Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, Локально $GQ(3, 5)$ -графы и геометрии с короткими прямыми, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 2, 72–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:16:19

Локально $GQ(3, 5)$ -графы и геометрии с короткими прямыми

© 1998 г. А. А. Махнев

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) и обозначается $pG_\alpha(s, t)$, если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L . Геометрия $pG_1(s, t)$ называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$.

Доказано, что связный локально $GQ(3, 5)$ -граф является антиподальным графом диаметра 3 на 160 вершинах. Как следствие получена классификация однородных расширений частичных геометрий с короткими прямыми ($s \leq 3$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-00488.

1. Введение

Геометрия ранга 2 — это система инцидентности с множеством точек $\mathcal{P}$ и множеством блоков $\mathcal{B}$, причем предполагается, что в геометрии нет повторяющихся блоков. Таким образом, блоки можно отождествить с подмножествами инцидентных им точек. Блоки называются прямыми, если любые два блока пересекаются не более, чем по одной точке. Две различные точки из $\mathcal{P}$ называются коллинеарными, если они лежат в общем блоке. Граф, соответствующий отношению коллинеарности называется точечным графом геометрии. Геометрия называется связной, регулярной и т. п., если таким является ее точечный граф.

Пусть $G = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ — геометрия ранга 2. Вычет G_a геометрии G в точке a из $\mathcal{P}$ — это геометрия с множеством $\mathcal{P}_a$ точек, коллинеарных a , и множеством блоков $\mathcal{B}_a$, содержащих a . Если $\mathcal{F}$ — семейство геометрий ранга 2 и каждый вычет G_a принадлежит $\mathcal{F}$, то G называется $\mathcal{F}$ -расширением. Геометрия G называется треугольной, если любые три попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке. Легко понять, что геометрия G треугольна тогда и только тогда, когда каждый подграф $\Gamma(G_a)$ индуцирован точечным графом $\Gamma = \Gamma(G)$. В этом случае говорят, что Γ является локально $\{\Gamma(G_a)\}$ -графом.

Пусть $G = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ — геометрия ранга 2. Пара (a, B) из G называется флагом, если $a \in B$, и антифлагом в противном случае. Для антифлага (a, B) через $f(a, B)$ обозначается число точек из B , коллинеарных a . Геометрия G называется φ -однородной, если $f(a, B) = 0$ или $f(a, B) = \varphi$ (и сильно φ -однородной, если

Рис. 1. Локально $GQ(3, 5)$ -граф

$f(a, B) = \varphi$) для любого антифлага (a, B) . Геометрия $G^T = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$ называется дуальной к геометрии G .

Если G — сильно α -однородная геометрия точек и прямых с $s + 1$ точкой на каждой прямой и $t + 1$ прямой, проходящей через каждую точку, то G называется α -частичной геометрией порядка (s, t) и обозначается $pG_\alpha(s, t)$ или pG_α . Связное расширение семейства α -частичных геометрий обозначается EpG_α . Ясно, что порядок (s, t) не зависит от выбора вычета, поэтому соответствующее расширение обозначается $EpG_\alpha(s, t)$ и называется расширенной частичной геометрией.

Легко понять, что если $f(a, B) \neq 0$ для антифлага (a, B) в EpG_α , то $f(a, B) \geq \alpha + 1$ и геометрия EpG_α треугольна только тогда, когда она $(\alpha + 1)$ -однородна.

Обобщенный четырехугольник $GQ(s, t)$ — это $pG_1(s, t)$. Геометрия $pG_t(s, t)$ — это сеть, а $pG_{s+1}(s, t)$ — это 2-схема Штейнера (схема с $\lambda = 1$). Коклика из $1 + st/\alpha$ точек в $pG_\alpha(s, t)$ называется овоидом. Заметим, что дуальная к $pG_\alpha(s, t)$ геометрия является α -частичной геометрией порядка (t, s) . Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ является сильно регулярным с параметрами

$$v = (s + 1)(1 + st/\alpha), \quad k = s(t + 1), \quad \lambda = (s - 1) + t(\alpha - 1), \quad \mu = \alpha(t + 1),$$

причем геометрия однозначно восстанавливается по своему точечному графу, если $\alpha = 1$. Мы будем обозначать точечный граф обобщенного четырехугольника порядка (s, t) также через $GQ(s, t)$. Таким образом, изучение треугольных расширений обобщенных четырехугольников $GQ(s, t)$ эквивалентно изучению локально $GQ(s, t)$ -графов.

В данной работе получена классификация однородных расширений частичных геометрий с короткими прямыми ($s \leq 3$). В §5 проведена редукция к локально $GQ(3, t)$ -графам. Локально $GQ(3, 3)$ -графы изучены автором в [1] (и независимо Д. Пасечником [2]). Локально $GQ(3, 9)$ -графы описаны Д. Пасечником [3]. Основным результатом данной работы — описание локально $GQ(3, 5)$ -графов.

Теорема 1. Пусть Γ — связный локально $GQ(3, 5)$ -граф. Тогда Γ — граф диаметра 3 на 160 вершинах, имеющий диаграмму, изображенную на рис. 1, относительно любой вершины.

Следствие 1. Пусть G — φ -однородная геометрия $EpG_\alpha(s, t)$ с короткими прямыми. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) G — единственная 2-(7, 4, 2), 2-(21, 6, 4) или 3-(8, 4, 1) схема;

- (2) G — треугольное расширение дуальной сети $pG_s(s, t)$, где $s = 2, 3$;
- (3) G — φ -однородное расширение сети $pG_2(3, 2)$, где $\varphi = 3$ или $\varphi = 4$;
- (4) G — геометрия точек и 3-клик полного 3-дольного графа с долями порядка $t+1$ или геометрия точек и всех троек точек множества из $t+3$ элементов;
- (5) G — геометрия точек и 5-клик графа Клебша с параметрами $(16, 10, 6, 6)$;
- (6) G — одноточечное расширение $GQ(2, t)$ (см. пример 9.7 [4]) или $\Gamma(G)$ — локально $GQ(2, t)$ -граф (см. пример 9.6 [4]);
- (7) G — 4-однородное расширение $GQ(3, t)$, $t = 1$ или $t = 5$;
- (8) $\Gamma(G)$ — локально $GQ(3, t)$ -граф, то есть граф Джонсона $J(8, 4)$ или его частное, один из двух локально $GQ(3, 1)$ -графов на 40 вершинах, граф ранга 3 для $U_5(2)$, граф МакЛафлина или граф из заключения нашей теоремы.

Существование графа из заключения нашей теоремы установлено в [7]. Этот граф является первым в бесконечной серии $EGQ(s-1, s+1)$, построенной в [11]. Вопрос о единственности локально $GQ(3, 5)$ -графа из заключения нашей теоремы остается открытым. Если отождествить антиподальные точки в локально $GQ(3, 5)$ -графе, то мы получим 4-однородный $EGQ(3, 5)$. Расширения сетей и дуальных сетей рассматривались в [5].

Опишем схему доказательства теоремы. В §2 получены некоторые вспомогательные результаты. В §3 найдены гипервалы в $GQ(3, 5)$. Наконец, в §4 рассмотрены локально $GQ(3, 5)$ -графы.

