Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Шоломов, Операторы над отношениями, сохраняющие транзитивность, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 1, 28–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 05:01:29

Операторы над отношениями, сохраняющие транзитивность

© 1998 г. Л. А. Шоломов

Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(A)$ — класс всех транзитивных отношений на конечном множестве A . Оператор $r = F(r_1, \dots, r_n)$ на множестве отношений сохраняет транзитивность, если

$$r_1, \dots, r_n \in \mathcal{T} \Rightarrow r \in \mathcal{T}.$$

Введем операторы $\tau_n^{(u)}(r_1, \dots, r_n)$, $u = 0, 1$, $n \geq 0$, положив $\tau_0^{(0)} = \emptyset$, $\tau_0^{(1)} = A^2$,

$$\tau_n^{(u)} = r_1 \cap (\overline{(r_1^{-1})}) \cup \tau_{n-1}^{(u)}(r_2, \dots, r_n), \quad n \geq 1.$$

Назовем τ -оператором всякий оператор, полученный из $\tau_n^{(u)}$ заменой некоторых r_i , $1 \leq i \leq n$, на r_i^{-1} . Показано, что оператор F , выражимый через теоретико-множественные операции и обращение отношений, сохраняет транзитивность тогда и только тогда, когда оператор F представим в виде пересечения τ -операторов.

1. Введение

Рассматриваются бинарные отношения $r \subseteq A^2$ на конечном множестве A . Теоретико-множественные (т.-м.) операции над отношениями (в частности, $r_1 \cap r_2$, $r_1 \cup r_2$, $\bar{r} = A^2 \setminus r$) и обратное к r отношение r^{-1} определяются обычным образом. Будем иметь дело с операторами $F(r_1, \dots, r_n)$ на множестве отношений, выражимыми через т.-м. операции и операцию обращения отношений. Поскольку обращение перестановочно с т.-м. операциями, эти операторы представимы в виде

$$F(r_1, \dots, r_n) = \Phi(r_1, \dots, r_n, r_1^{-1}, \dots, r_n^{-1}), \quad (1)$$

где Φ — т.-м. операция.

Отношение r называется транзитивным, если

$$xry \wedge yrz \Rightarrow xrz.$$

Множество всех транзитивных отношений на A обозначим через $\mathcal{T} = \mathcal{T}(A)$. Будем говорить, что оператор F сохраняет транзитивность (является с.т.-оператором), если

$$r_1, \dots, r_n \in \mathcal{T} \Rightarrow F(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{T}.$$

Простейшими примерами с.т.-операторов являются $r_1 \cap r_2$, r^{-1} и нульарные операторы 0 и 1, дающие отношения $\emptyset$ и A^2 соответственно. Примером более сложного с.т.-оператора может служить

$$\tau_2(r_1, r_2) = r_1 \cap \overline{(r_1^{-1})} \cup r_1 \cap r_2.$$

Целью работы является описание в явном виде всех с.т.-операторов.

Подобные задачи описания операторов, переводящих отношения класса $\mathcal{R}_1$ в отношения класса $\mathcal{R}_2$, могут быть поставлены и для других $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$. Помимо того, что такие задачи представляют интерес для теории отношений, они играют важную роль в теории коллективного выбора [1], где ставятся как задачи синтеза операторов, агрегирующих индивидуальные предпочтения участников некоторого коллектива (описываемые отношениями класса $\mathcal{R}_1$) в коллективное предпочтение (из класса $\mathcal{R}_2$). Исследования в этой области иницированы известной теоремой Эрроу [2,3]. Явный вид операторов для разных классов $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ найден в [1, 4–9]. Наиболее полные результаты приведены в [9]. Все предыдущие исследования относились к случаю, когда отношения класса $\mathcal{R}_1$ антисимметричны. Транзитивные отношения этому условию не удовлетворяют и требуют особого подхода.

Подход, используемый в данной работе состоит в следующем. На множестве операторов над отношениями вводится операция композиции $F \circ G$ и доказывается, что с.т.-операторы замкнуты относительно композиции, то есть удовлетворяют условию $F \circ F = F$. Далее находится явный вид замкнутых операторов и устанавливается, что все они являются с.т.-операторами.

Полученное описание с.т.-операторов использует некоторые специальные операторы, названные в работе транзитивными лексикографиями. Из этого описания, в частности, следует, что все с.т.-операторы (и только они) могут быть получены суперпозицией операторов системы $\{0, 1, {}^{(-1)}, \cap, \tau_2\}$. Для произвольных операторов F указан способ построения ближайшего к F с.т.-оператора G , $F \subseteq G$.

2. Операторы транзитивной лексикографии

Двойственным к r назовем отношение $r^* = \overline{(r^{-1})} = A^2 \setminus r^{-1}$. Введем операторы $\tau_n^{(u)}(r_1, \dots, r_n)$, $u = 0, 1$, $n \geq 0$, положив $\tau_0^{(0)} = 0$, $\tau_0^{(1)} = 1$,

$$\tau_n^{(u)}(r_1, \dots, r_n) = r_1 \cap (r_1^* \cup \tau_{n-1}^{(u)}(r_2, \dots, r_n)), \quad n \geq 1.$$

Легко получить их явное представление при $n \geq 1$:

$$\tau_n^{(0)}(r_1, \dots, r_n) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \left(r_i^* \cap \bigcap_{1 \leq j \leq i} r_j \right), \quad (2)$$

$$\tau_n^{(1)}(r_1, \dots, r_n) = \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} \left(r_i^* \cap \bigcap_{1 \leq j \leq i} r_j \right) \cup \bigcap_{1 \leq j \leq n} r_j. \quad (3)$$

Операторы $\tau_n^{(u)}$ будем называть транзитивными лексикографиями (т.л.), а операторы

$$\hat{\tau}_n^{(u)}(r_1, \dots, r_n) = \tau_n^{(u)}(r_1^{\alpha_1}, \dots, r_n^{\alpha_n}),$$

где $\alpha_i \in \{1, -1\}$, $r^1 = r$, обобщенными т.л. Операторы обобщенной т.л. будем также кратко называть τ -операторами.

Лемма 1. τ -операторы сохраняют транзитивность.

Доказательство. Доказательство разобьем на ряд утверждений.

(а) Оператор $\tau_1^{(0)}$ сохраняет транзитивность. Пусть $r \in \mathcal{T}$ и $(x, y), (y, z) \in \tau_1^{(0)}(r) = r \cap r^*$. Так как $r \cap r^* = r \cap (r^{-1})$, имеет место соотношение

$$xry \wedge y\bar{r}x \wedge ytz \wedge z\bar{r}y$$

(записи xry и $x\bar{r}y$ используются вместо $(x, y) \in r$ и $(x, y) \notin r$). Отсюда и из $r \in \mathcal{T}$ получаем, что xrz . Допущение zrx дает с учетом того, что $r \in \mathcal{T}$ и ytz , соотношение $y\bar{r}x$, противоречащее $y\bar{r}x$. Поэтому $z\bar{r}x$, что в сочетании с xrz дает соотношение $(x, z) \in r \cap r^*$.

