Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Селиванов, О комбинаторных функциях, связанных с рядом Бюрмана–Лагранжа. Соотношения квазиортогональности, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 1, 127–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:32:36

УДК 519.1

О комбинаторных функциях, связанных с рядом Бюрмана–Лагранжа.

Соотношения квазиортогональности

© 1998 г. Б. И. Селиванов

Пусть

$$g(t) = \sum_{n=m}^{\infty} g_n \frac{t^n}{n!}, \quad g_m \neq 0, \quad m \geq 1,$$

— формальный степенной ряд (ф.с.р.) над полем K действительных или комплексных чисел. При рассмотрении обобщенного ряда Бюрмана–Лагранжа возникают величины

$$P^{(m)}(n, k) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \text{Coef}_{t^{n-k}}[t^n g^{-n/m}(t)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n,$$

которые были введены автором ранее и при $m = 1$ совпадают с B -функциями М. Л. Платонова. С использованием метода Хенрике показано, что множество величин

$$Q^{(m)}(n, k) = \frac{n!}{k!} \text{Coef}_{t^n}[g^{k/m}(t)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n,$$

образует квазиортогональ к множеству $\{P^{(m)}(n, k)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, n$. Описаны некоторые свойства коэффициентов ряда $x^r(t)$, r -й степени, $r \in K$, ф.с.р. $x(t)$ над полем K .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-00531.

1. Введение

Пусть K — поле действительных или комплексных чисел, $K[t]$ — алгебра формальных степенных рядов (ф. с. р.) над полем K . Если

$$g(t) = \sum_{n=m}^{\infty} g_n \frac{t^n}{n!}, \quad g_m \neq 0, \quad m \geq 1, \tag{1.1}$$

— элемент $K[t]$, то, как показано в следующем параграфе, существует ф.с.р. $[t^{-m}g(t)]^{-n/m} \in K(t)$ — $(-n/m)$ -я степень ряда $t^{-m}g(t)$. Рассмотрим величины

$$\begin{aligned} P^{(m)}(n, k) &= \left(\frac{n-1}{k-1} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \left(\left(\frac{g(t)}{t^m} \right)^{-n/m} \right) \right)_{t=0} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \text{Coef}_{t^{n-k}} [t^n g^{-n/m}(t)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.2)$$

введенные автором в работе [1]. Равенство $x_n = \text{Coef}_{t^n} [x(t)]$ означает, что x_n есть коэффициент при t^n в ряде

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n.$$

Ясно, что

$$P^{(m)}(n, n) = P^{(m)}(n, n; g_m) = \left(\frac{g_m}{m!} \right)^{-n/m}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

(здесь и в дальнейшем берется главная непрерывная ветвь степенной функции), и, как показано в [1],

$$\begin{aligned} P^{(m)}(n, k) &= P^{(m)}(n, k; g_m, \dots, g_{n-k+m}) \\ &= (-1)^{n-k} \frac{(n-1)!}{(k-1)! m^{n-k}} \left(\frac{g_m}{m!} \right)^{(-n/m+n-k)} \\ &\quad \times \sum_{(n-k, 2n-2k)} (-1)^{l_0} l_0! m^{l_0} \prod_{i=0}^{n-k-l_0-1} (n+im) \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{n-k} \frac{1}{l_i!} \left(\frac{g_{m+i}}{(m+i)!} \right)^{l_i}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad k = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где сумма $\sum_{(j, 2j)}$, $j \geq 1$, берется по всем наборам $(l_0, l_1, \dots, l_j)$ целых неотрицательных чисел таких, что

$$l_0 + l_1 + \dots + l_j = j, \quad l_0 + 2l_1 + \dots + (j+1)l_j = 2j,$$

и число слагаемых в ней равно числу разбиений $2j$ на j слагаемых.

Величины $P^{(m)}(n, k)$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, n$, будем называть P -функциями. Они являются функциями от коэффициентов $g_m, \dots, g_{n-k+m}$ ряда (1.1), и все эти переменные являются существенными. Более того, по переменным $g_{m+1}, \dots, g_{n-k+m}$ величины $P^{(m)}(n, k)$ суть полиномы.