Мы используем следующие обозначения. Для геометрии G пусть $\Gamma = \Gamma(G)$ — точечный граф G , $\Gamma_i(a)$ — подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Если из контекста ясно, о каком графе Γ идет речь, то вместо $\Gamma_1(a)$ будем писать $[a]$, а через $a^\perp$ обозначим $\{a\} \cup [a]$. Если Λ — подграф из Γ , то через $K_i(\Lambda)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Lambda$, смежных с i вершинами из Λ . Для вершины x из Γ через $K_i^x(\Lambda)$ обозначим $K_i(\Lambda) \cap [x]$. Через (m, n) обозначим полный двудольный граф с долями порядка m и n .

Пусть Γ — локально $GQ(3, 5)$ -граф. Тогда клики максимального порядка в Γ состоят из 5 точек и мы будем называть их блоками. Таким образом, если X — блок, $x \in X$, то $X - \{x\}$ — прямая из $[x]$.

Подмножество Λ обобщенного четырехугольника называется локальным подграфом, если любая прямая пересекает Λ по 0 или 2 точкам. Локальные подграфы, допустимые в качестве μ -подграфов в EGQ , мы назовем гипервалами. Другими словами, гипервал в $GQ(s, t)$ — это регулярный подграф без треугольников валентности $t+1$, имеющий четное число вершин.

2. Предварительные результаты

В этом параграфе мы приведем несколько вспомогательных результатов, используемых в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть Γ — локально $GQ(s, t)$ -граф. Тогда максимальные клики из Γ состоят из $s+2$ точек (такие клики мы будем называть блоками), каждая точка

лежит на $(t + 1)(st + 1)$ блоках, любые две смежные точки лежат на $t + 1$ общих блоках, любые два блока пересекаются по не более чем одной точке.

Доказательство. Все утверждения леммы следуют из определения расширения и свойств GQ [6].

Лемма 2. Пусть Λ — гипервал в обобщенном четырехугольнике $GQ(s, t)$, $\mu = |\Lambda|$. Тогда μ четно, и верны неравенства

$$\mu_* \leq \mu \leq \mu^*,$$

где

$$\mu_* = \max\{2(t + 1), (s + 1)(t + 2 - s)\}, \quad \mu^* = 2(st + 1).$$

Далее, если $\mu = \mu_*$ ($\mu = \mu^*$), то для любой точки $a \notin \Lambda$ точно $(t + 2 - s)/2$ прямых из $a^\perp$ (любая прямая) пересекает Λ по двум точкам.

Доказательство. Оценки для μ и четность μ следуют из лемм 3.9, 3.11 [4]. Если $\mu = \mu_*$, то из доказательства леммы 3.11 [4] следует, что для $a \notin \Lambda$ число прямых из $a^\perp$, не пересекающих Λ , равно $(s + t)/2$.

Если $\mu = \mu^*$, то по лемме 3.9 (b) [4] каждая прямая пересекает Λ (естественно по двум точкам). Лемма доказана.

Пусть до конца параграфа Σ — точечный граф $GQ(3, 5)$.

Лемма 3. Пусть a, b — несмежные точки из Σ , $\Delta = [a] \cap [b]$, H_i — множество точек вне $a^\perp \cup b^\perp$, смежных с i точками из Δ , $y_i = |H_i|$.

Тогда $y_0 = 2$, $y_4 = 6$ и $y_2 = 24$, причем для точек $c, d \in H_0$ множество $H_4 = [c] \cap [d]$ и $\Lambda = \{H_4 \cup \{a, b\}; \{c, d\} \cup \Delta\}$ — двудольный граф валентности 6 на 16 вершинах.

Доказательство. Лемма следует из утверждений (a, b) в доказательстве теоремы 6.2.4 [6].

Лемма 4. Пусть Λ — регулярный подграф без треугольников валентности 6 из Σ на 16 точках. Тогда Λ — подграф из заключения леммы 3, и $[a] \cap \Lambda$ состоит из двух ребер для $a \notin \Lambda$.

Доказательство. Последнее утверждение леммы следует из леммы 2. Выберем несмежные точки a, b из Λ так, что $\Delta = [a] \cap [b] \cap \Lambda$ содержит наибольшее число точек α из Λ .

Если $\alpha = 6$, то Σ содержит 6 точек $\{e_i\}$ смежных с 4 точками из Δ . Из последнего утверждения леммы следует, что $\{e_i\} \subset \Lambda$. Аналогично, $K_0(\Delta) \subset \Lambda$ и Λ — граф из заключения леммы 3.

Допустим, что $\alpha = 5$. Положим $\Delta' = [a] \cap [b]$. По лемме 3 Σ содержит 6 точек $\{e_i\}$, смежных с 4 точками из Δ' . Снова по последнему утверждению леммы $\{e_i\} \subset \Lambda$ и Λ содержит $K_0(\Delta') = K_4(\{e_i\})$. Получили противоречие с тем, что $\alpha = 5$.

Предположим, что $\alpha = 4$. Пусть $\Lambda' = \Lambda - a^\perp$, H_i — множество точек из Λ' , смежных с i точками из $[a] \cap \Lambda$, $y_i = |H_i|$. Тогда

$$\sum_{i=0}^4 y_i = 9, \quad \sum_{i=1}^4 iy_i = 30,$$

поэтому

$$4y_0 + 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 6, \quad y_4 - y_2 - 2y_1 - 3y_0 = 3.$$

Далее, если $f \in H_4$, $g \in [f] \cap \Lambda'$, то $[f] \cap [g]$ не содержит точек из $[a] \cap \Lambda$, так как Λ — граф без треугольников. Отсюда, $g \in H_i$ для некоторого $i \leq 2$, поэтому $2y_4 \leq 6y_0 + 5y_1 + 4y_2$.

Полученная система линейных неравенств имеет единственное решение

$$y_0 = y_1 = y_3 = 0, \quad y_2 = 3, \quad y_4 = 6.$$

Положим $H_2 = \{g_1, g_2, g_3\}$.

Если f — смежная с g_1 и g_2 точка из H_4 , то $[g_1] \cap [g_2]$ содержит две общие точки из $[a] \cap \Lambda$, а именно, $([a] \cap \Lambda) - [f]$. Если теперь h — точка из K_4 , смежная с g_2 и g_3 , то снова

$$[g_2] \cap [a] \cap \Lambda = [g_3] \cap [a] \cap \Lambda = ([a] \cap \Lambda) - [h].$$

Но тогда $\alpha > 5$, получаем противоречие.

3. Гипервалы в $GQ(3, 5)$

В этом параграфе мы опишем локальные подграфы из $GQ(3, 5)$, допустимые в качестве возможных μ -подграфов.

Пусть Σ — точечный граф $GQ(3, 5)$, Λ — регулярный подграф без треугольников валентности 6 с четным числом вершин μ . Положим $K_i = K_i(\Lambda)$, $x_i = |K_i|$. Для вершины a из $\Sigma - \Lambda$ по структуре GQ подграф $[a] \cap \Lambda$ является объединением (быть может пустого) множества ребер. Отсюда $x_i = 0$ для нечетных i и для $i > 12$.