(б) Оператор $\tau_2^{(1)}$ сохраняет транзитивность. Пусть $r_1, r_2 \in \mathcal{T}$ и $r = \tau_2^{(1)}(r_1, r_2) = r_1 \cap r_1^* \cup r_1 \cap r_2$. Рассмотрим произвольные $(x, y), (y, z) \in r$. Если $(x, y), (y, z) \in r_1 \cap r_1^*$, то $(x, z) \in r_1 \cap r_1^* \subseteq r$ в силу (а). При $(x, y), (y, z) \in r_1 \cap r_2$ справедливо включение $(x, z) \in r_1 \cap r_2 \subseteq r$, поскольку $r_1 \cap r_2 \in \mathcal{T}$. В случае $(x, y) \in r_1 \cap r_1^*, (y, z) \in r_1 \cap r_2$ справедливы соотношения xr_1y и yr_1z , откуда xr_1z . Если предположить, что zr_1x , то из yr_1z будет следовать, что yr_1x , что противоречит соотношению xr_1^*y . Соотношения xr_1z и $z\bar{r}_1x$ означают, что $(x, y) \in r_1 \cap r_1^* \subseteq r$. Оставшийся случай $(x, y) \in r_1 \cap r_2, (y, z) \in r_1 \cap r_1^*$ сводится к предыдущему заменой $r_1, r_2 \in \mathcal{T}$ отношениями $r_1^{-1}, r_2^{-1} \in \mathcal{T}$.

(в) Операторы $\tau_n^{(1)}$, $n \geq 3$, сохраняют транзитивность. Это утверждение следует из (б) и равенства

$$\tau_n^{(1)}(r_1, \dots, r_n) = \tau_2^{(1)}(r_1, \tau_2^{(1)}(r_2, \dots, \tau_2^{(1)}(r_{n-2}, \tau_2^{(1)}(r_{n-1}, r_n)) \dots)). \quad (4)$$

(г) Операторы $\tau_n^{(0)}$, $n \geq 2$, сохраняют транзитивность. Это утверждение вытекает из (а)–(в) и соотношения

$$\tau_n^{(0)}(r_1, \dots, r_n) = \tau_n^{(1)}(r_1, \dots, r_{n-1}, r_n \cap r_n^*). \quad (5)$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что операторы $\tau_0^{(0)}$, $\tau_0^{(1)}$ и $\tau_1^{(1)}$ сохраняют транзитивность очевидным образом и что обобщенные т.л. получаются из т.л. обращением некоторых отношений, а обращение не нарушает транзитивности.

Лемма доказана.

3. Логическое представление операторов

Отношение r можно понимать как двуместный предикат $r(x, y) = xry$, поэтому наряду с т.-м. записями $r_1 \cap r_2$, $r_1 \cup r_2$ и другими будем использовать логические записи $r_1 \wedge r_2$, $r_1 \vee r_2$ и другие, а оператор (1) будем записывать также в виде

$$F(r_1, \dots, r_n) = \varphi(r_1, \dots, r_n, r_1^{-1}, \dots, r_n^{-1}), \quad (6)$$

где φ — булева функция, соответствующая т.-м. операции Φ . Оператору (2), например, соответствует логическая запись

$$\tau_n^{(0)}(r_1, \dots, r_n) = r_1 r_1^* \vee r_1 r_2 r_2^* \vee \dots \vee r_1 \dots r_{n-1} r_n r_n^*$$

(знак $\wedge$ конъюнкции опущен).

Представим булеву функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ из (6) посредством формулы в базисе $\{\vee, \wedge, ^-\}$, в которой отрицания применяются лишь к элементарным переменным, и исключим в этом представлении отрицания путем замены $\bar{r}_i = (r_i^{-1})^*$, $\overline{r_i^{-1}} = r_i^*$. В результате формула (6) преобразуется к виду

$$F(r_1, \dots, r_n) = \psi, \quad (7)$$

где ψ — формула в базисе $\{\vee, \wedge\}$, содержащая вхождения переменных из множества

$$\{r_1, \dots, r_n, r_1^{-1}, \dots, r_n^{-1}, r_1^*, \dots, r_n^*, (r_1^{-1})^*, \dots, (r_n^{-1})^*\}. \quad (8)$$

Будем считать, что отношения заданы на множестве $A = \{1, \dots, m\}$. Сечением отношения r по паре (s, t) , $1 \leq s \leq t \leq m$, назовем множество $(r)_{st} = r \cap \{(s, t), (t, s)\}$. Припишем сечению одно из значений 0, 1, +, −, положив

$$r_{st} = \begin{cases} 0, & \text{если } (r)_{st} = \emptyset, \\ +, & \text{если } (s, t) \in (r)_{st}, (t, s) \notin (r)_{st}, \\ -, & \text{если } (s, t) \notin (r)_{st}, (t, s) \in (r)_{st}, \\ 1, & \text{если } (r)_{st} = \{(s, t), (t, s)\}. \end{cases}$$

В частности, при $t = s$ значениями сечения могут быть лишь 0 и 1.

Оператор $r = F(r_1, \dots, r_n)$ вида (7) отображает для каждой пары (s, t) , $s \leq t$, набор сечений $(r_1)_{st}, \dots, (r_n)_{st}$ в сечение $(r)_{st}$. Можно считать, что формула ψ в (7) реализует функцию

$$f: \{0, +, -, 1\}^n \rightarrow \{0, +, -, 1\}$$

4-значной логики от переменных $r_1, \dots, r_n$. При этом унарные операции $(^{-1})$ и $(^*)$, присутствующие в ψ (см. (8)), выполняются по правилам

$$0^{-1} = 0, +^{-1} = -, -^{-1} = +, 1^{-1} = 1, 0^* = 1, +^* = +, -^* = -, 1^* = 0,$$

а бинарные операции $\vee$ и $\wedge$ (дизъюнкции и конъюнкции) симметричны и задаются равенствами

$$\begin{aligned} \alpha \vee \alpha &= \alpha \wedge \alpha = 0 \vee \alpha = 1 \wedge \alpha = \alpha, \\ 1 \vee \alpha &= 1, \quad 0 \wedge \alpha = 0, \\ + \vee - &= 1, \quad + \wedge - = 0, \end{aligned}$$

где $\alpha \in \{0, +, -, 1\}$ произвольно. Далее оператор F и однозначно соответствующую ему функцию f различать не будем.

Таблица 1.

q_i	r_i	$r_i r_i^*$	r_i^{-1}	q'_i $r_i^{-1}(r_i^{-1})^*$	$r_i r_i^{-1}$	остальные
r_i	r_i	$r_i r_i^*$	1	1	r_i	1
$r_i r_i^*$	$r_i r_i^*$	$r_i r_i^*$	1	1	$r_i r_i^*$	1
r_i^{-1}	1	1	r_i^{-1}	$r_i^{-1}(r_i^{-1})^*$	r_i^{-1}	1
$r_i^{-1}(r_i^{-1})^*$	1	1	$r_i^{-1}(r_i^{-1})^*$	$r_i^{-1}(r_i^{-1})^*$	$r_i^{-1}(r_i^{-1})^*$	1
$r_i r_i^{-1}$	r_i	$r_i r_i^*$	r_i^{-1}	$r_i^{-1}(r_i^{-1})^*$	$r_i r_i^{-1}$	1
остальные	1	1	1	1	1	1

4. Композиция операторов

Конъюнкцию K некоторых элементов из (8) будем записывать в виде $K = q_1 \dots q_n$, где q_i , $i = 1, \dots, n$, называется элементарным сомножителем и представляет собой конъюнкцию всех входящих в K элементов множества

$$\{r_i, r_i^{-1}, r_i^*, (r_i^{-1})^*\}.$$

Если таких элементов нет, считаем $q_i = 1$. Допускается пустая конъюнкция K , тождественно равная 1. Поскольку $r_i(r_i^{-1})^* = 0$, $r_i^{-1}r_i^* = 0$, можно считать, что элементарный сомножитель q_i имеет один из типов: (а) r_i , (б) r_i^{-1} , (в) $r_i r_i^{-1}$, (г) r_i^* , (д) $(r_i^{-1})^*$, (е) $r_i^*(r_i^{-1})^*$, (ж) $r_i r_i^*$, (и) $r_i^{-1}(r_i^{-1})^*$, (к) 1.

