Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О классах Слупецкого для детерминированных функций, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 2, 128–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 09:40:37

УДК 519.716

О классах Слупецкого для детерминированных функций

© 1998 г. С. С. Марченков

Доказывается, что мощность семейства классов Слупецкого в классе всех ограниченно-детерминированных функций континуальна, а в классе всех детерминированных функций гиперконтинуальна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93-01-16006.

Для многих замкнутых относительно суперпозиции классов P дискретных функций проблема полноты решается указанием всех предполных классов. Если функции из P имеют достаточно сложную природу, то число предполных классов может оказаться бесконечным, либо для классов P может не иметь места критерий полноты, основанный на предполных классах. В этих случаях рассматривают другие, более узкие постановки проблемы полноты, допуская, например, использование тех или иных функций из P . В частности, рассматривается полнота систем, содержащих множество P^1 всех одноместных функций из P . Соответствующие предполные классы, которые целиком включают множество P^1 , называются классами Слупецкого.

Хорошо известно [8–10], что при любом k , $k \geq 2$, в классе P_k функций k -значной логики имеется лишь один класс Слупецкого (при $k = 2$ это класс линейных функций). Для более сложных классов, изучавшихся в литературе, число классов Слупецкого возрастает. Так, если рассматривать декартовы произведения классов P_k , то при любом n , $n \geq 2$, для любых k_i , $k_i \geq 2$, $i = 1, \dots, n$, в декартовом произведении $P_{k_1} \times \dots \times P_{k_n}$ имеется ровно $2^n - 1$ классов Слупецкого [6]. Для классов P , состоящих из рекурсивных функций, доказано [4], что при весьма общих предположениях в классе P имеется континуальное множество классов Слупецкого. Отметим три важных класса P , для которых справедлив этот результат: это класс всех примитивно рекурсивных функций, класс всех общерекурсивных функций и класс всех частично рекурсивных функций. Довольно неожиданно выглядят результаты из [1, 2], где установлено, что в классе всех функций счетнозначной логики имеется ровно два класса Слупецкого, а в классе всех функций частичной счетнозначной логики их ровно три.

Ниже мы исследуем вопрос о мощности семейства классов Слупецкого для некоторых классов детерминированных функций. Основные результаты (теоремы 1 и 2) показывают, что в классе всех ограниченно-детерминированных (о.-д) функций имеется континуальное семейство классов Слупецкого, а в классе всех детерминированных функций — гиперконтинуальное семейство.

Дадим необходимые определения. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, $E_2^\infty = E_2 \times E_2 \times \dots$. Элементы x множества E_2^∞ представляем в виде $x = x(0)x(1)\dots$, где $x(t) \in E_2$ при $t \geq 0$. Функцию $f: (E_2^\infty)^n \rightarrow E_2^\infty$ по техническим соображениям записываем в виде $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$, где y — выходная переменная. Через P_D обозначаем множество всех детерминированных функций [7], определенных на декартовых степенях множества E_2^∞ и принимающих значения из множества E_2^∞ . Иными словами, функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$ принадлежат классу P_D , если при любом t функция $y(t)$ является (булевой) функцией (булевых) переменных

$$x_1(0), \dots, x_1(t), \dots, x_n(0), \dots, x_n(t).$$

Через P_{OD} обозначаем множество всех ограниченно-детерминированных функций [7] из P_D .

Ограниченно-детерминированную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$ называем истинностной, если существует такая булева функция $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что для любого t , $t \geq 0$, выполняется равенство $y(t) = g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

Если Q — некоторое множество детерминированных функций, то через Q^1 обозначаем подмножество всех одноместных функций из Q . На множестве P_D обычным образом определяется операция суперпозиции, вводятся понятия замыкания, замкнутого, полного, предполного множества [7]. Через $[Q]$ обозначается замыкание множества функций Q относительно операции суперпозиции. Если Q — замкнутый класс, то классом Слупецкого в Q называется предполный в Q класс, который целиком включает в себя множество Q^1 . Через L обозначается множество всех функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$ из P_D , которые удовлетворяют следующему условию: для любого t , $t \geq 0$, и для любых значений переменных

$$x_1(0), \dots, x_1(t-1), \dots, x_n(0), \dots, x_n(t-1)$$

функция $y(t)$, рассматриваемая как функция от переменных $x_1(t), \dots, x_n(t)$, является линейной булевой функцией. Нетрудно видеть, что класс L замкнут и $P_D^1 \subset L \subset P_D$, где оба включения строгие.