Предложение 1. *Выполняется одно из следующих утверждений:*

$\mu = 16$, Λ — граф из заключения леммы 3 и $x_i = 0$ для $i \neq 4$;

$\mu = 18$, $x_0 = 1$, $x_4 = 27$ и $x_6 = 18$, причем $[a] = K_6$ для $a \in K_0$;

$\mu = 20$, $x_0 = 2$, $x_4 = 12$, $x_6 = 24$, $x_8 = 6$, $K_8 = [a] \cap [b]$ для точек a, b из K_0 и $K_6 \cup K_8 = [a] \cup [b]$;

$\mu = 22$, $x_0 = x_4 = x_{10} = 0$, $x_2 = 6$, $x_6 = 20$, $x_8 = 15$, $x_{12} = 1$, причем $K_8 \cup K_{12}$ — овоид;

$\mu = 24$, и

(1) либо $x_0 = x_6 = x_{10} = 0$, $x_4 = 12$, $x_8 = 24$, $x_{12} = 4$,

(2) либо $x_2 = x_4 = x_6 = x_{10} = x_{12} = 0$, $x_0 = 4$, $x_8 = 36$,

причем в случае (1) K_8 является гипервалом типа (2);

$\mu = 30$, $x_0 = 1$, $x_{10} = 18$, $x_{12} = 15$ и Λ получается выбрасыванием из Σ окрестности некоторой вершины и овида, содержащего эту вершину;

$\mu = 32$ и $x_i = 0$ для $i \neq 12$.

Заметим, что фактически будет получена дополнительная информация о вложении Λ в Σ .

По лемме 2

$$(s+1)(t+2-s) \leq \mu \leq 2(st+1)$$

и в нашем случае $16 \leq \mu \leq 32$. Подсчитав число ребер между точками из Λ и точками из $\Sigma - \Lambda$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^6 x_{2i} &= 64 - \mu, \\ \sum_{i=1}^6 2ix_{2i} &= 12\mu. \end{aligned} \quad (1)$$

Прямую, пересекающую Λ , назовем секущей, а не пересекающую — внешней прямой.

Лемма 5. Если прямая L из Σ пересекает Λ и две точки из $L - \Lambda$ лежат в K_i и K_j , то $i + j = \mu - 8$.

Доказательство. Каждая точка из $\Lambda - L$ смежна с единственной точкой из L , поэтому $(i-2) + (j-2) + 2 \cdot 5 = \mu - 2$ и $i + j = \mu - 8$.

Лемма 6. Если $\mu = 18$, то $x_0 = 1$, $x_6 = 18$, $x_4 = 27$, а остальные x_i равны нулю. Далее, $[a] = K_6$ для $a \in K_0$.

Доказательство. Ввиду леммы 5 $x_i = 0$ для $i > 8$. Если $b \in K_8$, то на секущих из $b^\perp$ лежат 4 точки из K_2 , поэтому $x_2 = 4x_8$. Если $c \in K_6$, то секущие из $c^\perp$ содержат 3 точки из K_4 , а для $d \in K_4$ две секущих из $d^\perp$ содержат по точке из K_6 , следовательно, $2x_4 = 3x_6$. Теперь уравнения (1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} 5(x_6 + 2x_8) &= 2(46 - x_0), \\ 4x_8 + 3x_6 &= 54. \end{aligned}$$

Вычитая из удвоенного второго уравнения первое, получим, что $x_6 - 2x_0 - 2x_8 = 16$, причем, $x_0 \equiv 1 \pmod{5}$. Итак, $x_0 = 1$, $x_6 = 18$, $x_8 = 0$ и $x_4 = 27$.

Если $a \in K_0$, то любая прямая из $a^\perp$ содержит 3 точки из K_6 , поэтому $[a] = K_6$.

Лемма 7. Если $\mu = 20$, то $x_0 = 2$, $x_4 = 12$, $x_6 = 24$, $x_8 = 6$.

Доказательство. Если $\mu = 20$, то, как и выше, $x_2 = 5x_{10}$, $x_4 = 2x_8$, и уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} x_0 + 6x_{10} + 3x_8 + x_6 &= 44, \\ 20x_{10} + 16x_8 + 6x_6 &= 12 \cdot 20. \end{aligned}$$

Вычитая из утроенного первого уравнения второе, сокращенное на 2, получим $3x_0 + 8x_{10} + x_8 = 12$.

Если $x_{10} = 1$ и $a \in K_{10}$, то $x_2 = 5$ и внешняя прямая из $a^\perp$ содержит точку из K_0 . Но тогда $x_0 = x_8 = 1$ и для $b \in K_0$ некоторая прямая из $b^\perp$ не пересекает $K_8 \cup K_{10}$, получаем противоречие.

Значит, $x_2 = x_{10} = 0$, x_8 делится на 3. Если $x_0 = 0$, то $x_8 = 12$, $x_6 = 8$ и $x_4 = 24$. Если $a \in K_6$, то внешние прямые из $a^\perp$ содержат по две точки из K_6 и из K_4 . Отсюда K_8 — коклика и K_6 — граф валентности 6 на 8 точках. Итак, K_6 — полный многодольный граф с 4 долями порядка 2. Пусть b — несмежная с a точка из K_6 , $\Delta = \{a, b\} \cup K_8$. Тогда Δ является 14-кокликкой и по лемме 2.7.1 [6] Δ лежит в овоиде $\mathcal{O}$. Отсюда, точка из $K_6 - \mathcal{O}$ должна быть коллинеарна двум точкам из K_8 , получаем противоречие.

Значит, $x_0 \neq 0$. Если $a \in K_0$, то каждая прямая из $a^\perp$ содержит по крайней мере одну точку из K_8 . Если $x_0 = 1$, то $x_8 = 9$, $x_4 = 18$ и $x_6 = 16$. Допустим, что прямая из $a^\perp$ не пересекает K_6 . Тогда она содержит две точки из K_8 и точку из K_4 . Отсюда, некоторая прямая L из $a^\perp$ содержит точки b, c из K_6 и точку d из K_8 . Если $x \in K_8 - [a]$, то x не смежна с точками из $K_6 \cap L$, поэтому x должна быть смежна с d , получаем противоречие. Итак, $K_8 \subset [a]$. Для $b \in K_6$ внешняя прямая из $b^\perp$ либо содержит точку из K_8 и точку из K_0 , либо содержит две точки из K_4 . Таким образом, K_6 — граф без треугольников валентности 6 на 16 вершинах. По лемме 4 каждая точка вне K_6 смежна с 4 точками из K_6 . Получаем противоречие с тем, что $[a] \cap K_6$ содержит 6 точек.

Теперь $x_0 = 2$, $x_8 = 6$, $x_6 = 24$, $x_4 = 12$. Пусть $a, b \in K_0$. Тогда

$$[a] \cap [b] = K_8, \quad [a] \cup [b] = K_6 \cup K_8$$

и каждая точка из K_4 смежна с двумя точками из K_8 . По лемме 3, Λ содержит точки c, d такие, что каждая точка из $[c] \cap [d]$ смежна с четырьмя точками из K_8 (в частности, $[c] \cap [d] \subset \Lambda$). Но в этом случае $K_4 \cup (\Lambda - (c^\perp \cup d^\perp))$ — граф без треугольников валентности 6 на 24 вершинах. Лемма и соответствующее утверждение предложения 1 доказаны.

Лемма 8. Если $\mu = 22$, то заключение предложения 1 выполняется.