При $m = 1$ выражения (1.3) и (1.4) приводятся к виду

$$P^{(1)}(n, n; g_1) = B(n, n; g_1) = B(n, n) = g_1^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

и для $n = 2, 3, \dots$, $k = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} P^{(1)}(n, k; g_1, \dots, g_{n-k+1}) &= B(n, k; g_1, \dots, g_{n-k+1}) = B(n, k) \\ &= \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)! g_1^{2n-k}} \sum_{(n-k, 2n-2k)} (-1)^{l_0} l_0! (2n-k-l_0-1)! \prod_{i=0}^{n-k} \frac{g_{i+1}^{l_i}}{l_i! ((i+1)!)^{l_i}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Формулы (1.5) и (1.6) определяют B -функции, свойства и применения которых рассматривались в ряде работ М. Л. Платонова и его учеников (см. [2, 3, 4]). Частный случай B -функций — функции $B(n, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, известен в связи с задачей обращения ф.с.р. (см., например [5, 6]).

Значение P -функций можно понять при рассмотрении ряда Бюрмана–Лагранжа. Пусть кроме ряда (1.1) задан ф.с.р.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{t^n}{n!} \in K[t].$$

Ряд $t = \hat{g}(u)$, обратный к $g(t)$ относительно операции композиции (подстановки) степенных рядов, представляет собой ряд по степеням $u^{1/m}$,

$$\hat{g}(u) = \hat{g}_1 u^{1/m} + \hat{g}_2 \frac{u^{2/m}}{2!} + \dots + \hat{g}_n \frac{u^{n/m}}{m!} + \dots \quad (1.7)$$

Положим

$$F(u) = f(\hat{g}(u)) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{u^{n/m}}{n!}. \quad (1.8)$$

Ряд в правой части (1.8) называется рядом Бюрмана–Лагранжа. В случае $m \geq 2$ его называют также обобщением ряда Бюрмана–Лагранжа.

Теорема 1.1. Коэффициенты ряда (1.8) определяются с помощью обобщенной формулы Бюрмана–Лагранжа:

$$F_n = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(f'(t) \left(\frac{t}{g^{1/m}(t)} \right)^n \right)_{t=0} \quad (1.9)$$

$$= \sum_{k=1}^n f_k P^{(m)}(n, k), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Формула (1.9) широко известна, когда в (1.1) $m = 1$, а $g(t)$ и $f(t)$, как функции комплексного переменного t , регулярны в точке $t = 0$. При этом, если $m > 1$, в справедливости равенства (1.9) нетрудно убедиться, рассуждая аналогично тому, как в [7] на стр. 141–142 выводится формула для коэффициентов $\hat{g}_n$ ряда (1.7). Затем, с помощью формулы Лейбница для высших производных из (1.9) получаем для F_n выражение (1.10). При $m = 1$ в (1.1) теорема 1.1 для ф.с.р. над полем характеристики 0 доказана в [8] (см. также [9]). Другие доказательства формулы Бюрмана–Лагранжа для ф.с.р. содержатся в работах [10, 11, 12]. В [1] утверждение теоремы 1.1 распространено на ряды $g(t) \in K[t]$ вида (1.1) с $m > 1$. В [1] можно найти также ряд свойств P -функций.

Справедливость формулы Бюрмана–Лагранжа для ф.с.р. позволяет использовать ее при написании асимптотических рядов. Действительно, ряд (1.8) представляет собой асимптотическое разложение $F(u)$ при $u \rightarrow 0$. С использованием теоремы 1.1 при $m = 1$ в [8] исследовалась асимптотика интеграла Лапласа. В [13] функции $P^{(2)}(n, 1)$ нашли применение для нахождения общего члена в классической формуле Стирлинга, определяющей асимптотическое разложение гамма-функции.