Пусть $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Определим три оператора

$$\Phi_1(M), \quad \Phi_2(f(x_1, \dots, x_n), M), \quad \Phi_3(f(x_1, \dots, x_n), M, \{i_1, \dots, i_s\}),$$

где $M \subseteq N$, $f \in P_D$ и $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Значением операторов Φ_1 , Φ_2 для указанных объектов M , $f(x_1, \dots, x_n)$ являются соответственно детерминированные функции $g(x) = z$ и $h(x_1, \dots, x_n) = v$, где при любом t , $t \geq 0$,

$$z(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in M, \\ 0, & \text{если } t \notin M, \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in M, \\ y(t), & \text{если } t \notin M. \end{cases}$$

Значением оператора Φ_3 для тройки объектов

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad M, \quad \{i_1, \dots, i_s\}$$

является такая детерминированная функция

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = z,$$

что для любого $t, t \geq 0$, и любых фиксированных значений переменных

$$x_1(0), \dots, x_1(t-1), \dots, x_n(0), \dots, x_n(t-1)$$

функция $z(t)$ равна единице, если $t \in M$ и конъюнкция $x_{i_1}(t) \dots x_{i_s}(t)$ входит в полином Жегалкина булевой функции $y(t)$, рассматриваемой как функция от переменных $x_1(t), \dots, x_n(t)$, функция $z(t)$ равна нулю, если $t \in M$ и конъюнкция $x_{i_1}(t) \dots x_{i_s}(t)$ не входит в полином Жегалкина булевой функции $y(t)$, рассматриваемой как функция от переменных $x_1(t), \dots, x_n(t)$, и, наконец, функция $z(t) = y(t)$, если $t \notin M$ (мы считаем, что пустому множеству в полиноме Жегалкина соответствует слагаемое 1).

Пусть $Q \subseteq P_d, M \subseteq N$. Множество M называем сильно представимым в классе Q , если для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из Q и любого подмножества $\{i_1, \dots, i_s\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ функции

$$\Phi_1(M), \quad \Phi_2(f(x_1, \dots, x_n), M), \quad \Phi_3(f(x_1, \dots, x_n), M, \{i_1, \dots, i_s\}),$$

также принадлежат классу Q . Совокупность всех множеств, сильно представимых в классе Q , обозначим через $\mathfrak{B}(Q)$. Отметим, что при $M \in \mathfrak{B}(Q)$ выполняется включение $\Phi_1(M) \in Q^1$.

Напомним, что фильтром в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ называется такое непустое подмножество F множества $\mathfrak{B}$, что для любых элементов $a, b \in \mathfrak{B}$ выполняются следующие условия:

- если $a, b \in F$, то $a \cap b \in F$,
- если $a \in F$ и $a \leq b$, то $b \in F$,
- $0 \notin F$ (здесь 0 — наименьший элемент алгебры $\mathfrak{B}$).

Фильтр алгебры $\mathfrak{B}$ называется максимальным фильтром или ультрафильтром, если он не содержится ни в каком другом отличном от него фильтре алгебры $\mathfrak{B}$.

Лемма 1. Пусть замкнутый класс Q детерминированных функций содержит все истинностные функции, а $\mathfrak{B}$ есть булева алгебра (с обычными теоретико-множественными операциями пересечения, объединения и дополнения до множества N), принадлежащая $\mathfrak{B}(Q)$. Тогда мощность семейства ультрафильтров в $\mathfrak{B}$ не превосходит мощности семейства предполных в Q классов, содержащих $Q \cap L$.

Доказательство. Каждому ультрафильтру U в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ сопоставим множество R_U функций из Q . Прежде всего, в R_U включаем все функции из $Q \cap L$. Далее, если

$$M \in U, \quad f(x_1, \dots, x_n) \in Q, \quad \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\},$$

то к множеству R_U относим также функции

$$\Phi_1(M), \quad \Phi_2(f(x_1, \dots, x_n), M), \quad \Phi_3(f(x_1, \dots, x_n), M, \{i_1, \dots, i_s\}).$$

Докажем, что $[R_U] \neq Q$. В самом деле, пусть функция $g(x, y)$ реализуется формулой G над множеством R_U , и пусть входящим в формулу G функциям-значениям

операторов Φ_2, Φ_3 отвечают множества $M_1, \dots, M_r$. Согласно определению ультрафильтров множество $M_1 \cap \dots \cap M_r$ непусто. Выберем произвольное t из $M_1 \cap \dots \cap M_r$ и зафиксируем значения переменных $x(0), \dots, x(t-1), y(0), \dots, y(t-1)$. Тогда в соответствии с определением класса L и операторов Φ_2, Φ_3 в момент t каждая подформула формулы G будет реализовывать некоторую линейную функцию от переменных $x(t), y(t)$. Значит, не все истинностные функции от переменных x, y входят в $[R_U]$ и, таким образом, $[R_U] \neq Q$.