Доказательство. Как и выше, $x_2 = 6x_{12}$, $2x_4 = 5x_{10}$, $3x_6 = 4x_8$, поэтому (1) принимает вид

$$\begin{aligned} 4x_0 + 28x_{12} + 14x_{10} + 7x_6 &= 168, \\ 24x_{12} + 20x_{10} + 16x_8 &= 12 \cdot 22. \end{aligned}$$

Теперь $x_0 = 7t$, $4t + 4x_{12} + 2x_{10} + x_6 = 24$ и $6x_{12} + 5x_{10} + 3x_6 = 66$, поэтому $6x_{12} + x_{10} + 12t = 6$. Отсюда, $t = 0$ и либо $x_{12} = 1$, $x_{10} = 0$, либо $x_{12} = 0$, $x_{10} = 6$.

В первом случае $x_0 = x_4 = x_{10} = 0$, $x_2 = 6$, $x_8 = 15$, $x_{12} = 1$ и очевидно, что $K_8 \cup K_{12}$ — овоид.

Во втором случае $x_0 = x_2 = x_{12} = 0$, $x_4 = 15$, $x_6 = 12$, $x_8 = 9$ и $x_{10} = 6$. Ясно, что $K_{10} \cup K_8$ содержится в овоиде $\mathcal{O}$ и каждая точка из K_6 смежна по крайней мере с 5 точками из K_8 . Отсюда, некоторая точка из K_8 смежна с 7 точками из K_6 , получаем противоречие.

Лемма 9. Если $\mu = 24$, то предложение 1 выполняется.

Доказательство. Пусть $\mu = 24$. Тогда $x_4 = 3x_{12}$, $3x_6 = 5x_{10}$ и $x_2 = 0$. Теперь система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} 3x_0 + 12x_{12} + 8x_{10} + 3x_8 &= 120, \\ 24x_{12} + 20x_{10} + 8x_8 &= 12 \cdot 24 \end{aligned}$$

и x_{10} делится на 3. Отсюда, $2x_{10} + x_8 - 3x_0 = 24$ и x_8 делится на 3. Далее, $6x_0 + 6x_{12} + x_{10} = 24$, и в случае $x_0 = 4$ или $x_{12} = 4$ предложение 1 выполняется. Пусть x_0 и x_{12} меньше 4.

Пусть a, b — различные точки из K_{12} . Если $[a] \cap [b]$ не содержит точек из Λ , то $x_{12} = 2$, и либо $x_0 = 2$, либо $x_0 = 0$. Теперь $x_4 = 6$, $K_4 = [a] \cap [b]$, поэтому в случае $x_{10} \neq 0$ точка c из K_{10} неколлинеарна точкам из $[a] \cap [b]$, получаем противоречие с тем, что x_{10} делится на 3. Значит, $x_6 = x_{10} = 0$, $x_0 = 2$ и $x_8 = 30$. Но в этом случае для точки d из K_0 подграф $[d]$ содержится в K_8 и не пересекает $[a]$, получаем противоречие.

Если $[a] \cap [b]$ содержит точку из Λ , то $x_{12} = 3$ (так как каждая точка из K_4 смежна с двумя точками из K_{12}). Отсюда, $x_4 = 9$ и $[x] \cap [y]$ содержит 3 точки из K_4 для любых различных x, y из K_{12} . Но тогда $[x] \cap [y]$ содержит 3 точки из Λ для различных x, y из K_{12} и $|\Lambda| \geq 27$, получаем противоречие.

Теперь $x_4 = x_{12} = 0$. Если $a \in K_{10}$, то внешняя прямая из $a^\perp$ содержит точку из K_0 и по точке из K_6 и K_8 . Для $b \in K_6$ каждая внешняя прямая из $b^\perp$ содержит точку из K_0 , поэтому $x_0 = 3$, $x_{10} = 6$, $x_8 = 21$ и $x_6 = 10$. В этом случае $K_0 \subset [b]$ для любой точки b из K_6 , получаем противоречие.

Лемма 10. *Параметр μ не равен 26.*

Доказательство. Пусть $\mu = 26$. Тогда $x_6 = 2x_{12}$, $4x_8 = 5x_{10}$, $x_2 = x_4 = 0$, и (1) принимает вид

$$\begin{aligned} 4x_0 + 12x_{12} + 9x_{10} &= 152, \\ 24x_{12} + 20x_{10} &= 12 \cdot 26. \end{aligned}$$

Отсюда, $x_0 \equiv 2 \pmod{3}$, $6x_{12} + 5x_{10} = 78$ и $x_{10} - 4x_0 = 4$. Теперь $x_0 = 2$, $x_{10} = 12$, $x_{12} = 3$, $x_6 = 6$ и $x_8 = 15$. Но в этом случае $K_6 \cup K_{12}$ образует $(3,6)$ -подграф, получаем противоречие.

Лемма 11. *Параметр μ не равен 28.*

Доказательство. Пусть $\mu = 28$. Тогда $2x_8 = 3x_{12}$, $x_2 = x_4 = x_6 = 0$ и (1) принимает вид

$$\begin{aligned} 2x_0 + 5x_{12} + 2x_{10} &= 72, \\ 24x_{12} + 10x_{10} &= 12 \cdot 28 \end{aligned}$$

Отсюда, x_{12} чётно и x_{10} делится на 8. Вычитая из второго уравнения, сокращенного на 2, удвоенное первое, получим, что $2x_{12} + x_{10} - 4x_0 = 24$. Теперь $14x_0 = x_{12} + x_{10}$ и $24 - x_{12} = 10x_0$.

Если $x_{12} = 14$, то $x_0 = 1$, $x_{10} = 0$, $4x_8 = 21$. Для $a \in K_0$ прямая из $a^\perp$ не содержит точек из K_{12} , поэтому она содержит точку из K_8 и две из K_{10} . Значит, $x_{12} = 4$, $x_0 = 2$, $x_{10} = 24$, $x_8 = 6$. Для $a, b \in K_0$, очевидно, $[a] \cap [b] = K_8$. Получаем противоречие с тем, что каждая точка из K_{12} смежна со всеми точками из K_8 .

Лемма 12. *Если $\mu = 30$, то предложение 1 выполняется.*

Доказательство. Пусть $\mu = 30$. Тогда $5x_{10} = 6x_{12}$ и система (1) принимает вид

$$\begin{aligned}x_0 + x_{10} + x_{12} &= 34, \\10x_{10} + 12x_{12} &= 12 \cdot 30.\end{aligned}$$

Отсюда, $5x_{10} + 6x_{12} = 180$, $x_{10} = 18$ и $x_{12} = 15$. Теперь $K_{10} = [b]$, $b \in K_0$ и $K_{12} \cup \{b\}$ — овоид.

4. Локально $GQ(3, 5)$ -графы

Пусть Γ — связный локально $GQ(3, 5)$ -граф, точки a, b находятся на расстоянии 2, $\Lambda = [a] \cap [b]$, $\mu = |\Lambda|$.

Лемма 13. *Параметр μ не равен 22.*

Доказательство. Заметим, что каждая точка из $[c] \cap \Lambda$, $c \in K_{12}^a(\Lambda)$ смежна с 5 точками из $\Lambda - [c]$, всего получается 60 ребер. Значит, каждая точка из $\Lambda - [c]$ смежна с 6 точками из $\Lambda \cap [c]$ и $\Lambda - [c]$ — коклика из 10 точек.

