lambda_i^s(q - \lambda_i) = q - 1$, получаем, что

$$\frac{D_1}{D} = \frac{q}{\lambda_1} \frac{1}{q - \lambda_1} \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1^{s-1}((s+1)\lambda_1 - sq)} = \frac{q(\lambda_1 - 1)}{(q-1)((s+1)\lambda_1 - sq)}.$$

Так как $|\lambda_i| < 1$ для $i \geq 2$, при этих i и $n \geq s$ справедлива оценка

$$|b_i \lambda_i^n| = |\lambda_i^n D_i / D| \leq \frac{|\lambda_i|^{n-s} q |1 - \lambda_i|}{|q - \lambda_i| - (s+1)\lambda_i + sq}.$$

Заметим, что

$$|-(s+1)\lambda_i + sq| = |s(q - \lambda_i) - \lambda_i| \geq s|q - \lambda_i| - 1 > (s-1)|q - \lambda_i|.$$

Учитывая лемму 1, находим, что при $i \geq 2$ и $n \geq s$

$$|b_i \lambda_i^n| \leq \frac{|\lambda_i|^{n-s} q |1 - \lambda_i|}{(s-1)|q - \lambda_i|^2} \leq \frac{q}{2\sqrt{q}(q-1)(s-1)}.$$

Отсюда

$$|g(q, s, n) - b_1 \lambda_1^n| \leq (s-1) \frac{q}{2\sqrt{q}(q-1)(s-1)} = \frac{\sqrt{q}}{2(q-1)}. \quad (16)$$

Так как $q-1 > \sqrt{q}$ при $q \geq 3$, утверждение теоремы для $q \geq 3$ доказано. Поскольку число слов в $G(2, s, n)$, начинающихся с 0 и с 1, одинаково, $g(2, s, n)$ чётно. Таким образом, из (16) вытекает справедливость теоремы.

3. Формулы для $\lambda_1(q, s)$

Для вычисления $\lambda_1(q, s)$ удобно использовать теорему Лагранжа об обращении рядов (см., например, [12, п.452]).

Теорема 3. Пусть $f(y)$ и $\phi(y)$ — функции от y , аналитические в некоторой окрестности точки a , и y является решением уравнения

$$y = a + x\phi(y). \quad (17)$$

Тогда f может быть разложена в ряд по формуле

$$f(y) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} [f'(y)\phi(y)^k]_{y=a}. \quad (18)$$

Понятно, что число λ является корнем $B_{q,s}(x)$, если и только если $\mu = q/\lambda$ является корнем уравнения

$$y = 1 + \frac{q-1}{q^{s+1}} y^{s+1}. \quad (19)$$

Уравнение (19) является частным случаем уравнения (17) с $a = 1$, $x = (q-1)/q^{s+1}$, $\phi(y) = y^{s+1}$. Применив теорему 3 к (19) для $f(y) = q/y$ и заметив, что

$$\begin{aligned} f'(y)\phi(y)^k &= -\frac{q}{y^2} y^{k(s+1)} = -q y^{k(s+1)-2}, \\ \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} [f'(y)\phi(y)^k]_{y=a} &= -\frac{q}{k} \binom{k(s+1)-2}{k-1} y^{k s-1}, \end{aligned}$$

получаем для близкого к 1 корня μ уравнения (19) формулу

$$q/\mu = q - q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{k(s+1)-2}{k-1} \left(\frac{q-1}{q^{s+1}} \right)^k.$$

По признаку Коши этот ряд сходится при любых $s \geq 2$, $q \geq 2$. Из формулы видно, что $q-1 < q/\mu < q$. Как отмечено выше, q/μ является корнем $B_{q,s}(x)$. Значит, $q/\mu = \lambda_1(q, s)$, и формула (6) доказана.