Важным свойством B -функций (1.5), (1.6) является выполнение для них соотношений квазиортогональности (см. [2, 3, 14]), согласно которым для $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n A(n, i) B(i, k) &= \delta_{nk}, \\ \sum_{i=k}^n B(n, i) A(i, k) &= \delta_{nk}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, $m = 1$ в определении (1.1) ряда $g(t)$ и

$$A(n, k) = A(n, k; g_1, \dots, g_{n-k+1}) = \frac{n!}{k!} \text{Coef}_{t^n} [g^k(t)] \quad (1.12)$$

— частные (однородные) полиномы Белла или A -функции (полиномы), если использовать терминологию М. Л. Платонова [3, 4]. Комбинаторное значение соотношений квазиортогональности заключается в том, что с каждым из них связана пара взаимно обратных соотношений [6], которая служит также источником различных комбинаторных тождеств. Формулы (1.11) для A - и B -функций неявно и без раскрытия их комбинаторного смысла получены в работе [8], и это обстоятельство, видимо, никем не было замечено. Позднее соотношения (1.11) были переоткрыты М. Л. Платоновым [2].

В §2 представленной работы в алгебре $K[t]$ для $r \in K$ определяется степень $x^r(t)$ элемента $x(t) \in K[[t]]$. Получено явное выражение для коэффициентов $X_n^{(r)}$, $n = 0, 1, \dots$, ф.с.р.

$$x^r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(r)} \frac{t^n}{n!},$$

и описаны некоторые свойства этих величин как функций от коэффициентов ряда $x(t)$.

В §3 соотношениями (3.3) вводятся Q -функции $Q^{(m)}(n, k)$, которые, как показано в этом параграфе, образуют квазиортогональ к P -функциям $P^{(m)}(n, k)$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, n$. Доказательство соотношений квазиортогональности для P - и Q -функций, вполне аналогичных равенствам (1.11), проводится с помощью метода Хенрике из работы [8].

В последующих публикациях с использованием результатов этой статьи для P - и Q -функций будут получены разнообразные рекуррентные соотношения и тождества.

2. Об одном классе формальных степенных рядов

Для каждой пары $x(t)$ и r , где

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!} \in K[[t]], \quad x_0 \neq 0, \quad (2.1)$$

и $r \in K$, в алгебре $K[t]$ существует элемент $x^r(t)$ — r -я степень $x(t)$, который имеет все свойства степени. Действительно, положим

$$x^r(t) = a \exp \left\{ r \ln \left(1 + \frac{1}{x_0} x_1(t) \right) \right\}, \quad a = x_0^r, \quad (2.2)$$

где

$$x_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!}.$$

Учитывая известные определения ф.с.р. $\exp t$, $\ln(1+t)$ и применяя операцию композиции (подстановки) ф.с.р., находим, что элемент $x^r(t)$, определенный равенством (2.2), является ф.с.р. из $K[t]$. Определение (2.2) корректно, поскольку для целых r правая часть (2.2) совпадает с целочисленными степенями ряда (2.1). Наконец, из результатов работы [11] следует, что ф.с.р. (2.2) обладает всеми обычными свойствами степени.

Обозначим

$$x^r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(r)} \frac{t^n}{n!}, \quad r \in K, \quad (2.3)$$

где $X_0^{(r)} = x_0^r$ и ряд $x(t)$ определен посредством (2.1). В этом параграфе, опираясь на то, что ф.с.р. (2.3) является степенью ряда (2.1), мы опишем некоторые свойства его коэффициентов $X_n^{(r)}$. Вначале получим явное выражение для величин $X_n^{(r)}$.

Теорема 2.1. Для произвольного $r \in K$ коэффициенты $X_n^{(r)}$ ряда (2.3) можно представить в виде

$$X_n^{(r)} = n! x_0^{r-n} \sum_{(n, 2n)} l_0!(r)_{n-l_0} \prod_{i=0}^n \frac{x_i^{l_i}}{(i!)^{l_i} l_i!}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.4)$$

где $(r)_0 = 1$, $(r)_k = r(r-1)\dots(r-k+1)$, $k = 1, 2, \dots$, и смысл суммы $\sum_{(n, 2n)}$ разъясняется в предыдущем параграфе.

