Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Шевченко, А. А. Павлюченко, Асимптотика перманентов некоторых $(0, 1)$ -матриц, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 1, 82–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 07:23:47

УДК 519.1

Асимптотика перманентов некоторых $(0, 1)$ -матриц

© 1998 г. В. Н. Шевченко, А. А. Павлюченко

Пусть B_{nm} — матрица, столбцами которой являются все различные булевы векторы длины n , каждый из которых содержит ровно m единиц. Исследуется асимптотика перманентов матриц $A(i_1, \dots, i_k; n)$, которые составлены из i_1 экземпляров матрицы B_{n1} , i_2 экземпляров матрицы B_{n2} и так далее, и наконец, из i_k экземпляров матрицы B_{nk} . Доказано, что $\text{per } A(i_1, \dots, i_k; n)$ при $n \rightarrow \infty$ есть величина порядка S_1^n , где

$$S_1 = S(i_1, \dots, i_k; n) = \sum_{m=1}^k i_m \binom{n-1}{m-1}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93-01-00491.

Обозначим B_{nm} матрицу, столбцами которой являются все различные булевы векторы длины n , каждый из которых содержит ровно m единиц, а $A(i_1, \dots, i_k; n)$ матрицу, которая составлена из i_1 экземпляров матрицы B_{n1} , i_2 экземпляров матрицы B_{n2} и так далее, и наконец, из i_k экземпляров матрицы B_{nk} . В статье изучается асимптотика перманентов матриц $A(i_1, \dots, i_k; n)$. Доказано, что $\text{per } A(i_1, \dots, i_k; n)$ при $n \rightarrow \infty$ есть величина порядка S_1^n , где

$$S_1 = S(i_1, \dots, i_k; n) = \sum_{m=1}^k i_m \binom{n-1}{m-1}$$

есть число единиц в каждой из строк матрицы $A(i_1, \dots, i_k; n)$. Заметим, что $A(i_1, \dots, i_k; n) = A(i_1, \dots, i_k, 0; n)$. Приводятся значения коэффициентов пропорциональности в зависимости от k и $i_1, \dots, i_k$.

Отметим, что частный случай этой задачи, при $k = 2$ и $i_2 = 1$, был рассмотрен в [1].

В статье доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Если $k = 1$, то

$$\frac{\text{per } A(i_1; n)}{(S_1(i_1; n))^n} = 1.$$

Если $k = 2$, $i_1/n \rightarrow \mu$ и i_2 фиксировано, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{per } A(i_1, i_2; n)}{(S_1(i_1, i_2; n))^n} = \exp \left\{ \frac{i_2}{2(\mu + i_2)^2} \right\},$$

во всех остальных случаях этот предел равен единице.

Если $k \geq 3$, то

$$\lim \frac{\text{per } A(i_1, \dots, i_k; n)}{(S_1(i_1, \dots, i_k; n))^n} = 1.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $k = 1$

$$\text{per } A(i_1; n) = (S_1(i_1; n))^n = i_1^2.$$

При $k > 3$ утверждение теоремы следует из известного (см., например, [2]) неравенства Холла для перманентов, которое в данном случае имеет вид

$$S_1(S_1 - 1) \dots (S_1 - n + 1) \leq \text{per } A(i_1, \dots, i_k; n) \leq S_1^n. \quad (1)$$

Действительно, разделив обе части этого неравенства на S_1^n и учитывая, что

$$\frac{S_1(S_1 - 1) \dots (S_1 - n + 1)}{S_1^n} \geq \left(1 - \frac{n-1}{S_1}\right)^{n-1},$$

получаем неравенство

$$\left(1 - \frac{n-1}{S_1}\right)^{n-1} \leq \frac{\text{per } A(i_1, \dots, i_k; n)}{S_1^n} \leq 1.$$

Поскольку при $k > 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n-1}{S_1}\right)^{n-1} = 1,$$

в этом случае

$$\lim \frac{\text{per } A(i_1, \dots, i_k; n)}{(S_1(i_1, \dots, i_k; n))^n} = 1.$$

Случаи $k = 2$ и $k = 3$ требуют отдельного рассмотрения, так как существуют такие значения параметров i_1, i_2, i_3 , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n-1}{S_1}\right)^{n-1} < 1,$$

и существование искомого предела не следует из (1).

В [3] доказано, что $\text{per } A(i_1, \dots, i_k; n)$ совпадает с i -м членом рекуррентной последовательности, определяемой соотношением

$$C_m = S_1 C_{m-1} - (m-1) S_2 C_{m-2} + \dots + (-1)^{k-1} (m-1) \dots (m-k+1) S_k C_{m-k}, \quad (2)$$

где

$$S_j = S_j(i_1, \dots, i_k; n) = \sum_{\nu=1}^k i_\nu \binom{n-j}{\nu-j}$$

и $C_0, C_1, \dots, C_{k-1}$ легко вычисляются. В частности, при $k = 3$

$$C_m = S_1 C_{m-1} - (m-1) S_2 C_{m-2} + (m-1)(m_2) S_3 C_{m-3}$$

и $C_0 = 1, C_1 = S_1, C_2 = S_1^2 - S_2$.