Если $[c] \cap \Lambda$ не содержится в $[d]$, $d \in K_{12}^b(\Lambda)$, то $[c] \cap \Lambda$ содержит такое ребро xy , что $\{x, y\} \cap [d] = \{x\}$. Тогда каждое из оставшихся ребер в $[c] \cap \Lambda$ содержит точку из $([d] \cap \Lambda) - [y]$ и точку из $\Lambda - ([d] \cup [x])$.

Таким образом, $\Lambda - ([c] \cup [d])$ состоит из 4 точек, смежных с 6 точками из $[c] \cap [d] \cap \Lambda$. Получаем противоречие с леммой 3.

Пусть uw — ребро из $[d] \cap \Lambda$, e — четвертая точка из прямой из $[b]$, проходящей через uw . Тогда $e \in K_2(\Lambda)$ и для $\Lambda_e = [a] \cap [e]$ получим, что $b \in K_2(\Lambda_e)$. Ввиду предложения 1 $|\Lambda_e| = 22$ и, как и выше, $c \in K_{12}(\Lambda_e)$. Теперь прямые из $[a]$, проходящие через c , содержат по ребру из Λ и по точке из $K_2(\Lambda) \cap K_2(\Lambda_e)$. Отсюда, $K_2^a(\Lambda) = K_2^a(\Lambda_e)$ лежит в двух различных овоидах, $(\Lambda - [c]) \cup K_2^a(\Lambda)$ и $(\Lambda_e - [c]) \cup K_2^a(\Lambda)$. Но в этом случае $\Lambda - [c]$, $\Lambda_e - [c]$ образуют 20-гипервал Δ из $[a]$ с $|K_0^a(\Delta)| \geq 6$. Получаем противоречие с предложением 1.

Лемма 14. *Параметр μ не равен 18.*

Доказательство. Пусть $\mu = 18$, L — прямая из $[b]$, пересекающая Λ по ребру uw . Тогда L содержит точку c из $K_6(\Lambda)$ и точку d из $K_4(\Lambda)$. Положим

$$\Lambda_0 = \Lambda \cap [c], \quad \Lambda_c = [a] \cap [c], \quad \Lambda_d = [a] \cap [d].$$

Тогда $b \in K_6(\Lambda_c)$ и ввиду предложения 1 и леммы 13 $|\Lambda_c|$ равно 20 или 18. Если $|\Lambda_c| = 18$, то $|\Lambda_d| = 16$. Если же $|\Lambda_c| = 20$, то $c \in K_6(\Lambda_d)$ и $|\Lambda_d| = 18$.

Пусть M — прямая из $[b]$, содержащая c и точку из $K_0(\Lambda)$. Тогда Λ расщепляется тремя тройками ребер вида $[x] \cap \Lambda$, где $x \in K_6(\Lambda) \cap M$. Ясно, что точка в одной из троек смежна с 3 точками в одной из оставшихся троек и с 2 в третьей. В частности, каждая точка из $\Lambda - \Lambda_0$ смежна с 2 или 3 точками из Λ_0 .

Прямая из $[a]$, проходящая через uw , содержит точку f из $K_6(\Lambda)$ и точку g из $K_4(\Lambda)$. Заметим, что $[a] \cap [u]$ содержит w, f, g и еще по 5 точек из Λ, Λ_c и Λ_d . Аналогичное замечание справедливо и для $[a] \cap [w]$. Теперь в $\Lambda \cup \Lambda_c \cup \Lambda_d$ точки f и g смежны лишь с точками из Λ_0 , $\Lambda \cap \Lambda_d$ и $\Lambda_c \cap \Lambda_d$. Если $[f]$ содержит точку x из $(\Lambda \cap \Lambda_d) - \Lambda_0$, то $[f]$ содержит два ребра из Λ_0 и x смежна с единственной точкой из Λ_0 , получаем противоречие. Значит, $[f] \cap \Lambda = \Lambda_0$.

Если $|\Lambda_c| = 18$, то $f \in K_6(\Lambda_c)$, поэтому $[g]$ содержит $\Lambda \cap \Lambda_d$, $\Lambda_c \cap \Lambda_d$ и $g \in K_6(\Lambda_d)$. Получаем противоречие с предложением 1.

Значит, $|\Lambda| = 20$. Если $f \in K_6(\Lambda_c)$, то снова $[g]$ содержит $\Lambda \cap \Lambda_d$, $\Lambda_c \cap \Lambda_d$ и $g \in K_8(\Lambda_d)$. Получаем противоречие с тем, что $|\Lambda_d| = 18$. Значит, $f \in K_8(\Lambda_c)$ и $g \in K_6(\Lambda_d)$. Как показано выше, $[g] \cap \Lambda_d = \Lambda_c \cap \Lambda_d$. Получаем противоречие с тем, что f содержит 4 точки из $\Lambda_c \cap \Lambda_d$.

Лемма 15. *Параметр μ не равен 20.*

Доказательство. Пусть $\mu = 20$, L — прямая из $[b]$, содержащая ребро uw из Λ и две точки c, d из $K_6(\Lambda)$. Положим $\Lambda_c = [a] \cap [c]$, $\Lambda_d = [a] \cap [d]$. Из предложения 1 и леммы 14 следует, что $|\Lambda_c| = |\Lambda_d| = 20$.

Прямая M из $[a]$, проходящая через uw , содержит еще 2 точки f и g .

Если N — прямая из $[a]$, содержащая две точки из $K_6(\Lambda)$ и одну из $K_8(\Lambda)$, то для $x \in N \cap K_6(\Lambda)$ каждая точка из $\Lambda - [x]$ смежна по крайней мере с одной точкой из $[x] \cap \Lambda$, а для $y \in N \cap K_8(\Lambda)$ каждая точка из $\Lambda - [y]$ смежна по крайней мере с двумя точками из $[y] \cap \Lambda$.

Если $f \in K_8(\Lambda)$, то $[f]$ содержит по крайней мере 5 точек из $\Lambda \cap \Lambda_c$. Отсюда $[f]$ содержит по два ребра и по точке из $\Lambda \cap \Lambda_c$ и из $\Lambda \cap \Lambda_d$. Но тогда обе точки ребра из $[f] \cap (\Lambda \cap (\Lambda_d - \Lambda_c))$ смежны с точкой из $(\Lambda \cap \Lambda_c) - [f]$. Получаем противоречие с тем, что Λ не содержит треугольников. Итак, f и g лежат в $K_6(\Lambda)$.

Пусть теперь L' — прямая из $[b]$, содержащая ребро $u'w'$ и точки c' из $K_8(\Lambda)$ и d' из $K_4(\Lambda)$. Положим

$$\Lambda_1 = [a] \cap [c'], \quad \Lambda_2 = [a] \cap [d'].$$

Тогда $b \in K_8(\Lambda_1)$ и из предложения 1 и леммы 13 следует, что $|\Lambda_1|$ равно 20 или 24. В первом случае $b, c' \in K_4(\Lambda_2)$ и $|\Lambda_2| = 16$. Если же $|\Lambda_1| = 24$, то $c' \in K_8(\Lambda_2)$ и $|\Lambda_2| = 20$.