Доказательство. Согласно [11] из (2.2) следует, что

$$x^r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (r)_k x_0^{r-k} \frac{1}{k!} x_1^k(t).$$

Ввиду (1.12) отсюда получаем, что

$$x^r(t) = x_0^r + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (r)_k x_0^{r-k} A(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.5)$$

где $A(n, k) = A(n, k; x_1, \dots, x_{n-k+1})$ — частные полиномы Белла. Из (2.3) и (2.5) вытекает, что

$$X_n^{(r)} = \sum_{k=1}^n (r)_k x_0^{r-k} A(n, k; x_1, \dots, x_{n-k+1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Формула (2.6) опубликована в [15].

Из (2.6), используя представление полиномов $A(n, k)$ в виде суммы по разбиениям (см. [3]) и полагая $n - k = \lambda$, находим, что

$$X_n^{(r)} = n! x_0^{r-n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \lambda! (r)_{n-\lambda} \frac{x_0^\lambda}{\lambda!} \sum \prod_{i=1}^{\lambda+1} \frac{x_i^{l_i}}{(i!)^{l_i} l_i!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где суммирование в последней сумме проводится по целым неотрицательным $l_1, \dots, l_{\lambda+1}$ таким, что $l_1 + \dots + l_{\lambda+1} = n - \lambda$, $l_1 + 2l_2 + \dots + (\lambda + 1)l_{\lambda+1} = n$. Отсюда, полагая $\lambda = l_0$, убеждаемся в справедливости формулы (2.4) для $n = 1, 2, \dots$. При $n = 0$ правая часть (2.4) равна x_0^r , так что эта формула верна и для $n = 0$. Теорема доказана.

Непосредственно из формулы (2.4) следует, что величины $X_n^{(r)}$, $n = 0, 1, \dots$, существенно зависят от коэффициентов $x_0, x_1, \dots, x_n$ ряда (2.1) и являются полиномами от $x_1, \dots, x_n$.

Свойства коэффициентов $X_n^{(r)}$ ряда (2.3), используемые в дальнейшем, собраны в формулируемых ниже теореме и следствии из нее.

Теорема 2.2. Для функций $X_n^{(r)}$, $r \in K$, определяемых разложением (2.3), выполняются следующие соотношения.

(1) Если $q \in K$ и для $n = 0, 1, \dots$

$$X_n^{(q)} = n! \text{Coef}_{t^n} [x^q(t)], \quad X_n^{(r+q)} = n! \text{Coef}_{t^n} [x^{r+q}(t)],$$

где $x(t)$ — ф.с.р. (2.1), то

$$X_n^{(r+q)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X_k^{(r)} X_{n-k}^{(q)}, \quad (2.7)$$

в частности,

$$X_n^{(r+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k X_{n-k}^{(r)}. \quad (2.8)$$

(2) Для $n = 1, 2, \dots$

$$X_n^{(r+1)} = (r+1) \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x_k X_{n-k}^{(r)}, \quad (2.9)$$

(3) Для $k, n = 0, 1, \dots$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} X_n^{(r)} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > n, \\ r \binom{n}{k} X_{n-k}^{(r-1)}, & \text{если } k = 0, 1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.10)$$

(4) Для $n = 0, 1, \dots$

$$X_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=0}^n x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_k} X_n^{(r)}. \quad (2.11)$$

(5) Для $n = 0, 1, \dots$

$$(n+r+1)X_{n+1}^{(r)} = rx_0X_{n+1}^{(r-1)} + (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{k+2}{k+1} x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_k} X_n^{(r)}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$x^{r+q}(t) = x^r(t)x^q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} X_k^{(r)} X_{n-k}^{(q)} t^n,$$

откуда, учитывая определение функций $X_n^{(r+q)}$, получаем (2.7) и (2.8).

Далее, дифференцируя по t обе части равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(r+1)} \frac{t^n}{n!} = x^{r+1}(t)$$

и принимая во внимание (2.1) и (2.3), находим, что для $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} X_n^{(r+1)} &= (r+1)(n-1)! \text{Coef}_{t^{n-1}} \left[x^r(t) \frac{d}{dt} x(t) \right] \\ &= (r+1)(n-1)! \text{Coef}_{t^{n-1}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x_k X_{n-k}^{(r)} \right) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right], \end{aligned}$$

что доказывает (2.9).