Дизъюнкция $\varphi = K_1 \vee \dots \vee K_s$ некоторых конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф.). Если $\varphi(r_1, \dots, r_n)$ и $\psi(r_1, \dots, r_n)$ — формулы, то записи $\varphi = \psi$ и $\varphi \geq \psi$ будут означать, что для любого набора $\tilde{\alpha} \in \{0, +, -, 1\}^n$ выполнено $\varphi(\tilde{\alpha}) = \psi(\tilde{\alpha})$ и $\varphi(\tilde{\alpha}) \geq \psi(\tilde{\alpha})$ соответственно, где считается, что $1 > + > 0$, $1 > - > 0$. Если $K_1 \geq K_2$, то $K_1 \vee K_2 = K_1$ и будем говорить, что конъюнкция K_1 поглощает K_2 . Удаление поглощаемых конъюнкций из д.н.ф. будем называть приведением. Д.н.ф., к которой эта операция не применима, называется приведенной.

Введем бинарную операцию композиции $\circ$ вначале для элементарных сомножителей, затем для конъюнкций и для д.н.ф. Результат $q_i \circ q'_i$ композиции элементарных сомножителей q_i и q'_i задается таблицей 1, где к “остальным” относятся сомножители r_i^* , $(r_i^{-1})^*$, $r_i^*(r_i^{-1})^*$ и 1. Для конъюнкций $K = q_1 \dots q_n$ и $K' = q'_1 \dots q'_n$ определим композицию, полагая

$$K \circ K' = (q_1 \circ q'_1) \dots (q_n \circ q'_n),$$

а для д.н.ф. $\varphi = K_1 \vee \dots \vee K_s$ и $\psi = K'_1 \vee \dots \vee K'_n$ положим

$$\varphi \circ \psi = \bigvee_{1 \leq u \leq s, 1 \leq v \leq t} K_u \circ K'_v. \quad (9)$$

Конъюнкции K сопоставим конъюнкцию $K^\#$, полученную из нее заменой всех элементарных сомножителей типов (г)–(е) на 1. Для д.н.ф. $\varphi = K_1 \vee \dots \vee K_s$ положим

$$\varphi^\# = K_1^\# \vee \dots \vee K_s^\#.$$

Будем называть $\#$ операцией редукции, а конъюнкцию $K^\#$ и д.н.ф. $\varphi^\#$ редуцированными.

Лемма 2. Для любых д.н.ф. $\varphi, \varphi', \varphi''$ и конъюнкций K, K', K'' имеют место соотношения

$$\varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi, \quad (10)$$

$$(\varphi \circ \varphi') \circ \varphi'' = \varphi \circ (\varphi' \circ \varphi''), \quad (11)$$

$$(\varphi' \vee \varphi'') \circ \varphi = \varphi' \circ \varphi \vee \varphi'' \circ \varphi, \quad (12)$$

$$\varphi \circ \varphi' = \varphi^\# \circ (\varphi')^\#, \quad (13)$$

$$K \leq K \circ K = K^\# \circ K^\# = K^\#, \quad (14)$$

$$K' \leq K'' \Rightarrow K' \circ K \leq K'' \circ K. \quad (15)$$

Доказательство. Соотношения (10), (11), (13)–(15) следуют из того, что аналогичные соотношения

$$\begin{aligned} q_i \circ q'_i &= q'_i \circ q_i, \\ (q_i \circ q'_i) \circ q''_i &= q_i \circ (q'_i \circ q''_i), \\ q_i \circ q'_i &= q_i^\# \circ (q'_i)^\#, \\ q_i \leq q_i \circ q_i &= q_i^\# \circ q_i^\# = q_i^\#, \\ q'_i \leq q''_i &\Rightarrow q'_i \circ q_i \leq q''_i \circ q_i \end{aligned}$$

имеют место для элементарных сомножителей, в чем можно убедиться непосредственно по таблице 1. Равенство (12) очевидно.

Лемма доказана.

Из (10) и (11) следует, что можно рассматривать многоместную коммутативную операцию $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k$.

5. Простая форма операторов

Элементарные сомножители типов (в), (ж)–(к) будем называть простыми. Конъюнкцию назовем простой, если все ее элементарные сомножители просты, а д.н.ф. назовем простой, если она состоит из простых конъюнкций и является приведенной.

Каждому простому сомножителю q_i поставим в соответствие значение $\sigma(q_i)$ из $\{0, +, -, 1\}$, положив

$$\sigma(q_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_i = 1, \\ +, & \text{если } q_i = r_i r_i^*, \\ -, & \text{если } q_i = r_i^{-1} (r_i^{-1})^*, \\ 1, & \text{если } q_i = r_i r_i^{-1}. \end{cases} \quad (16)$$

Это соответствие взаимно однозначно. Обозначим через $q_i(\sigma)$ сомножитель, соответствующий значению σ из $\{0, +, -, 1\}$. Простой конъюнкции $K = q_1 \dots q_n$ сопоставим набор

$$\tilde{\sigma}(K) = (\sigma(q_1), \dots, \sigma(q_n)),$$

а набору $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{0, +, -, 1\}^n$ сопоставим конъюнкцию

$$K_{\tilde{\sigma}} = q_1(\sigma_1) \dots q_n(\sigma_n).$$

Легко проверить, что $K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}) \geq +$ (через $K(\tilde{\sigma})$ обозначено значение конъюнкции K на наборе $\tilde{\sigma}$).

Лемма 3. Если K — произвольная конъюнкция и для некоторого $\tilde{\sigma} \in \{0, +, -, 1\}^n$ выполнено $K(\tilde{\sigma}) \geq +$, то $K^\# \geq K_{\tilde{\sigma}}$.

Доказательство. Пусть $K^\# = q_1 \dots q_n$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Поскольку $K^\# \geq K$, то $K^\#(\tilde{\sigma}) \geq +$. Можно проверить, что в этом случае

$$q_i \in \begin{cases} \{1\}, & \text{если } \sigma_i = 0, \\ \{r_i r_i^*, r_i, 1\}, & \text{если } \sigma_i = +, \\ \{r_i^{-1} (r_i^{-1})^*, r_i^{-1}, 1\}, & \text{если } \sigma_i = -, \\ \{r_i r_i^{-1}, 1\}, & \text{если } \sigma_i = 1. \end{cases}$$

Во всех случаях $q_i \geq q_i(\sigma_i)$, а потому $K^\# \geq K_{\tilde{\sigma}}$.

Лемма доказана.

Для наборов $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\tilde{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ из $\{0, +, -, 1\}^n$ положим

$$\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\tau} = (\sigma_1 \tau_1, \dots, \sigma_n \tau_n).$$

Лемма 4. Если K, K' — простые конъюнкции, то конъюнкция $K \circ K'$ является простой и $\tilde{\sigma}(K \circ K') = \tilde{\sigma}(K) \wedge \tilde{\sigma}(K')$.

Доказательство. По таблице можно убедиться, что если q_i и q'_i просты, то сомножитель $q_i \circ q'_i$ также является простым и $\sigma(q_i \circ q'_i) = \sigma(q_i) \sigma(q'_i)$. Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $K = q_1 \dots q_n$ — произвольная конъюнкция и при некотором i сомножитель q_i имеет тип (а) или (б), то есть может быть записан в виде $q_i = r_i^\alpha$, $\alpha \in \{-1, 1\}$. Положим

$$\begin{aligned} q_i^{(1)} &= r_i^\alpha (r_i^\alpha)^*, & q_i^{(2)} &= r_i^\alpha r_i^{-\alpha} = r_i r_i^{-1}, \\ K^{(u)} &= q_1 \dots q_{i-1} q_i^{(u)} q_{i+1} \dots q_n, & u &= 1, 2. \end{aligned}$$

Так как $(r_i^\alpha)^* \vee r_i^{-\alpha} = 1$, то $q_i = q_i^{(1)} \vee q_i^{(2)}$ и $K = K^{(1)} \vee K^{(2)}$. Такое представление назовем расщеплением по i -й переменной.