Пусть M' — прямая из $[a]$, проходящая через $u'w'$ и содержащая точки f' и g' . Как показано выше, $f' \in K_8(\Lambda)$, а $g' \in K_4(\Lambda)$. Если $[f']$ содержит 6 точек из $\Lambda \cap \Lambda_1$, то $[f']$ содержит $\Lambda \cap \Lambda_2$ и точка из $[f'] \cap \Lambda \cap \Lambda_2$ смежна с единственной точкой из $[f'] \cap \Lambda$. Получаем противоречие. Если $[f']$ содержит 7 точек из $\Lambda \cap \Lambda_1$, то снова точка из $(\Lambda \cap \Lambda_1) - [f']$ смежна с единственной точкой из $[f'] \cap \Lambda$. Итак, $[f'] \cap \Lambda = [c'] \cap \Lambda$. В этом случае $[g']$ содержит $\Lambda \cap \Lambda_2$ и $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Если $|\Lambda_2| = 16$, то $g' \in K_6(\Lambda_2)$, а если $|\Lambda_2| = 20$, то $g' \in K_{10}(\Lambda_2)$. Получаем противоречие с предложением 1.

Лемма 16. *Если $\mu = 30$, то Γ — граф из заключения теоремы 1.*

Доказательство. Пусть $\mu = 30$, L — прямая из $[b]$, содержащая ребро uw из Λ . Тогда L содержит точку c из $K_{10}(\Lambda)$ и d из $K_{12}(\Lambda)$. Положим

$$\Lambda_c = [a] \cap [c], \quad \Lambda_d = [a] \cap [d].$$

Тогда $b \in K_{10}(\Lambda_c)$ и ввиду предложения 1 $|\Lambda| = 30$, следовательно, $b, c \in K_{12}(\Lambda_d)$ и $|\Lambda_d| = 32$.

Пусть $e \in K_6^a(\Lambda)$, $f \in K_6^a(\Lambda_c)$. По предложению 1 $[a] - \Lambda = e^\perp \cup \theta$, где θ — овоид, содержащий e . Аналогично, $[a] - \Lambda_c = f^\perp \cup \theta'$, где θ' — овоид из $[a]$, содержащий f .

Если f смежна с α точками из $\Lambda \cap [d]$, то либо $f \in \Lambda \cap \Lambda_d$ и валентность f в подграфе $[a]$ не больше 15, либо $f \notin \Lambda \cap \Lambda_d$, f смежна с $12 - \alpha$ точками из $\Lambda_d - \Lambda$.

Но f смежна с 10 точками из $(\Lambda - \Lambda_d) \cup (\Lambda_d - \Lambda)$, поэтому $[f]$ содержит $\alpha - 2$ точки из $\Lambda - \Lambda_d$ и $2\alpha - 2$ равно 10 или 12.

Если f не смежна с e , то $[f] \cap ([a] - \Lambda)$ является 6-кокликой из $[e]$ (напомним, что $[a] - \Lambda = e^\perp \cup \emptyset$). Но тогда $[f] \cap \Lambda \cap \Lambda_d$ является 6-кокликой, получаем противоречие с тем, что $(\Lambda \cap \Lambda_d) - \{u, w\}$ состоит из 5 изолированных ребер. Итак, fe — ребро, поэтому $f \in K_{10}(\Lambda)$ и $\alpha = 6$.

Аналогично, e смежна с 6 точками из $\Lambda_c \cap \Lambda_d$ и с 6 точками из $\Lambda_d - \Lambda_c$, поэтому $[e] \cap [f]$ содержит ребро xy из $(u^\perp \cup w^\perp) \cap (\Lambda_d - \Lambda)$.

Пусть M — прямая из $[a]$, проходящая через uw . Тогда M содержит точку g из $K_{10}(\Lambda) \cap K_{12}(\Lambda_c)$ и h из $K_{12}(\Lambda) \cap K_{10}(\Lambda_c)$, в частности, $[a] - (\Lambda \cup \Lambda_c \cup \Lambda_d)$ состоит из 4 точек e, f, h, g , образующих 4-цикл.

Пусть N — внешняя прямая из $[b]$. Тогда N содержит точку z из $K_0(\Lambda)$ и точки b_2, b_3, b_4 из $K_{10}(\Lambda)$. Положим $b_1 = b$, $\Lambda_i = [a] \cap [b_i]$. Тогда $b \in K_{10}(\Lambda_i)$ для $i > 1$ и ввиду предложения 1 $|\Lambda_i| = 30$.

Если $b_2 \in K_0(\Lambda_3)$, то $z \in K_{10}(\Lambda_2) \cap K_{10}(\Lambda_3)$, поэтому $b_4 \in K_{10}(\Lambda_i)$ для $i < 4$ и $|[a] \cap [b_4]| = 40$, получаем противоречие. Значит, $z \in K_0(\Lambda_i)$ для всех i и $\bigcup_{i=1}^4 \Lambda_i$ содержит 60 точек из $[a]$.

Если точка h из $K_0^a(\Lambda)$ лежит в Λ_2 (для определенности, $h \in \Lambda_2 \cap \Lambda_3$), то h смежна не более чем с 6 точками из $\Lambda_2 - \Lambda$ и из $\Lambda_3 - \Lambda$, поэтому валентность h в $[a]$ не больше 15. Значит,

$$[a] - \bigcup_{i=1}^4 \Lambda_i = \{h_1, h_2, h_3, h_4\},$$

где $\{h_i\} = K_0^a(\Lambda_i)$.

Допустим, что h не смежна с h_2 . Тогда $[h]$ содержит коклику из 6 точек в $[a] - \Lambda_2$. Отсюда $[h] \cap [a]$ содержит не более 5 точек из $[b_3] \cap [b_4]$ и 12 точек из $\Lambda_2 - \Lambda$. Если же h смежна с h_3 , то h смежна с 10 точками из $\Lambda_3 - \Lambda$. Теперь либо $[h]$ содержит 4 точки из $\Lambda_3 \cap \Lambda_4$, h_3, h_4 и по 6 точек из $\Lambda_2 \cap \Lambda_3$ и $\Lambda_2 \cap \Lambda_4$, либо $[h]$ содержит по 5 точек из $\Lambda_3 \cap \Lambda_4$ и $\Lambda_2 \cap \Lambda_3$, h_3 и 7 точек из $\Lambda_2 \cap \Lambda_4$. Второй случай невозможен, так как $[h] \cap ([a] - \Lambda_2)$ лежит в $[h_2]$. Значит, $[h] \cap [h_2]$ содержит h_3, h_4 и 4 точки из $\Lambda_3 \cap \Lambda_4$. Но ребро из $\Lambda_3 \cap \Lambda_4$, не пересекающее $[h]$, лежит в $K_0([h_1] \cap [h_2] \cap [a])$, получаем противоречие.

Итак, $[a] - \bigcup_{i=1}^4 \Lambda_i$ — прямая из $[a]$.

Число ребер между $[a]$ и $\Gamma_2(a)$ равно $64 \cdot 45$, причем $64 \cdot 30$ из этих ребер инцидентны точкам из $[c]$. Ясно, что все точки из $\Gamma_2(a)$, смежные с 30 точками из $[a]$, лежат в $[c]$. Далее, $[b]$ содержит 15 точек из $\Gamma_2(a)$, смежных с 32 точками из $[a]$, итого получается $15 \cdot 64$ ребер между точками из $[c]$ и из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)$. С другой стороны, каждая точка из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)$ смежна с 32 точками из $[c]$ и $|\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)| = 30$. Итак, Γ — антиподальный граф диаметра 3, имеющий указанную в теореме диаграмму относительно вершины a . Положим

$$\Delta = \{a, c\} \cup (\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)).$$

Ясно, что Γ имеет ту же диаграмму относительно любой вершины из Δ . Наконец, $|[a] \cap [x]| = 30$ для любой вершины x из $[c]$, поэтому указанная диаграмма имеет место относительно любой вершины из Γ . В частности, Γ расщепляется пятью 32-кокликами типа Δ . Лемма доказана.