Так как функции $X_n^{(r)}$ не зависят от $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$, в доказательстве нуждается лишь второе из равенств (2.10). Для этого продифференцируем по x_k , $k = 0, 1, \dots$, обе части (2.3). Получаем, что для $n = 0, 1, \dots$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} X_n^{(r)} = rn! \text{Coef}_{t^n} \left[\frac{t^k}{k!} x^{r-1}(t) \right] = rn! \text{Coef}_{t^n} \left[\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} X_{n-k}^{(r-1)} \frac{t^n}{n!} \right], \quad (2.13)$$

и третье утверждение теоремы доказано.

Согласно (2.3)

$$X_{n+1}^{(r)} = n! \text{Coef}_{t^n} \left[\frac{d}{dt} x^r(t) \right], \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

Отсюда в силу (2.13) и первого из равенств (2.10) следует, что

$$\begin{aligned} X_{n+1}^{(r)} &= n! \text{Coef}_{t^n} \left[rx^{r-1}(t) \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} \frac{t^k}{k!} \right] = n! \text{Coef}_{t^n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} X_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} \right] \\ &= n! \text{Coef}_{t^n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_k} X_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} \right], \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

и (2.11) доказано.

Несколько больших усилий требует доказательство пятого утверждения теоремы. Аналогично (2.14)

$$X_{n+1}^{(r)} = n! \operatorname{Coef}_{t^{n+1}} \left[t \frac{d}{dt} x^r(t) \right], \quad n = 0, 1, \dots,$$

в силу чего для $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} X_n^{(r)} &= n! \operatorname{Coef}_{t^{n+1}} \left[-rx^r(t) + rx^{r-1}(t) \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x_k \frac{t^k}{k!} + rx_0 x^{r-1}(t) \right] \\ &= \frac{r}{n+1} (x_0 X_{n+1}^{(r-1)} - X_{n+1}^{(r)}) + n! \operatorname{Coef}_{t^{n+1}} \left[rx^{r-1}(t) \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x_k \frac{t^k}{k!} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Так как

$$rx^{r-1}(t) \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k+2}{k+1} x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_k} X_n^{(r)} \right) \frac{t^n}{n!},$$

(2.15) принимает вид

$$X_{n+1}^{(r)} = \frac{r}{n+1} (x_0 X_{n+1}^{(r-1)} - X_{n+1}^{(r)}) + \sum_{k=0}^n \frac{k+2}{k+1} x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_k} X_n^{(r)}.$$

Отсюда вытекает (2.12). Теорема доказана.

Следствие 2.1. Для коэффициентов $X_n^{(r)}$ r -й степени $x^r(t)$, $r \in K$, ряда (2.1) имеют место равенства

$$X_n^{(r)} = \frac{1}{x_0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (k(r+1) - n) \binom{n-1}{k-1} x_k X_{n-k}^{(r)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

$$X_{n+1}^{(r)} = r \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_{k+1} X_{n-k}^{(r-1)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.17)$$

$$(n+r+1)X_{n+1}^{(r)} = r \left(x_0 X_n^{(r-1)} + \sum_{k=0}^n (k+2) \binom{n+1}{k+1} x_{k+1} X_{n-k}^{(r-1)} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.18)$$

Доказательство. Приравнивая правые части формул (2.8) и (2.9), убеждаемся в справедливости (2.16). Соотношения (2.17) и (2.18) следуют из (2.11) и (2.12), соответственно, если воспользоваться вторым из равенств (2.10).

Для натуральных r рекуррентное соотношение, эквивалентное равенству (2.16), можно найти в [16], а для комплексных r в [17]. Согласно Гульду [18] этот аналог формулы (2.16) был известен Л. Эйлеру еще в 1748 году и затем неоднократно переоткрывался различными авторами.