Если K содержит p элементарных сомножителей типа (а) или (б), то последовательным расщеплением можно представить K в виде дизъюнкции 2^p конъюнкций, не содержащих сомножителей типа (а) и (б). Такое представление будем называть полным расщеплением K и обозначать $(\vee K)$. Легко видеть, что операции полного расщепления и редукции перестановочны, то есть

$$(\vee K)^\# = (\vee K^\#). \quad (17)$$

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$K \circ K' = (\vee K) \circ (\vee K'). \quad (18)$$

Доказательство. Непосредственной проверкой по таблице можно убедиться, что для произвольных q'_i и $\alpha \in \{-1, 1\}$ имеет место равенство

$$r_i^\alpha \circ q'_i = (r_i^\alpha (r_i^\alpha)^* \circ q'_i) \vee (r_i^\alpha r_i^{-\alpha} \circ q'_i).$$

Отсюда с учетом (12) следует, что если $K = K^{(1)} \vee K^{(2)}$ — расщепление по i -й переменной, то для любой конъюнкции K'

$$K \circ K' = K^{(1)} \circ K' \vee K^{(2)} \circ K' = (K^{(1)} \vee K^{(2)}) \circ K'.$$

Многократное применение этого соотношения дает равенство $K \circ K' = (\vee K) \circ K'$. Воспользовавшись (10) и (9), получаем (18).

Лемма доказана.

Каждой д.н.ф. $\varphi = K_1 \vee \dots \vee K_s$ сопоставим простую д.н.ф. φ^0 , являющуюся результатом приведения д.н.ф. $((\vee K_1) \vee \dots \vee (\vee K_s))^\#$.

Лемма 6. *Для любых д.н.ф. φ_1 и φ_2 имеет место равенство $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_1^0 \circ \varphi_2^0$.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi_i = K_1^{(i)} \vee \dots \vee K_s^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

Положим $\varphi'_i = (\vee K_1^{(i)}) \vee \dots \vee (\vee K_s^{(i)})$, $\varphi''_i = (\varphi'_i)^\#$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2 &= \bigvee_{u,v} K_u^{(1)} \circ K_v^{(2)} = \bigvee_{u,v} (\vee K_u^{(1)}) \circ (\vee K_v^{(2)}) \\ &= \varphi'_1 \circ \varphi'_2 = (\varphi'_1)^\# \circ (\varphi'_2)^\# = \varphi''_1 \circ \varphi''_2. \end{aligned}$$

Если K' и K'' — конъюнкции из д.н.ф. φ'_1 и $K' \geq K''$, то для любой конъюнкции K из φ'_2 в соответствии с (15) имеет место соотношение $K' \circ K \geq K'' \circ K$ и конъюнкции $K'' \circ K$ для всех K могут быть устранены из $\varphi'_1 \circ \varphi'_2$. Это равносильно удалению K'' из φ'_1 и означает возможность замены φ'_1 приведенной д.н.ф. φ''_1 . То же верно для φ'_2 . В результате получаем, что $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi''_1 \circ \varphi''_2 = \varphi_1^0 \circ \varphi_2^0$.

6. Инвариантность операции композиции относительно представления операторов

Введем отношение частичного порядка $\succeq$ на множестве $\{0, +, -, 1\}^n$, положив

$$\bar{\sigma} \succeq \tau \iff \forall i (\tau_i = \sigma_i \vee \tau_i = 0).$$

Легко видеть, что если K_1 и K_2 — простые конъюнкции, то

$$K_1 \leq K_2 \iff \bar{\sigma}(K_1) \succeq \sigma(K_2).$$

Для формулы ψ через Σ_ψ обозначим множество всех минимальных по отношению $\succeq$ наборов множества $\{\bar{\sigma} \mid \psi(\bar{\sigma}) \geq +\}$.

Лемма 7. Д.н.ф. φ^0 есть дизъюнкция всех конъюнкций $K_{\tilde{\sigma}}$, $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\varphi}$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}\varphi &= K_1 \vee \dots \vee K_s, \\ \varphi' &= (\vee K_1) \vee \dots \vee (\vee K_s).\end{aligned}$$

Докажем ряд утверждений.

(а) Если K — конъюнкция из φ^0 , то $\varphi(\tilde{\sigma}(K)) \geq +$.

Положим $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\sigma}$, тогда $K(\tilde{\sigma}) \geq +$. Конъюнкция K получена редукцией некой конъюнкции K' из φ' . При этом сомножители типов r_i^* , $(r_i^{-1})^*$ и $r_i^*(r_i^{-1})^*$ заменены на 1. Согласно (16) $\sigma(1) = 0$ и поскольку при $r_i = 0$ замененные сомножители принимают значение 1, справедливо равенство $K'(\tilde{\sigma}) = K(\tilde{\sigma})$. Откуда

$$\varphi(\tilde{\sigma}) = \varphi'(\tilde{\sigma}) \geq K'(\tilde{\sigma}) = K(\tilde{\sigma}) \geq +.$$

(б) Если $\varphi(\tilde{\sigma}) \geq +$ при некотором $\tilde{\sigma}$, то в φ^0 входит конъюнкция K , для которой $\tilde{\sigma} \succeq \sigma(K)$.

Из $\varphi(\tilde{\sigma}) \geq +$ следует, что $K_j(\tilde{\sigma}) \geq +$ для некоторой конъюнкции K_j из д.н.ф. φ . Тогда по лемме 3 $K_j^{\#} \geq K_{\tilde{\sigma}}$. Если i -й сомножитель в $K_j^{\#}$ имеет вид r_i^{α} , то i -м сомножителем в $K_{\tilde{\sigma}}$ является $r_i^{\alpha}(r_i^{\alpha})^*$ либо $r_i^{\alpha}r_i^{-\alpha}$ и для некоторой конъюнкции K' , полученной расщеплением $K_j^{\#}$ по i -й переменной, $K' \geq K_{\tilde{\sigma}}$. Применяя эти рассуждения к K' и т. д., заключаем, что в $(\vee K_j^{\#})$ имеется простая конъюнкция $\hat{K} \geq K_{\tilde{\sigma}}$. В силу (17) $(\vee K_j^{\#}) = (\vee K_j)^{\#}$, конъюнкция $\hat{K}$ содержится в $((\vee K_1) \vee \dots \vee (\vee K_s))^{\#}$ и в φ^0 найдется конъюнкция K , $K \geq \hat{K} \geq K_{\tilde{\sigma}}$. Для нее $\tilde{\sigma} \succeq \sigma(K)$.

(в) Если $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\varphi}$, то $K_{\tilde{\sigma}}$ содержится в φ^0 .

В соответствии с (б) в φ^0 найдется конъюнкция K такая, что $\tilde{\sigma} \succeq \sigma(K) = \tilde{\sigma}'$. Согласно (а) $\varphi(\tilde{\sigma}') \geq +$. Предположение $\tilde{\sigma}' \neq \tilde{\sigma}$ противоречит минимальности $\tilde{\sigma}$.

(г) Если K содержится в φ^0 , то $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\varphi}$.