Лемма 17. Если $\mu = 24$, то $[a]$ и $[b]$ удовлетворяют пункту (2) предложения 1.

Доказательство. Пусть $\mu = 24$ и $[b]$ содержит точку c из $K_{12}(\Lambda)$. Тогда каждая точка из $[c] \cap \Lambda$ смежна с 5 точками из $\Lambda - [c]$, итого получается 60 ребер. Отсюда, каждая точка из $\Lambda - [c]$ также смежна с 5 точками из $[c] \cap \Lambda$ и $\Lambda - [c]$ состоит из 6 изолированных ребер, каждое из которых лежит в $[d]$ для подходящей точки $d \in [c] \cap K_4^b(\Lambda)$.

Пусть L — прямая из $[b]$, содержащая точки c из $K_{12}(\Lambda)$, d из $K_4(\Lambda)$ и ребро uw . Положим

$$\Lambda_c = [a] \cap [c], \quad \Lambda_d = [a] \cap [d].$$

Тогда $b \in K_4(\Lambda_d)$ и по предложению 1 и лемме 15 $|\Lambda_d|$ равно 16 или 24. Если $|\Lambda_d| = 16$, то $x, y \in K_4(\Lambda_d)$ и $|\Lambda_c| = 24$. Если же $|\Lambda_d| = 24$, то $c \in K_{12}(\Lambda_d)$ и $|\Lambda_c| = 32$.

Пусть прямая M из $[a]$, проходящая через ребро uw , содержит точки x, y . Если $|\Lambda_d| = 16$, то $x, y \in K_4(\Lambda_d)$. Отсюда, либо $[x]$ содержит отличное от uw ребро из $\Lambda_c \cap \Lambda_d$, либо $[x], [y]$ содержат по одной точке из $(\Lambda_c \cap \Lambda_d) - \Lambda$. Пусть для определенности x смежна с точкой z из $(\Lambda_c \cap \Lambda_d) - \Lambda$. Тогда z смежна с 5 точками из $[c] \cap \Lambda$ (см. первый абзац доказательства), поэтому $x \in K_4(\Lambda_c)$, $y \in K_{12}(\Lambda_c)$, $[y] \cap \Lambda_c = \Lambda \cap [c]$. Заменив Λ_c на Λ , находим, что $y \in K_4(\Lambda)$, $x \in K_{12}(\Lambda)$, получаем противоречие.

Значит, $|\Lambda_d| = 24$. Как и выше, если x коллинеарна точке из $[d] \cap \Lambda$, то $x \in K_4(\Lambda)$ и $[x] \cap \Lambda = [d] \cap \Lambda$. Далее, $|[x] \cap \Lambda_c| = 12$ и отличное от uw ребро из $[a] \cap \Lambda$ должно пересекать Λ_c , получаем противоречие. Лемма доказана.

До конца параграфа будем предполагать, что $|[a] \cap [b]| \neq 30$ для любых вершин a, b на расстоянии 2 в графе Γ .

Лемма 18. Если μ равно 16 или 32, то граф Γ сильно регулярен.

Доказательство. Мы покажем, что если $|[a] \cap [b]| = \mu \in \{16, 32\}$, то $|[x] \cap [y]| = \mu$ для любых x, y на расстоянии 2 в Γ .

Пусть L — прямая из $[b]$, пересекающая Λ , c, d — точки из $L - \Lambda$. Из предложения 1, лемм 14–17 и нашего допущения следует, что

$$|[c] \cap [a]| = |[d] \cap [a]| = \mu.$$

Далее, $[b] - [a] \subset \Gamma_2(a)$, и по симметрии $[a] - [b] \subset \Gamma_2(b)$.

Через Ω обозначим связную компоненту в подграфе $\Gamma_2(a)$, содержащую b . Ясно, что $|[a] \cap [x]| = \mu$ для любого $x \in \Omega$. Допустим, что подграф $\Gamma_2(a)$ несвязен и выберем точку e из $\Gamma_2(a)$, не лежащую в Ω . Для точки f из $[a] \cap [e]$ в Ω найдется точка g на расстоянии 2 от f . Как показано выше, $|[f] \cap [g]| = \mu$, следовательно, $|[e] \cap [g]| = \mu$, причем $([e] \cap [g]) - [a]$ лежит в Ω . Получаем противоречие с выбором точки e .

Очевидно, граф Γ имеет диаметр 2. Таким образом, Γ — сильно регулярный локально $GQ(3, 5)$ -граф. Лемма доказана.

Ввиду теоремы 3.3 [9] локально $GQ(3, 5)$ -графы не могут быть сильно регулярными. Итак, можно считать, что $|[x] \cap [y]| = 24$ для любых x, y на расстоянии 2 в Γ , причем Γ имеет диаметр 3.

Лемма 19. Справедливо включение

$$K_0^b(\Lambda) \subset \Gamma_3(a).$$

Доказательство. Пусть L — прямая из $[b]$, содержащая точку c из $K_0(\Lambda)$. Тогда L содержит точки b_2, b_3, b_4 из $K_8(\Lambda)$. Положим

$$\Lambda_i = [a] \cap [b_i], \quad i = 2, 3, 4.$$

Тогда $b \in K_8(\Lambda_i)$ и $|\Lambda_i| = 24$, $i = 2, 3, 4$. Если $c \in K_8(\Lambda_2)$, то, без ограничения общности, $b_3 \in K_0(\Lambda_2)$, $b_4 \in K_8(\Lambda_i)$ для $i < 4$. Ясно, что $c \in K_0(\Lambda_4)$, поэтому $b, b_4 \in K_0([a] \cap [c])$, получаем противоречие.

Итак, $c \in K_0(\Lambda_i)$ для любого i , поэтому $c \in \Gamma_3(a)$.

Лемма 20. *Параметр μ не равен 24.*

Доказательство. Пусть c — точка из $[b]$, лежащая в $\Gamma_3(a)$. Ясно, что $[c]$ не содержит прямых, лежащих в $\Gamma_3(a)$. Повторив рассуждения из доказательства леммы 19, убеждаемся, что $\Gamma_3(a)$ -коклик.

Теперь $|\Gamma_2(a)| = 64 \cdot 45/24 = 120$ и $|\Gamma_3(a)| = 120 \cdot 4/64 = 15/2$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы, а вместе с ней и теоремы.

5. Геометрии с короткими прямыми

Пусть G — φ -однородная $ErG_\alpha(s, t)$ с $s \leq 3$. Мы докажем, что G — одна из геометрий из заключения следствия.

Если $s = 1$, то G — геометрия из пункта (4) заключения следствия.