3. Соотношения квазиортогональности

Рассмотрим для $k = 1, 2, \dots$ степени $g^{k/m}(t)$ ряда (1.1). Так как

$$g^{k/m}(t) = t^k h^{k/m}(t) \quad (3.1)$$

и

$$h(t) = t^{-m} g(t) = \frac{g_m}{m!} + \frac{g_{m+1}}{(m+1)!} t + \dots + \frac{g_{m+n}}{(m+n)!} t^n + \dots \quad (3.2)$$

— степенной ряд из алгебры $K[t]$ с ненулевым свободным членом, то согласно §2 степени $h^{k/m}(t)$ ряда $h(t)$ и тем самым степени $g^{k/m}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, являются элементами из $K[t]$. Положим

$$Q^{(m)}(n, k) = \frac{n!}{k!} \text{Coef}_{t^n} [g^{k/m}(t)], \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Из (3.3), в частности, следует, что

$$Q^{(m)}(n, n) = \left(\frac{g_m}{m!} \right)^{n/m}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

а из (3.1) и (3.2) видно, что при $k > n$

$$\text{Coef}_{t^n} [g^{k/m}(t)] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = n+1, n+2, \dots \quad (3.5)$$

Поэтому

$$\frac{1}{k!} g^{k/m}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} Q^{(m)}(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Величины $Q^{(m)}(n, k)$ будем называть также Q -функциями, рассматривая их как функции коэффициентов ряда (1.1). Причина введения Q -функций заключается в том, что, как будет показано ниже, множество величин

$$Q^{(m)}(n, k), \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = n+1, n+2, \dots,$$

образует квазиортогональ (термин введен в [14]) к множеству P -функций, определенных в §1.

Лемма 3.1. *Имеют место равенства*

$$\sum_{i=k}^n P^{(m)}(n, i) Q^{(m)}(i, k) = \delta_{nk}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

где величины $P^{(m)}(n, i)$ определены формулами (1.2), а функции $Q^{(m)}(i, k)$ равенствами (3.3).

Доказательство. В случае $k = n$ (3.7) следует из (1.3) и (3.4). Рассмотрим теперь сумму

$$\Sigma_{nk} = \sum_{i=k}^n P^{(m)}(n, i) Q^{(m)}(i, k)$$

из левой части (3.7) при фиксированных $n = 2, 3, \dots$, $k = 1, \dots, n-1$. Учитывая (1.2) и (3.3), перепишем ее следующим образом:

$$\Sigma_{nk} = \frac{(n-1)!}{k!} \sum_{i=k}^n i \operatorname{Coef}_{t^i} [g^{k/m}(t)] \operatorname{Coef}_{t^{-i}} [g^{-n/m}(t)], \quad (3.8)$$

где $g^{-n/m}(t)$ — ряд Лорана над полем K . Из (3.8) находим, что

$$\begin{aligned} \Sigma_{nk} &= \frac{(n-1)!}{k!} \sum_{i=k}^n \operatorname{Coef}_{t^{i-1}} \left[\frac{d}{dt} g^{k/m}(t) \right] \operatorname{Coef}_{t^{-i}} [g^{-n/m}(t)] \\ &= \frac{(n-1)!}{m(k-1)!} \sum_{i=k}^n \operatorname{Coef}_{t^{i-1}} \left[g^{k/m-1}(t) \frac{d}{dt} g(t) \right] \operatorname{Coef}_{t^{-i}} [g^{-n/m}(t)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Заметим, что

$$\operatorname{Coef}_{t^{-1}} \left[g^{(k-n)/m-1}(t) \frac{d}{dt} g(t) \right] = \sum_{i=k}^n \operatorname{Coef}_{t^{i-1}} \left[g^{k/m-1}(t) \frac{d}{dt} g(t) \right] \operatorname{Coef}_{t^{-i}} [g^{-k/m}(t)], \quad (3.10)$$

так как согласно (1.1) и (1.2)

$$\operatorname{Coef}_{t^{-i}} [g^{-n/m}(t)] = 0,$$

если $i > n$, и

$$\operatorname{Coef}_{t^{i-1}} \left[g^{k/m-1}(t) \frac{d}{dt} g(t) \right] = 0,$$

если $i < k$. Из (3.9) и (3.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} \Sigma_{nk} &= \frac{(n-1)!}{m(k-1)!} \operatorname{Coef}_{t^{-1}} \left[g^{(k-n)/m-1}(t) \frac{d}{dt} g(t) \right] \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-n)(k-1)!} \operatorname{Coef}_{t^{-1}} \left[\frac{d}{dt} g^{(k-n)/m}(t) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

поскольку $k < n$ и коэффициент при t^{-1} в ряде Лорана над полем K равен нулю тогда и только тогда, когда этот ряд является производной некоторого другого ряда Лорана. Из (3.11) вытекает, что утверждение леммы выполняется для всех рассматриваемых значений n и k .