Пусть $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\sigma}$. Из (а) следует, что $\varphi(\tilde{\sigma}) \geq +$. Если предположить, что $\tilde{\sigma}(K) \notin \Sigma_{\varphi}$ и в Σ_{φ} найдется меньший набор $\tilde{\sigma}'$, то конъюнкция K' такая, что $\tilde{\sigma}' \succeq \tilde{\sigma}(K')$, существование которой гарантируется в (б), будет больше K . Это противоречит приведенности φ^0 .

Лемма доказана.

Следствие 1. Простая д.н.ф. единственна, то есть если $\varphi_1 = \varphi_2$, то φ_1^0 и φ_2^0 совпадают.

Лемма 8. Если $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ — д.н.ф. и $\varphi_1 = \varphi_2, \psi_1 = \psi_2$, то

$$\varphi_1 \circ \psi_1 = \varphi_2 \circ \psi_2.$$

Доказательство. В соответствии с леммами 6 и 7

$$\varphi_1 \circ \psi_1 = \varphi_1^0 \circ \psi_1^0 = \varphi_2^0 \circ \psi_2^0 = \varphi_2 \circ \psi_2,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, результат операции $\varphi \circ \psi$ определяется лишь функциями, реализуемыми этими д.н.ф., и можно говорить о композиции $f \circ g$ функций $f = \varphi$, $g = \psi$ или о композиции $F \circ G$ соответствующих операторов на множестве отношений.

Для операторов $F(r_1, \dots, r_n)$ и $G(r_1, \dots, r_n)$ запись $F \leq G$ будет означать, что для любых отношений $r_1, \dots, r_n$

$$F(r_1, \dots, r_n) \subseteq G(r_1, \dots, r_n).$$

Это эквивалентно соотношению $f \leq g$ для соответствующих функций.

Лемма 9. Операция композиции монотонна, то есть

$$F_1 \leq F_2, G_1 \leq G_2 \Rightarrow F_1 \circ G_1 \leq F_2 \circ G_2.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ — некоторые д.н.ф., реализующие операторы F_1, F_2, G_1, G_2 . Поскольку $\varphi_1 \leq \varphi_2, \psi_1 \leq \psi_2$, то $\varphi_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2, \psi_2 = \psi_1 \vee \psi_2$. Реализовав операторы F_2 и G_2 посредством д.н.ф. $\varphi_1 \vee \varphi_2$ и $\psi_1 \vee \psi_2$, из леммы 8 с учетом (9) получаем, что

$$F_1 \circ G_1 = \varphi_1 \circ \psi_1 \leq (\varphi_1 \vee \varphi_2) \circ (\psi_1 \vee \psi_2) = F_2 \circ G_2.$$

7. Замыкание операторов

Введем степень оператора F , положив $F^1 = F, F^s = F^{s-1} \circ F, s \geq 2$.

Лемма 10. Имеет место цепочка неравенств

$$F \leq F^2 \leq \dots \leq F^s \leq \dots \quad (19)$$

Доказательство. Рассмотрим д.н.ф. φ , реализующую F . Для каждой конъюнкции K из φ в д.н.ф. $\varphi \circ \varphi$ содержится конъюнкция $K \circ K$, причем $K \circ K \geq K$ (см. (14)). Отсюда следует, что $F = \varphi \leq \varphi \circ \varphi = F^2$. Лемма 9, примененная к соотношению $F \leq F^2$, дает соотношение $F^2 = F \circ F \leq F^2 \circ F = F^3$, и т. д.

Лемма доказана.

Обозначим через $[F]$ результат стабилизации неубывающей (и ограниченной) последовательности (19). Оператор $[F]$ будем называть замыканием F . Пусть t_F — наименьшее значение t , при котором $F^t = [F]$.

Лемма 11. Если оператор F представлен д.н.ф., содержащей s конъюнкций, то $t_F \leq \min(2n, s)$ при $s \geq 2$ и $t_F \leq 2$ при $s = 1$.

Доказательство. Пусть $F = K_1 \vee \dots \vee K_s, K_j = q_1^{(j)} \dots q_n^{(j)}, j = 1, \dots, n$. Оператор F^t может быть представлен в виде дизъюнкции всех конъюнкций $K_{j_1} \circ \dots \circ K_{j_t}, 1 \leq j_1, \dots, j_t \leq s$.

Выберем из $K_{j_1}, \dots, K_{j_t}$ все различные конъюнкции; пусть это будут $K_{u_1}, \dots, K_{u_{t'}}, t' \leq t$. Если $t' \geq 2$, то в силу (13) и (14)

$$K_{j_1} \circ \dots \circ K_{j_t} = K_{j_1}^\# \circ \dots \circ K_{j_t}^\# = K_{u_1}^\# \circ \dots \circ K_{u_{t'}}^\# = K_{u_1} \circ \dots \circ K_{u_{t'}},$$

а если $t'=1$, то

$$K_{j_1} \circ \dots \circ K_{j_t} = K_{j_1} \circ K_{j_1}.$$

Полученная конъюнкция содержится в F^m , где $m \leq \max(s, 2)$, а потому $t_F \leq \max(s, 2)$.

Из таблицы видно, что при каждом $i = 1, \dots, n$ среди сомножителей $q_i^{(j_1)}, \dots, q_i^{(j_t)}$ можно выбрать не более двух так, чтобы их композиция совпала с $q_i^{(j_1)} \circ \dots \circ q_i^{(j_t)}$. Выделим при каждом i такие сомножители; тогда выделятся $m \leq 2n$ конъюнкций, которым они принадлежат. Композиция этих конъюнкций совпадает с $K_{j_1} \circ \dots \circ K_{j_t}$ и содержится в F^m . Поэтому $t_F \leq 2n$.

Лемма доказана.

Нетрудно привести примеры, показывающие, что оценки леммы 11 достижимы, как по s , так и по n .

8. Замкнутость операторов, сохраняющих транзитивность

Будем рассматривать нетривиальный случай, когда мощность $|A|$ множества A , на котором заданы отношения, не меньше 3. Далее понадобится следующее очевидное утверждение.

Предложение 1. *Оператор F сохраняет транзитивность отношений, заданных на множестве $|A|$, $|A| \geq 3$, тогда и только тогда, когда он сохраняет транзитивность на трехэлементном множестве $A_0 = \{1, 2, 3\}$.*

Это означает, в частности, что вид с.т.-операторов не зависит от A .

Лемма 12. *Если оператор $F = \psi$ вида (7) сохраняет транзитивность и ψ — д.н.ф., то $\psi^\# = \psi$.*

Доказательство. Покажем, что если $\psi = \psi' \vee K$, $K = q_1 \dots q_n$ и при некотором i сомножитель q_i имеет один из типов (г)–(е), то $\psi = \psi' \vee K'$, где $K' = q_1 \dots q_{i-1} q_{i+1} \dots q_n$.

Будем считать для простоты, что $i = 1$. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — произвольный набор из $\{0, +, -, 1\}^n$. Введем на $A_0 = \{1, 2, 3\}$ отношения $r_1, \dots, r_n$, задав их сечения следующим образом: $(r_i)_{13} = \alpha_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, $(r_i)_{12} = (r_i)_{23} = \alpha_i$ для всех $i \neq 1$, $(r_1)_{12} = (r_1)_{23} = 0$, $(r_i)_{11} = (r_i)_{22} = (r_i)_{33} = 1$. Легко видеть, что $r_1, \dots, r_n \in \mathcal{T}$. Поскольку F сохраняет транзитивность, $r = F(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{T}$.