Аналогично, для вывода формулы (7) достаточно применить теорему 3 к (19) для $f(y) = \ln(q/y)$ (ср. [11, с. 187]). Получим, что

$$\ln \lambda_1(q, s) = \ln q - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{k(s+1)-1}{k-1} \left(\frac{q-1}{q^{s+1}} \right)^k.$$

4. Об асимптотике $g(q, s, n)$ и $h(q, s, n)$

В качестве приближений для λ_1 можно брать конечные суммы из (6). Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{q(x-1)}{(q-1)((s+1)x - sq)} x^n, \\ a_k &= \frac{1}{k} \binom{k(s+1)-2}{k-1}, \\ z_m &= z_m(q, s) = q \left(1 - \sum_{k=1}^m a_k \left(\frac{q-1}{q^{s+1}} \right)^k \right). \end{aligned}$$

Теорема 1 утверждает, что $\varphi(\lambda_1(q, s))$ почти совпадает с $g(q, s, n)$. Оценим погрешность аппроксимации выражения $\varphi(\lambda_1(q, s))$ с помощью выражения $\varphi(z_m^n)$. Поскольку

$$a_k \leq \frac{(ks + k/2)^{k-1}}{k!} \leq \frac{(e(s+1/2))^k}{k(s+1/2)},$$

справедлива оценка

$$z_m - \lambda_1 = q \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \left(\frac{q-1}{q^{s+1}} \right)^k \leq q \left(\frac{e(s+1/2)(q-1)}{q^{s+1}} \right)^{m+1}.$$

Напомним, что $\lambda_1 > q - q^{1-s}$ по предложению 1. Нетрудно проверить, что при $6 \leq s \leq n-1$ и $x > q - q^{1-s}$ функция $\varphi(x)$ возрастает, а дробь

$$\frac{q(x-1)}{(q-1)((s+1)x - sq)} = \frac{q}{(q-1)(s+1)} \frac{x-1}{x - sq/(s+1)}$$

убывает с ростом x . Следовательно, поскольку $z_m > \lambda_1$,

$$\begin{aligned} 1 > \frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi(z_m)} &\geq \frac{\lambda_1^n}{z_m^n} = \left(1 - \frac{z_m - \lambda_1}{z_m} \right)^n \\ &\geq 1 - n \frac{z_m - \lambda_1}{z_m} \\ &\geq 1 - 2n \left(\frac{e(s+1/2)(q-1)}{q^{s+1}} \right)^{m+1}. \end{aligned}$$

Так как при любых $q \geq 2$, $s \geq 4$ справедливо неравенство

$$e(s+1/2)(q-1)q^{-s-1} < 1/2,$$

при таких q, s и $m > 2 \log_2 n$

$$1 > \frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi(z_m)} > 1 - 2n 2^{-1-2 \log_2 n} > 1 - 1/n.$$

При $n \rightarrow \infty$ и $s \geq 0, 5 \log_q n + 2 \log_q \log_q n$ значение $\varphi(z_1)$ асимптотически совпадает с $g(q, s, n)$. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} 1 > \frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi(z_1)} &\geq 1 - 2n \left(\frac{e(s+1/2)(q-1)}{q^{s+1}} \right)^2 \\ &\geq 1 - 2n \left(\frac{e(0.5 \log_q n + \log_q \log_q n + 1/2)(q-1)}{q \sqrt{n} \log_q^2 n} \right)^2 \\ &\geq 1 - 2 \left(\frac{e}{\log_q n} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают результаты [6]. Если вместо $\varphi(z_1)$ в этом случае использовать $\varphi(z_m)$ при фиксированном $m > 1$, то получим еще лучшее приближение. Аналогично можно исследовать поведение $g(q, s, n)$ при $n \rightarrow \infty$ и $s > c \log n$ для любого фиксированного $c > 0$.

Для приближения $\varphi(\lambda_1(q, s))$ можно применять и представление $\lambda_1(q, s)$ в виде (7). Аналогично вышеприведенным неравенствам доказывается следующий факт.

Предложение 2. Пусть $q \geq 2$, $s \geq 2$, $m \geq 1$ — натуральные числа и

$$u(q, m, s) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \binom{k(s+1)-1}{k-1} \left(\frac{q-1}{q^{s+1}} \right)^k.$$

Тогда

$$g(q, s, n) \sim q^n e^{-n u(q, m, s)}.$$

при $n \rightarrow \infty$ и

$$s \geq \frac{1}{m+1} \log_q n + \log_q \log_q n.$$

5. Заключительные замечания

О представлении $\lambda_1(q, s)$ в радикалах. Формула (5) является простой конечной формулой для $\lambda_1(q, 2)$. К сожалению, для многих s невозможно выразить $\lambda_1(q, s)$ в радикалах. Мы приведем набросок доказательства того, что этого нельзя сделать для $s = 5$, $q = 2$.