Положим $D_m = C_m/S_1^m$. Нетрудно видеть, что

$$D_n = \frac{\text{per } A(i_1, \dots, i_k; n)}{S_1^n}$$

и D_m при $k = 3$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$D_m = D_{m-1} - (m-1) \frac{S_2}{S_1^2} D_{m-2} + (m-1)(m-2) \frac{S_3}{S_1^3} D_{m-3},$$

где $D_0 = D_1 = 1$ и $D_2 = 1 - S_2/S_1^2$.

Поскольку при $m \rightarrow \infty$

$$(m-1)(m-2) \frac{S_3}{S_1^3} = o(mS_2/S_1^2),$$

при достаточно больших m справедливы неравенства

$$D_{m-1} - (m-1) \frac{S_2}{S_1^2} D_{m-2} \leq D_m \leq D_{m-1} \leq 1.$$

Положим

$$1 - \varepsilon_m = D_{m-1} - (m-1) \frac{S_2}{S_1^2} D_{m-2}.$$

В свою очередь,

$$D_{m-1} - (m-1) \frac{S_2}{S_1^2} D_{m-2} \geq 1 - \varepsilon_{m-1} - (m-1) \frac{S_2}{S_1^2}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m-1} + (m-1) \frac{S_2}{S_1^2}.$$

Учитывая, что $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\leq \frac{S_2}{S_1^2} \sum_{m=1}^n (m-1) = \frac{(n-1)(n-2)S_2}{2S_1^2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(i_2 + (n-2)i_3)}{2(i_1 + (n-1)i_2 + (n-1)(n-2)i_3/2)^2}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что с ростом n эта величина стремится к нулю при любых значениях параметров i_1, i_2, i_3 , где $i_3 \neq 0$. Поскольку $1 - \varepsilon_n \leq D_n \leq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 1.$$

Заметим, что формула (2) может служить основанием для нахождения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{per } A(i_1, \dots, i_k; n)}{(S_1(i_1, \dots, i_k; n))^n}$$

при любом $k > 3$.

Если же $i_3 = 0$, что соответствует случаю $k = 2$, то $\varepsilon \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ за исключением того случая, когда i_2 фиксировано и i_1 есть величина порядка не выше n .

Докажем утверждение теоремы в этом последнем случае. Для матрицы $A(i_1, i_2; n)$ формула Бине–Минка [3] после несложных преобразований записывается в виде

$$\text{per } A(i_1, i_2; n) = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j (2j-1)!! \binom{n}{2j} S_1^{n-2j} S_2^j,$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= i_1 + (n-1)i_2, & S_2 &= i_2, \\ (2j-1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2j-1), & (-1)!! &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\text{per } A(i_1, i_2; n)}{S_1^n} = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \frac{n(n-1) \dots (n-2j+1) i_2^j}{j! 2^j (i_1 + (n-1)i_2)^{2j}}.$$

Пусть $n \rightarrow \infty$ и i_1 меняется так, что $i_1/n \rightarrow \mu$, где μ — некоторая постоянная. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\text{per } A(i_1, i_2; n)}{S_1^n} - \exp \left\{ -\frac{i_2}{2(\mu + i_2)^2} \right\} \right| \\ & < \left| \sum_{j=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^j i_2^j}{j! 2^j (\mu + i_2)^{2j}} \left(\frac{n(n-1) \dots (n-2j+1)}{(n-1)^{2j}} - 1 \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j=[n/2]+1}^{\infty} \frac{(-1)^j i_2^j}{j! 2^j (\mu + i_2)^{2j}} \right|. \end{aligned}$$

Второе слагаемое с ростом n стремится к нулю, так как является остатком сходящегося ряда. Поскольку

$$\frac{n(n-1) \dots (n-2j+1)}{(n-1)^{2j}} - 1 < 1,$$

в первом слагаемом знакопеременная сумма имеет убывающие по модулю слагаемые и, следовательно, ее модуль меньше модуля первого слагаемого по признаку Лейбница, примененному к конечным суммам. Отсюда

$$\left| \sum_{j=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^j i_2^j}{j! 2^j (\mu + i_2)^{2j}} \left(\frac{n(n-1) \dots (n-2j+1)}{(n-1)^{2j}} - 1 \right) \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{n}{n-1} - 1 \right|.$$

Очевидно, что последнее выражение с ростом n стремится к нулю.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Шевченко В. Н., Ильичев А. П., О перманентах и детерминантах квадратных подматриц матриц инцидентий однородных гиперграфов. *Перманенты: теория и приложения*. Красноярский политехнический институт, Красноярск, 1990, с. 126–135.
2. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
3. Ильичев А. П., Коган Г. П., Шевченко В. Н., Полиномиальные алгоритмы вычисления перманентов некоторых матриц. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 96–100.

Статья поступила 17.11.1995.

Переработанный вариант поступил 11.11.1997.