Ясно, что $(r)_{13} = \psi((r_1)_{13}, \dots, (r_n)_{13}) = \psi(\tilde{\alpha})$, а $(r)_{12} = (r)_{23} = \psi(\tilde{\alpha}')$, где $\tilde{\alpha}' = (0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Но в случае, когда q_1 имеет один из типов (г)–(е), справедливо равенство $K(\tilde{\alpha}') = K'(\tilde{\alpha})$. Из транзитивности r вытекает, что $(r)_{13} \supseteq (r)_{12} \cap (r)_{23}$, что приводит к неравенству $\psi(\tilde{\alpha}) \geq \psi(\tilde{\alpha}')$. Откуда

$$K'(\tilde{\alpha}) = K(\tilde{\alpha}') \leq \psi(\tilde{\alpha}') \leq \psi(\tilde{\alpha}).$$

Совместно с неравенством $\psi'(\tilde{\alpha}) \leq \psi(\tilde{\alpha})$ это дает неравенство

$$\psi'(\tilde{\alpha}) \vee K'(\tilde{\alpha}) \leq \psi(\tilde{\alpha}).$$

Обратное неравенство $\psi'(\tilde{\alpha}) \vee K'(\tilde{\alpha}) \geq \psi'(\tilde{\alpha}) \vee K(\tilde{\alpha}) = \psi(\tilde{\alpha})$ очевидно, поскольку $K' \geq K$. С учетом произвольности $\tilde{\alpha}$ получаем, что $\psi = \psi' \vee K'$.

Последовательно устранив с помощью полученного соотношения все сомножители типов (г)–(е), придем к редуцированной д.н.ф. $\psi^\#$, реализующей ту же функцию, что и ψ .

Лемма доказана.

Оператор F , удовлетворяющий условию $F^2 = F$, будем называть замкнутым (относительно композиции).

Лемма 13. Если оператор F вида (7) сохраняет транзитивность, то он замкнут.

Доказательство. Пусть F имеет вид (7), где ψ — д.н.ф. В соответствии с леммой 8, для вычисления композиции $F \circ F$ можно вместо ψ воспользоваться простой д.н.ф. ψ^0 .

Рассмотрим произвольные конъюнкции K_1 и K_2 из ψ^0 и положим

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} &= (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \tilde{\sigma}(K_1), \\ \tilde{\tau} &= (\tau_1, \dots, \tau_n) = \tilde{\sigma}(K_2).\end{aligned}$$

Введем отношения $r_1, \dots, r_n$ на A_0 , положив $(r_i)_{12} = \sigma_i$, $(r_i)_{23} = \tau_i$, $(r_i)_{13} = \sigma_i \wedge \tau_i$, $(r_i)_{11} = (r_i)_{22} = (r_i)_{33} = 1$, $i = 1, \dots, n$. Легко проверить, что $r_1, \dots, r_n \in \mathcal{T}$, поэтому и $r = F(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{T}$.

Ясно, что

$$(r)_{12} = \psi^0((r_1)_{12}, \dots, (r_n)_{12}) = \psi^0(\tilde{\sigma}) \geq K_1(\tilde{\sigma}) \geq +.$$

Аналогично,

$$(r)_{23} = \psi^0(\tilde{\tau}) \geq K_2(\tilde{\tau}) \geq +.$$

Из транзитивности r следует, что $(r)_{13} \supseteq (r)_{12} \cap (r)_{23}$. Поэтому $\psi^0(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\tau}) = (r)_{13} \geq +$ и в ψ^0 найдется конъюнкция K' , для которой $K'(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\tau}) \geq +$. Согласно лемме 3 $K' = (K')^\# \geq K_{\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\tau}}$, а согласно лемме 4

$$K_{\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\tau}} = K_{\tilde{\sigma}} \circ K_{\tilde{\tau}} = K_1 \circ K_2.$$

В итоге $\psi^0 \geq K' \geq K_1 \circ K_2$. Поскольку K_1 и K_2 произвольны, это означает, что $F \geq F^2$.

Обратное неравенство $F \leq F^2$ доказано в лемме 10.

9. Некоторые свойства замкнутых операторов

Лемма 14. Если оператор $F = \psi$ замкнут, то $F = \psi^\#$.

Доказательство. Очевидно, что $F = \psi \leq \psi^\#$. С другой стороны, воспользовавшись соотношением (13) и применив лемму 10 к оператору $F_1 = \psi^\#$, получаем, что $F = F^2 = \psi \circ \psi = \psi^\# \circ \psi^\# \geq \psi^\#$.

Следствие 2. *Замкнутый оператор F реализуется своей простой д.н.ф. ψ^0 .*

Действительно, если $F = K_1 \vee \dots \vee K_s$, то

$$F = (\vee K_1) \vee \dots \vee (\vee K_s) = ((\vee K_1) \vee \dots \vee (\vee K_s))^\# = \psi^0,$$

что и требовалось доказать.

Пусть F — оператор и $\psi^0 = K_1 \vee \dots \vee K_s$ — соответствующая ему простая д.н.ф. (единственная). Положим $K^0 = K_1 \circ \dots \circ K_s$ и назовем K^0 основной конъюнкцией оператора F . Непосредственной проверкой по таблице 1 убеждаемся, что если

$$K^0 = q_1^0 \dots q_n^0, \quad K_j = q_1^{(j)} \dots q_n^{(j)}, \quad j = 1, \dots, s,$$

то

$$q_i^0 = r_i r_i^{-1} \Rightarrow q_i^{(j)} = r_i r_i^{-1}, \quad (20)$$

$$q_i^0 = r_i^\alpha (r_i^\alpha)^*, \quad \alpha \in \{-1, 1\} \Rightarrow (q_i^{(j)} = r_i^\alpha (r_i^\alpha)^*) \vee (q_i^{(j)} = r_i r_i^{-1}). \quad (21)$$

Лемма 15. *Если F — замкнутый оператор, то в его простой д.н.ф. ψ^0 присутствует основная конъюнкция K^0 .*

Доказательство. Будем использовать обозначения, введенные перед леммой. Из замкнутости F следует, что $F = F^2 = \dots = F^s$, откуда с учетом следствия 2 к лемме 14

$$\psi^0 = F = F^s = \psi^0 \circ \psi^0 \circ \dots \circ \psi^0 \geq K_1 \circ K_2 \circ \dots \circ K_s = K^0.$$

Положим $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(K^0)$. Поскольку $\psi^0(\tilde{\sigma}) \geq K^0(\tilde{\sigma}) \geq +$, в ψ^0 найдется конъюнкция K_j , для которой $K_j(\tilde{\sigma}) \geq +$. Из леммы 3 следует, что $K_j = K_j^\# \geq K\tilde{\sigma} = K^0$. Конъюнкция K^0 , полученная композицией простых конъюнкций, проста (см. лемму 4), а для простых конъюнкций K^0 и K_j соотношение $K_j \geq K^0$ означает, что $q_i^0 \neq 1$, $q_i^{(j)} = 1$ при некотором i . Согласно (20), (21) это невозможно. Поэтому $K^0 = K_j$, то есть K^0 присутствует в ψ^0 .

Лемма доказана.

Для оператора $F = \psi$ обозначим через $F|_{r_i=1}$ оператор, соответствующий функции $\psi|_{r_i=1}$, полученной из ψ подстановкой $r_i = 1$ (и, следовательно, $r_i^{-1} = 1$, $r_i^* = (r_i^{-1})^* = 0$).