Нетрудно проверить, что полином $f = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ неразложим по модулю 5 и

$$f \equiv (x^3 + x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1) \pmod{3}.$$

Очевидно, многочлены $x^3 + x^2 - x + 1$ и $x^2 + x - 1$ неразложимы по модулю 3. Согласно [1, §66] группа Галуа полинома f , рассматриваемая как группа подстановок его корней, содержит цикл длины пять и транспозицию. Следовательно, она совпадает с симметрической группой степени пять и, в частности, неразрешима.

О разности $g(2, s, n) - b(2, s)\lambda_1(2, s)$. Используя то, что не менее половины корней многочлена $A_{q,s}$ лежит в левой полуплоскости (см. §2 и 3 главы XV в [2]), можно убедиться в том, что $|g(2, s, n) - b(2, s)\lambda_1^n| < 1/2$. Таким образом, справедливо следующее уточнение теоремы 1.

Теорема 1'. Пусть $q \geq 2$, $s \geq 2$ — натуральные числа, $\lambda_1 = \lambda_1(q, s)$ — наибольший положительный корень многочлена $A_{q,s}(x)$, а

$$b(q, s) = \frac{q(\lambda_1 - 1)}{(q - 1)((s + 1)\lambda_1 - sq)}.$$

Тогда при $n \geq s$ число $g(q, s, n)$ равно ближайшему к $b(q, s)\lambda_1^n$ целому числу.

О числах Пизо. Действительное число $a > 1$ называется числом Пизо, если оно является корнем такого многочлена $f_a(x)$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, что модули всех остальных корней $f_a(x)$ меньше 1. В частности, каждое целое $a > 1$ (как корень двучлена $x - a$) является числом Пизо. Числа Пизо обладают рядом замечательных свойств (см., например, [5, Глава VIII]). Фактически предложение 1 утверждает, что $a = \lambda_1(q, s)$ является числом Пизо, где $f_a(x) = A_{q,s}(x)$.

О других постановках задач. Теория серий в случайных последовательностях тесно связана с теорией случайных размещений. Эту связь подробно исследовал А. Н. Трунов [10].

Задачу подсчета $g(q, s, n)$ можно формулировать как задачу подсчета слов длины n , не содержащих подслов длины $s + 1$, состоящих из одинаковых букв. А. А. Евдокимов обратил внимание авторов на то, что в некоторых приложениях требуется оценить число слов длины n с другими множествами запрещенных слов.

Авторы благодарят Д. Г. Фон-Дер-Флаасса за ценные советы, а также М. В. Фокина за замечание о числах Пизо.

Список литературы

1. Ван дер Варден Б. Л. *Алгебра*. Наука, Москва, 1976.
2. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Гостехиздат, Москва, 1953.
3. Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей*. Наука, Москва, 1967.
4. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики. *Известия АН СССР, Серия матем.* (1944) 8, №1, 3–48.
5. Касселс Дж. В. С. *Введение в теорию диофантовых приближений*. ИЛ, Москва, 1961.
6. Коршунов А. Д. О числе бинарных слов с заданной длиной максимальной серии, I. *Дискретный анализ и исследование операций* (1997) 4, №4. 13–46.
7. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. Наука, Москва, 1968.
8. Маркушевич А. И. *Возвратные последовательности*. Наука, Москва, 1975.
9. Савельев Л. Я. Серии в марковских последовательностях. *Сибирский матем. ж.* (1991) 32, №4, 116–132.
10. Трунов А. Н. Предельные теоремы в задаче о размещении одинаковых частиц по различным ячейкам, *Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова* (1986) 177, 147–164.
11. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. *Курс современного анализа*, Ч. 1. ГИФМЛ, Москва, 1962.
12. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. II. ГИФМЛ, Москва, 1962.
13. Холл М. *Комбинаторика*. Мир, Москва, 1970.
14. Savelyev L. Ya, Runs in finite Markov chains. *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proc. 3rd International Petrozavodsk Conf. VSP, Utrecht*, 1993, pp. 437–450.

Статья поступила 04.02.1998.