Получим еще одно представление для P -функций, аналогичное формуле (3.3) для Q -функций. При этом нам потребуются две бесконечные нижние треугольные матрицы

$$P^{(m)} = \|P^{(m)}(n, k)\|, \quad Q^{(m)} = \|Q^{(m)}(n, k)\|, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

составленные из величин (1.2) и (3.3). При $k > n$ дополнительно полагаем $P^{(m)}(n, k) = 0$. Учитываем также (3.5), в соответствии с чем и $Q^{(m)}(n, k) = 0$, если $k > n$.

Теорема 3.1. Для величин $P^{(m)}(n, k)$ выполняются соотношения

$$P^{(m)}(n, k) = \frac{n!}{k!} \text{Coef}_{u^{n/m}}[\hat{g}^k(u)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

где $\hat{g}(u)$ — ряд (1.7).

Доказательство. В силу определения $\hat{g}(u)$

$$g(\hat{g}(u)) = u, \quad \hat{g}(g(t)) = t.$$

Из первого из этих равенств находим, что

$$g^{k/m}(\hat{g}(u)) = u^{k/m}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно,

$$\text{Coef}_{u^{n/m}}[g^{k/m}(\hat{g}(u))] = \delta_{nk}, \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Подставляя в правую часть (3.6) вместо t разложение (1.7) функции $\hat{g}(u)$, получаем, что

$$\begin{aligned} g^{k/m}(\hat{g}(u)) &= \sum_{i=k}^{\infty} k! Q^{(m)}(i, k) \sum_{n=i}^{\infty} g_{ni} \frac{u^{n/m}}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{n/m} \sum_{i=k}^{\infty} k! Q^{(m)}(i, k) g_{ni}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$g_{ni} = \frac{n!}{i!} \text{Coef}_{u^{n/m}}[\hat{g}^i(u)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что

$$\sum_{i=k}^n g_{ni} Q^{(m)}(i, k) = \delta_{nk}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Составим из величин (3.15) бесконечную нижнюю треугольную матрицу

$$G^{(m)} = \|g_{nk}\|, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

полагая дополнительно $g_{nk} = 0$, если $k > n$. Тогда совокупность равенств (3.16) можно более компактно записать в матричном виде

$$G^{(m)} Q^{(m)} = E, \quad (3.17)$$

где E — бесконечная единичная матрица. С другой стороны, из леммы 3.1 вытекает матричное равенство

$$P^{(m)} Q^{(m)} = E. \quad (3.18)$$

Равенство (3.18) свидетельствует о том, что величины $P^{(m)}(n, k)$ удовлетворяют уравнениям (3.16). Более того, в силу единственности матрицы, обратной к $Q^{(m)}$,

из (3.17) и (3.18) следует, что $G^{(m)} = P^{(m)}$. Другими словами, система (3.16) других решений кроме

$$g_{nk} = P^{(m)}(n, k), \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n,$$

не имеет. Отсюда и из (3.15) вытекает справедливость теоремы.

Следствие 3.1. Множества P - и Q -функций

$$\{P^{(m)}(n, k)\}, \quad \{Q^{(m)}(n, k)\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n,$$

квазиортогональны.

Доказательство. Квазиортогональность множеств P - и Q -функций означает, что выполняются равенства (3.7) и

$$\sum_{i=k}^n Q^{(m)}(n, i) P^{(m)}(i, k) = \delta_{nk}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

Из (3.18) получаем матричное равенство $Q^{(m)} P^{(m)} = E$, которое по определению матриц $P^{(m)}$ и $Q^{(m)}$ означает справедливость соотношений (3.19). Отсюда и из леммы 3.1 вытекает утверждение следствия.

Равенства (3.7) и (3.19) представляют собой обобщение на случай произвольного $m \geq 1$ в (1.1) равенств (1.11).