Лемма 16. *Если F — замкнутый оператор, то $F|_{r_i=1}$ также замкнут.*

Доказательство. Поскольку F замкнут, то $F = \psi^0$ (в силу следствия к лемме 13). Д.н.ф. $\psi^0|_{r_i=1}$ образуется из ψ^0 устранением конъюнкций с $q_i = r_i^\alpha (r_i^\alpha)^*$, $\alpha \in \{-1, 1\}$ и заменой в оставшихся конъюнкциях сомножителя $r_i r_i^{-1}$ на 1. Легко видеть, что если K_1 и K_2 — конъюнкции из $\psi^0|_{r_i=1}$, K'_1 и K'_2 — конъюнкции в ψ^0 , из которых произошли K_1 и K_2 , а K' — конъюнкция из ψ^0 такая, что $K' \geq K'_1 \circ K'_2$, то конъюнкция K , полученная из K' подстановкой $q_i = 1$, содержится в $\psi^0|_{r_i=1}$ и $K \geq K_1 \circ K_2$.

Лемма доказана.

10. Разложение замкнутых операторов в пересечение τ -операторов

Будем говорить, что дизъюнкция $D = q_{i_1} \vee q_{i_2} \vee \dots \vee q_{i_p}$ некоторых элементарных сомножителей типа (а)–(и) согласована с д.н.ф. $\psi = K_1 \vee \dots \vee K_s$, если существует сюръекция (отображение на)

$$\varphi: \{K_1, \dots, K_s\} \rightarrow \{q_{i_1}, \dots, q_{i_p}\},$$

при которой $\varphi(K_u)$, $u = 1, \dots, s$, являются элементарными сомножителями конъюнкции K_u .

Лемма 17. Если ψ^0 — простая д.н.ф. замкнутого оператора F и дизъюнкция D согласована с ψ^0 , то найдется оператор G такой, что $F \leq G \leq D$ и G имеет вид

$$G = r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^* \vee r_{u_1}^{\alpha_1} r_{u_2}^{\alpha_2} (r_{u_2}^{\alpha_2})^* \vee \dots \vee r_{u_1}^{\alpha_1} \dots r_{u_{a-1}}^{\alpha_{a-1}} (r_{u_a}^{\alpha_a})^* \vee r_{u_1}^{\alpha_1} \dots r_{u_a}^{\alpha_a} q_{u_{a+1}}, \quad (22)$$

$a \geq 0$, $q_{u_{a+1}} \neq 1$ — простой сомножитель.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по длине (числу конъюнкций) s д.н.ф. ψ^0 .

Если $s = 1$, то $\psi^0 = K_1$, $D = q_{i_1}$, где q_{i_1} — элементарный сомножитель конъюнкции K_1 , который в силу простоты K_1 прост. Функция $G = q_{i_1}$ имеет вид (22) при $a = 0$. Для нее $F = \psi^0 = K_1 \leq G = D$.

Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех $s' \leq s - 1$. Рассмотрим д.н.ф. ψ^0 длины s . В силу леммы 15 в ψ^0 имеется основная конъюнкция K^0 оператора F . По определению согласованности в D содержится член $q_{u_1} = \varphi(K^0)$, являющийся элементарным сомножителем конъюнкции K^0 . Поскольку K^0 проста, сомножитель q_{u_1} также является простым, то есть имеет вид $r_{u_1} r_{u_1}^{-1}$ либо $r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^*$ при некотором α_1 .

Если $q_{u_1} = r_{u_1} r_{u_1}^{-1}$, то в соответствии с (20) сомножитель $r_{u_1} r_{u_1}^{-1}$ присутствует во всех конъюнкциях из ψ^0 , а потому

$$F = \psi^0 \leq r_{u_1} r_{u_1}^{-1} \leq D$$

и можно взять $G = r_{u_1} r_{u_1}^{-1}$. Функция G имеет вид (22) при $a = 0$.

Пусть теперь $q_{u_1} = r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^*$. Тогда согласно (21) у каждой конъюнкции из ψ^0 имеется сомножитель $r_{u_1} r_{u_1}^{-1}$ или $r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^*$. Путем группировки конъюнкций и вынесения за скобки представим ψ^0 в виде

$$\psi^0 = r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^* \psi_1 \vee r_{u_1} r_{u_1}^{-1} \psi_2.$$

Поскольку

$$(r_{u_1}^{\alpha_1})^* = \overline{(r_{u_1}^{-\alpha_1})}, \quad r_{u_1} r_{u_1}^{-1} = r_{u_1}^{\alpha_1} r_{u_1}^{-\alpha_1},$$

это равенство может быть записано в виде

$$\psi^0 = r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^* \psi_1 \vee r_{u_1}^{\alpha_1} \psi_2. \quad (23)$$

Подстановка в обе части значения $r_{u_1} = 1$ дает $\psi^0|_{r_{u_1}=1} = \psi_2$. По лемме 16 оператор $F_1 = \psi_2$ замкнут. Пусть $\psi_1^0 = K'_1 \vee \dots \vee K'_s$ — соответствующая ему простая д.н.ф.

Конъюнкции K'_v , $v = 1, \dots, s'$, этой д.н.ф. получаются из некоторых конъюнкций $K_{i(v)}$ д.н.ф. ψ^0 заменой сомножителя $r_{u_1} r_{u_1}^{-1}$ на 1. Конъюнкции $K_{i(v)}$ отвечает в дизъюнкции D некоторый член $\varphi(K_{i(v)}) \neq r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^*$. Обозначим через D_1 дизъюнкцию членов $\varphi(K_{i(v)})$, $v = 1, \dots, s$.

Поскольку D_1 согласована с ψ_1^0 и $s' < s$ (при подстановке $r_{u_1} = 1$ основная конъюнкция K^0 пропадает), можно использовать предположение индукции и указать оператор G_1 вида (22), для которого $F_1 \leq G_1 \leq D_1$. С учетом того, что $F_1 = \psi_1^0 = \psi_2$ и $r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^* \vee D_1 \leq D$ из (23) получаем, что

$$F = \psi^0 \leq r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^* \vee r_{u_1}^{\alpha_1} \psi_1^0 \leq r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^* \vee r_{u_1}^{\alpha_1} G_1 \leq r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^* \vee D_1 \leq D.$$

В качестве G можно взять оператор $r_{u_1}^{\alpha_1} (r_{u_1}^{\alpha_1})^* \vee r_{u_1}^{\alpha_1} G_1$, который имеет нужный вид. Лемма доказана.

Представление оператора F в виде

$$F = D_1 D_2 \dots D_t, \quad (24)$$

где D_i , $i = 1, \dots, t$, — дизъюнкция элементарных сомножителей типов (а)–(и), будем называть конъюнктивной формой оператора F . Пусть $F = \psi$ — представление в виде д.н.ф. Будем говорить, что конъюнктивная форма согласована с ψ , если при каждом $i = 1, \dots, t$ дизъюнкция D_i согласована с ψ .

Лемма 18. Для любого представления $F = \psi$ в виде д.н.ф. существует согласованная с ψ конъюнктивная форма.

Доказательство. Пусть

$$\psi = K_1 \vee \dots \vee K_s, \quad K_j = q_1^{(j)} \dots q_n^{(j)}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F = \psi &= \bigwedge_{1 \leq i_1 \leq n} (q_{i_1}^{(1)} \vee K_2 \vee \dots \vee K_s) \\ &= \bigwedge_{1 \leq i_1, i_2 \leq n} (q_{i_1}^{(1)} \vee q_{i_2}^{(2)} \vee K_3 \vee \dots \vee K_s) = \dots \\ &= \bigwedge_{1 \leq i_1, \dots, i_s \leq n} (q_{i_1}^{(1)} \vee \dots \vee q_{i_s}^{(s)}). \end{aligned}$$

Устранив дизъюнкции $q_{i_1}^{(1)} \vee \dots \vee q_{i_s}^{(s)}$, содержащие члены $q_{i_u}^{(u)} = 1$, получим нужное представление.

Лемма доказана.