Лемма 21. *Если $s = 2$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

$\varphi = 4$ и G — единственная 3-(8, 4, 1) схема, или 2-(7, 4, 2) би плоскость, расширяющая дуальную аффинную плоскость $rG_2(2, 1)$, или однозначно определенное одноточечное расширение $GQ(2, t)$, $t = 1, 2$ или $t = 4$;

$\varphi = 3$ и G — треугольное расширение дуальной сети $rG_2(2, t)$;

$\varphi = 2$ и G — треугольный $EGQ(2, t)$.

Доказательство. Пусть $\varphi = 4$. Тогда $\alpha = 3$ и по следствию 3.2 из [8] G является 3-(8, 4, 1) схемой, либо $\alpha = 2$ и по теореме 4.1 из [5] G является 2-(7, 4, 2) би плоскостью, либо $\alpha = 1$.

В последнем случае $EGQ(2, t)$ существуют и единственны [4]: пусть $H = GQ(2, t)$, ∞ — новая точка; блоки из G двух типов: $L \cup \{\infty\}$, где L — прямая из H , и симметрические разности двух пересекающихся прямых.

Пусть $\varphi = 3$. Тогда $\alpha \neq 1$, так как φ в EGQ четно. Отсюда $\alpha = 2$ и G — треугольное расширение дуальной сети $rG_2(2, t)$. В этом случае $\varphi = s+1$ и точечный граф Γ является полным многодольным с $s+2 = 4$ долями порядка $1 + st/\alpha = t+1$.

Если $\varphi = 2$, то G — треугольный $EGQ(2, t)$. Все такие геометрии были определены Бюкенхаутом и Хубаутом (см. пример 9.6 в [4]). Лемма доказана.

Пусть до конца параграфа $s = 3$.

Лемма 22. *Если $\varphi = 5$, то $\alpha = 4$ и G — единственная 2-(21, 6, 4) схема.*

Доказательство. Пусть $\varphi = 5$. Если $\alpha = 4$, то по следствию 3.2 из [8] G — единственная 2-(21, 6, 4) схема. Если $\alpha = 3$, то G — одноточечное расширение дуальной сети $pG_3(3, t)$, но по теореме 4.1 из [5] таких расширений нет.

Если $\alpha = 2$, то G — расширение $pG_2(3, t)$, где $t = 1$ или $t = 2$. Указанное расширение имеет $\omega = 6t + 5$ точек и

$$b = \frac{(t+1)\omega(\omega-1)}{(s+2)(s+1)}.$$

При $t = 2$ получим $b = 3 \cdot 17 \cdot 16/20$. При $t = 1$ мы снова получим одноточечное расширение дуальной 2-схемы. Ввиду следствия 3.2 из [8] такого расширения нет.

Ясно, что $\alpha \neq 1$, так как φ в EGQ всегда четно.

Лемма 23. Если $\varphi = 4$, то G есть либо треугольное расширение дуальной сети $pG_3(3, t)$, либо расширение сети $pG_2(3, 2)$, либо $EGQ(3, t)$, $t = 1$ или $t = 5$.

Доказательство. Пусть $\varphi = 4$. Если $\alpha = 3$, то G — треугольное расширение дуальной сети.

Если $\alpha = 2$, то G есть $EpG_2(3, t)$, $t = 1$ или $t = 2$. Напомним, что в случае $\varphi = s + 1$ точечный граф является полным многодольным с $s + 2$ долями порядка $1 + st/\alpha$. Отсюда, $t = 2$.

Если $\alpha = 1$, то вычет в точке есть $GQ(3, t)$, имеющий расщепление овоидами, поэтому $t = 1$ или $t = 5$.

Лемма 24. Если $\varphi = 3$, то $\alpha = 2$ и либо G — сильно 3-однородное расширение $pG_2(3, 2)$, либо G — геометрия точек и 5-клик графа Клебша.

Доказательство. Если $\varphi = 3$, то G — s -однородная $EpG_\alpha(s, t)$. По теореме 1 из [9] либо $s = 2$, либо G — геометрия точек и максимальных клик графа, дополнительного к сильно регулярному графу с $\lambda = 0$ и $\mu = 2$, либо G сильно s -однородна и $t = \alpha$ или $t = 2\alpha$. Значит, либо наша геометрия сильно 3-однородна, либо G — геометрия точек и 5-клик графа Клебша.

Пусть G сильно 3-однородна. Если $t = \alpha$, то $t = 2$, так как $1 < \alpha \leq \varphi - 1$. Отсюда G есть $EpG_2(3, 2)$. Если же $t = 2\alpha$, то снова $\alpha = 2$, $t = 4$. Но $pG_2(3, 4)$ не существует.

Лемма 25. Если $\varphi = 2$, то $\Gamma(G)$ — локально $GQ(3, t)$ -граф и выполняется одно из следующих утверждений:

$t = 1$ и либо Γ — граф Джонсона $J(8, 4)$ или его частное, либо Γ — один из двух графов на 40 вершинах (см. [10]);

$t = 3$ и Γ — граф ранга 3 для $U_5(2)$;

$t = 5$ и Γ — граф из заключения теоремы 1;

$t = 9$ и Γ — граф МакЛафлина.

Доказательство. Случай $t = 1$ рассмотрен в [10]. В [1] доказано, что локально $GQ(3, 3)$ -граф является сильно регулярным с параметрами (176, 40, 12, 8). В статье Д. Пасечника [2] доказано, что сильно регулярный локально $GQ(3, 3)$ -граф с указанными параметрами является графом ранга 3 для $U_5(2)$.

Случай $t = 5$ рассмотрен в данной работе. Наконец, в случае $t = 9$ Γ — граф МакЛафлина [3].

Лемма, а вместе с ней и следствие доказаны.

Список литературы

1. Махнев А. А. Конечные локально $GQ(3, 3)$ -графы. *Сиб. матем. журн.* (1994) **35**, №6, 1314–1324.
2. Pasechnik D. V. The triangular extensions of a generalized quadrangle of order $(3, 3)$. *Bull. Belg. Math. Soc.* (1995) **2**, 509–518.
3. Pasechnik D. V. The extensions of the generalized quadrangle of order $(3, 9)$. *Europ. J. Comb.* (1996) **17**, 751–755.
4. Cameron P. J., Hughes D. R., Pasini A. Extended generalized quadrangles. *Geom. Dedic.* (1990) **35**, №1–3, 193–228.
5. Hobart S. A., Hughes D. R. Extended partial geometries: Nets and dual nets. *Europ. J. Comb.* (1990) **11**, №4, 357–372.
6. Payne S. E., Thas J. A., *Finite Generalized Quadrangles*. Pitman, Boston, 1984.
7. Yoshiara S. On some flag-transitive non-classical CC_2 -geometries. *Europ. J. Comb.* (1993) **14**, №1, 59–77.
8. Hughes D. R. Extended partial geometries: Dual 2-designs. *Europ. J. Comb.* (1990) **11**, №5, 459–472.
9. Makhnev A. A. On extensions of partial geometries. *Algebra*. de Gruyter, Berlin, 1996, pp. 165–169.
10. Blokhuis A., Brouwer A. Locally 4-by-4 grid graphs. *J. Graph Theory* (1989) **13**, №2, 229–244.
11. Del Fra A., Pasechnik D. V., Pasini A. A new family of extended generalized quadrangles. *Europ. J. Comb.* (1997) **18**, 155–169.

Статья поступила 02.06.1997.

Переработанный вариант поступил 15.04.1998.