Следствие 3.2. Пусть даны две последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов поля K . Если эти последовательности таковы, что

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k Q^{(m)}(n, k), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.20)$$

то

$$a_n = \sum_{k=1}^n b_k P^{(m)}(n, k), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (3.21)$$

Обратно, если выполняются равенства (3.21), то имеют место и равенства (3.20)

Соотношения (3.20) и (3.21) определяют взаимно обратную пару (см. [6, 14]), которая соответствует соотношениям квазиортогональности (3.7), (3.19), связывающим P - и Q -функции

Из теоремы 3.1 вытекает еще одно простое следствие, другое доказательство которого приведено в [1].

Следствие 3.3. В алгебре $K[t]$ имеет место разложение

$$\exp\{x\hat{g}(t)\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P^{(m)}(n, k) x^k \frac{t^n}{n!}, \quad x \in K,$$

а для величин $P^{(m)}(n, k)$ выполняются тождества

$$P^{(m)}(n, k) = A(n, k; P^{(m)}(1, 1), \dots, P^{(m)}(n - k + 1, 1)), \\ n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.22)$$

где $A(n, k; g_1, \dots, g_{n-k+1})$ — частные полиномы Белла.

Доказательство теоремы 1.1. В заключение этого параграфа дадим прямое доказательство теоремы 1.1, отличное от приведенного в [1]. Доказательство этой теоремы в [1] основано на сведении к случаю $m = 1$.

Учитывая (3.12) и определение ряда $f(t)$ (см. §1), имеем

$$F(u) = f(\hat{g}(u)) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k!}{n!} P^{(m)}(n, k) u^{n/m} \\ = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_k P^{(m)}(n, k) \frac{u^{n/m}}{n!},$$

откуда получаем (1.10). Далее, принимая во внимание (1.2), из (1.10) получим (1.9). Теорема 1.1 доказана.

Список литературы

1. Селиванов Б. И. Комбинаторный подход к формуле обращения Бюрмана-Лагранжа. *Комбинаторный и асимптотический анализ*. Красноярский ГУ, Красноярск, 1977, 153–179.
2. Платонов М. Л. Обращение формулы Бруно. *Исследования по геомагнетизму, астрономии и физике солнца*. Наука, Москва, 1975, **35**, 32–38.
3. Платонов М. Л. *Комбинаторные числа класса отображений и их приложения*. Наука, Москва, 1979.
4. Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В., Платонов М. Л. *Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений*. Иркутский ГУ, Иркутск, 1990.
5. Островский А. М. *Решение уравнений и систем уравнений*. ИЛ, Москва, 1963.
6. Риордан Дж. *Комбинаторные тождества*. Наука, Москва, 1982.
7. Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций*. Наука, Москва, 1968.
8. Henrici P. An algebraic proof of the Lagrange–Bürman formula. *J. Math. Anal. and Appl.* (1964) **8**, №2, 218–224.
9. Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика*. Наука, Москва, 1990.
10. Raney G. Functional composition patterns and power series reversion. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1960) **94**, №3, 441–451.
11. Bender E. A. A lifting theorem for formal power series. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1974) **42**, №1, 16–22.

12. Висков О. В. Некоммутативный подход к классическим задачам анализа. *Вероятностные задачи дискретной математики. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР* (1986) 177, 21–32.
13. Жуков В. Д. Формула общего члена асимптотического разложения гамма-функции. *Исследования по геомагнетизму, астрономии и физике солнца*. Наука, Москва, 1980, 51, 196–198.
14. Коганов Л. М. *Псевдопорождаемые двухиндексные последовательности*. Недра, Москва, 1989.
15. Comtet L. Polynomes de Bell et formule explicite des derives successive d'une fonction implicite. *C. R. Acad. Sci. Paris, ser. A* (1968) 261, №14, 457–460.
16. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Физматгиз, Москва, 1962.
17. Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика*. Мир, Москва, 1990.
18. Gould H. W. Coefficient identities for power of Taylor and Dirichlet series. *Amer. Math. Monthly* (1974) 81, №1, 3–14.

Статья поступила 05.05.97.