Лемма 19. Если оператор F вида (7) замкнут, то он может быть разложен в пересечение τ -операторов.

Доказательство. Представим F в виде простой д.н.ф. ψ^0 и в соответствии с леммой 18 построим конъюнктивную форму (24), согласованную с ψ^0 . На основании леммы 17 укажем для каждой дизъюнкции D_i из (24) оператор G_i вида (22) такой, что $F \leq G_i \leq D_i$. Отсюда и из (24) получим представление

$$F = G_1 G_2 \dots G_t. \quad (25)$$

Если в (25)

$$q_{u_{a+1}} = r_{u_{a+1}}^{\alpha_{u+1}} (r_{u_{a+1}}^{\alpha_{u+1}})^*,$$

то оператор (22) совпадает с τ -оператором

$$\tau_{a+1}^{(0)}(r_{u_1}^{\alpha_1}, \dots, r_{u_a}^{\alpha_a}, r_{u_{a+1}}^{\alpha_{a+1}}).$$

В случае $q_{u_{a+1}} = r_{u_{a+1}} r_{u_{a+1}}^{-1}$ оператор (22) имеет вид

$$\tau_{a+1}^{(1)}(r_{u_1}^{\alpha_1}, \dots, r_{u_a}^{\alpha_a}, r_{u_{a+1}} r_{u_{a+1}}^{-1})$$

и может быть разложен в конъюнкцию τ -операторов

$$\tau_{a+1}^{(1)}(r_{u_1}^{\alpha_1}, \dots, r_{u_a}^{\alpha_a}, r_{u_{a+1}}) \tau_{a+1}^{(1)}(r_{u_1}^{\alpha_1}, \dots, r_{u_a}^{\alpha_a}, r_{u_{a+1}}^{-1}).$$

Подставив эти выражения для $G_1, \dots, G_t$ в (25), получим представление F в виде конъюнкции τ -операторов.

11. Основные результаты

Следующая теорема дает полное описание операторов, сохраняющих транзитивность.

Теорема 1. *Оператор F сохраняет транзитивность тогда и только тогда, когда он может быть представлен как пересечение обобщенных транзитивных лексикографий (τ -операторов).*

Доказательство. По лемме 1 τ -операторы сохраняют транзитивность. Поскольку пересечение транзитивных отношений транзитивно, пересечение τ -операторов есть с.т.-оператор.

Обратно, пусть F — с.т.-оператор. Если $F = 0$ или $F = 1$, он совпадает с $\tau_0^{(0)}$ или $\tau_0^{(1)}$. В случае, когда F отличен от 0 и 1, он в силу леммы 13 замкнут и в соответствии с леммой 19 может быть разложен в пересечение τ -операторов.

Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что добавление к простейшим операторам $0, 1, {}^{(-1)}$ и $\cap$ оператора $\tau_2^{(1)}$ дает возможность порождения всех с.т.-операторов.

Теорема 2. *Операторы, сохраняющие транзитивность, и только они могут быть представлены суперпозицией операторов системы $\{0, 1, {}^{(-1)}, \cap, \tau_2^{(1)}\}$.*

Доказательство. Все транзитивные лексикографии выразимы через операторы указанной системы: $\tau_0^{(0)} = 0$, $\tau_0^{(1)} = 1$, $\tau_1^{(0)}(r) = \tau_2^{(1)}(r, 0)$, $\tau_1^{(1)}(r) = \tau_2^{(1)}(r, 1)$, при $n \geq 2$ выражение для $\tau_n^{(1)}$ имеется в (4), а $\tau_n^{(0)} = \tau_n^{(1)}(r_1, \dots, r_{n-1}, \tau_1^{(0)}(r_n))$. Используя оператор (-1) , отсюда можно получить все τ -операторы, а из них с помощью $\cap$ все с.т.-операторы (см. теорему 1). Теорема доказана.

Распространим операцию $F \circ F$, введенную для операторов вида (7), на случаи $F = 0$ и $F = 1$, положив $0 \circ 0 = 0$, $1 \circ 1 = 1$. Следующая теорема дает способ проверки по оператору, заданному в виде произвольной д.н.ф., является ли он с.т.-оператором.

Теорема 3. *Оператор F сохраняет транзитивность тогда и только тогда, когда он замкнут, то есть $F^2 = F$.*

Доказательство. Ограничимся нетривиальным случаем $F \neq 0$, $F \neq 1$. Если F сохраняет транзитивность, то согласно лемме 13 он замкнут. Обратно, если F замкнут, то по лемме 19 он разлагается в пересечение τ -операторов и в силу теоремы 1 сохраняет транзитивность.

Теорема доказана.

Для оператора F , заданного произвольной д.н.ф. ψ , проверка замкнутости сводится к проверке соотношений $K_1 \circ K_2 \leq \psi$ для всех пар конъюнкций K_1, K_2 из ψ .

Если F не сохраняет транзитивности, возникает задача его наилучшего приближения с.т.-оператором. Пусть $F = F(r_1, \dots, r_n)$ — произвольный оператор. Рассмотрим множество $\{G_1, \dots, G_N\}$ всех с.т.-операторов $G(r_1, \dots, r_n)$, удовлетворяющих условию $F \leq G$ (оно не пусто, ибо содержит оператор 1). Положим

$$F_T = G_1 \cap \dots \cap G_N.$$

Ясно, что F_T является наименьшим (по отношению $\leq$) оператором, не меньшим F .

Теорема 4. *Наименьший с.т.-оператор F_T , не меньший F , совпадает с замыканием $[F]$ оператора F .*

Доказательство. Пусть $[F] = F^t$. Тогда $[F]^2 = F^{2t} = F^t = [F]$, а потому оператор $[F]$ замкнут. По теореме 3 он сохраняет транзитивность. Поскольку, кроме того, $F \leq F^t = [F]$ (в силу леммы 10), а оператор F_T минимален, то $F_T \leq [F]$.

С другой стороны, из соотношения $F \leq F_T$ и леммы 9 следует, что $F^t \leq (F_T)^t$. Но $F^t = [F]$ и $(F_T)^t = F_T$, поскольку F_T замкнут (в силу теоремы 3). Отсюда $[F] \leq F_T$.

Теорема доказана.

Если оператор $F(r_1, \dots, r_n)$ реализуется д.н.ф. с s конъюнкциями, то при $s \geq 2$ согласно лемме 11 для нахождения $F_T = [F]$ достаточно не более $\lceil \log_2(\min(2n, s)) \rceil$ возведений в квадрат: $F^2 = F \circ F$, $F^4 = F^2 \circ F^2, \dots$. Если $s=1$, то $[F] = F^2$.

Список литературы

1. Данилов В. И. Модели группового выбора (обзор). *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика* (1983), №1, 143–164.
2. Arrow K. J. *Choice and Individual Values*. Yale Univ. Press, London, 1963.
3. Kelly J. S. *Arrow Impossibility Theorems*. Academic Press, New York, 1978.
4. Fishburn P. C. Axioms for lexicographic preferences. *Rev. Econ. Stud.* (1975) **17**, №131, 415–419.
5. Brown D. J. Aggregation of preferences. *Quart. J. Econom.* (1975) **89**, 456–469.
6. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы). *Автоматика и телемеханика* (1983), №9, 127–151.
7. Левченков В. С. *Алгебраический подход в теории группового выбора*. Наука, Москва, 1991.
8. Алескеров Ф. Т., Владимиров А. В. Квазилокальные операторы группового выбора. *Автоматика и телемеханика* (1987), №3, 127–140.
9. Шоломов Л. А. Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора. *Матем. вопросы кибернетики* (1994) **5**, 109–143.

Статья поступила 05.01.1995.