Докажем, что множество $[R_U]$ можно расширить до предполного в Q класса. Возьмем произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из Q и произвольное множество M из U . Пусть функции

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{2^n}(x_1, \dots, x_n)$$

являются значениями оператора Φ_3 для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, множества M и всех подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, а $\Phi_1(M) = g(x)$. По определению множества $\mathfrak{B}(Q)$ и в силу включений

$$M \in U \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}(Q)$$

функции $f_1, \dots, f_{2^n}, g$ принадлежат множеству R_U . Зададим истинностную функцию

$$h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{2^n}, z) = v$$

следующими условиями: если $z(t) = 1$, то при фиксированных значениях переменных $y_1(t), \dots, y_{2^n}(t)$ полином Жегалкина функции $v(t)$, рассматриваемой как функция от переменных $x_1(t), \dots, x_n(t)$, содержит слагаемое $x_{i_1}(t) \dots x_{i_s}(t)$ в том и только том случае, когда соответствующая набору $\{i_1, \dots, i_s\}$ переменная $y_j(t)$ принимает значение 1 (имеется в виду установленное выше соответствие между номерами функций $f_1, \dots, f_{2^n}$ и подмножествами множества $\{1, \dots, n\}$). Если же $z(t) = 0$, то $v(t) = y_1(t)$. Пользуясь этим определением, убеждаемся в том, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{2^n}(x_1, \dots, x_n), g(x_1)).$$

Таким образом, множество $[R_U]$ вместе с множеством всех истинностных функций образует полную в Q систему. Однако из существования конечного базиса по суперпозиции в классе всех булевых функций вытекает существование конечного базиса B в классе всех истинностных функций из P_d . Следовательно, $[R_U \cup B] = Q$. Теперь согласно известному теоретико-множественному свойству (см. гл. 2, §5 в [3]) получаем, что множество $[R_U]$ можно расширить до предполного в Q класса.

Для завершения доказательства леммы остается установить, что для различных ультрафильтров U_1, U_2 из $\mathfrak{B}$ множества $[R_{U_1}], [R_{U_2}]$ не могут содержаться в одном и том же предполном классе. Однако, если $U_1 \neq U_2$, то в U_1 можно выбрать множество M , не входящее в U_2 . В силу свойств ультрафильтров (см. гл. 5, §2 в [3]) ровно одно из множеств $M, \bar{M}$ принадлежит U_2 . Так как $M \notin U_2$, то $\bar{M} \in U_2$. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из Q ,

$$\Phi_2(f(x_1, \dots, x_n), M) = g_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\Phi_2(f(x_1, \dots, x_n), \bar{M}) = g_2(x_1, \dots, x_n),$$

то $g_1 \in R_{U_1}, g_2 \in R_{U_2}$. Кроме того, как вытекает из определения оператора Φ_2 ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = l(g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n)),$$

где $l(x, y) = z$ — такая истинностная функция из L , что при любом t , $t \geq 0$,

$$z(t) = x(t) \oplus y(t).$$

Итак, $[R_{U_1} \cup R_{U_2}] = Q$, и лемма доказана.

Пусть p_i — i -е простое число и N_i — множество всех чисел из N , кратных p_i . Через $\mathfrak{B}_1$ обозначим булеву алгебру подмножеств множества N , порожденную множествами N_i , $i \geq 0$.

Лемма 2. В булевой алгебре $\mathfrak{B}_1$ имеется континуальное семейство ультрафильтров.

Доказательство. Пусть $\alpha(i)$ — функция, отображающая N в E_2 . Полагая $N_i^1 = N_i$, $N_i^0 = \bar{N}_i$, обозначим через F_α фильтр в алгебре $\mathfrak{B}_1$, порожденный системой множеств $\{N_i^{\alpha(i)}, i \geq 0\}$. Так как для любого натурального числа m множество $N_0^{\alpha(0)} \cap \dots \cap N_m^{\alpha(m)}$ непусто, определение фильтра корректно. Известно (см. гл. 5, §2 в [3]), что в булевой алгебре всякий фильтр можно расширить до ультрафильтра. Таким образом, фильтр F_α содержится хотя бы в одном ультрафильтре алгебры $\mathfrak{B}_1$. Вместе с тем, если α, β — различные функции и, например, $\alpha(i) \neq \beta(i)$, то множества $N_i^{\alpha(i)}$, $N_i^{\beta(i)}$ взаимно дополнительны. В частности, $N_i^{\alpha(i)} \cap N_i^{\beta(i)} = \emptyset$. Поэтому никакой ультрафильтр алгебры $\mathfrak{B}_1$ не может содеожать оба фильтра F_α и F_β .

Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть Q — замкнутый класс детерминированных функций, содержащий все истинностные функции, и $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}(Q)$. Тогда в Q имеется по крайней мере континуальное семейство предполных классов, каждый из которых содержит множество $Q \cap L$.

Так как $Q^1 \subset Q \cap L$, теорема 1 дает нижнюю оценку мощности семейства классов Слупецкого в Q . Отметим также, что если класс Q счетен, то при выполнении условий теоремы мощность семейства предполных классов в Q , содержащих множество $Q \cap L$, в точности равна мощности континуума.

Обратим внимание на два важных счетных класса, удовлетворяющих условиям теоремы. Первый из них — это класс $P_{\text{од}}$ всех о.-д. функций. Другой класс, который мы обозначим через $P_{\text{мин}}$, минимален в смысле выполнения условия $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}(Q)$. Именно, класс $P_{\text{мин}}$ состоит из всех о.-д. функций $f(x_1, \dots, x_n) = y$, которые удовлетворяют следующим требованиям: существуют такие попарно не пересекающиеся множества $M_1, \dots, M_r$ из $\mathfrak{B}_1$ и такие булевы функции

$$g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_r(x_1, \dots, x_n),$$

что $M_1 \cup \dots \cup M_r = N$ и для любого t , $t \geq 0$,

$$y(t) = g_i(x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

если $t \in M_i$, $i = 1, \dots, r$.

Гиперконтинуальной мы называем мощность семейства всех подмножеств континуального множества. Через $\mathfrak{B}_2$ обозначим булеву алгебру всех подмножеств множества N .

Лемма 3. В булевой алгебре $\mathfrak{B}_2$ имеется гиперконтинуальное семейство ультрафильтров.

Доказательство. Лемму 3 можно доказать различными способами. Для полноты изложения мы приведем основные моменты соответствующего доказательства из [5], освободив его от терминологии рекурсивных функций.

Пусть $\alpha(x)$ — функция, отображающая N в E_2 . Определим подмножество N_α множества N . Для любого натурального n число i , $0 \leq i \leq 2^n - 1$, будем считать номером булева вектора $(a_1, \dots, a_n)$, если

$$i = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-1}a_n.$$

Пусть $x \in N$, $b_1 \dots b_0$ — двоичное представление x . Тогда $x \in N_\alpha$ в том и только том случае, когда $l = 2^n$ для некоторого натурального n и для номера i вектора $(\alpha(0), \dots, \alpha(n-1))$ выполняется равенство $b_i = 1$.

Пусть $\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)$ — различные функции типа $N \rightarrow E_2$, $(a_1, \dots, a_n)$ — булев вектор. Покажем, что множество

$$N_{\alpha_1}^{a_1} \cap \dots \cap N_{\alpha_m}^{a_m}$$

непусто. Выберем натуральное s так, чтобы булевы векторы

$$(\alpha_1(0), \dots, \alpha_1(s)), \dots, (\alpha_m(0), \dots, \alpha_m(s))$$

были различны. Для любого j , $1 \leq j \leq m$, через i_j обозначим номер вектора $(\alpha_j(0), \dots, \alpha_j(s))$. Пусть $l = 2^{s+1}$ и x есть число с двоичным представлением $b_1 \dots b_0$, где $b_{i_j} = 1$ и $b_{i_j} = a_j$, $j = 1, \dots, m$. Тогда из определения множеств $N_{\alpha_1}^{a_1}, \dots, N_{\alpha_m}^{a_m}$ вытекает, что

$$x \in N_{\alpha_1}^{a_1} \cap \dots \cap N_{\alpha_m}^{a_m}.$$

Доказанное свойство множества N_α позволяет определить в булевой алгебре $\mathfrak{B}_2$ гиперконтинуальное семейство ультрафильтров. В самом деле, каждому непустому полному множеству M множества всех функций, отображающих N в E_2 , сопоставим фильтр F_M , порожденный множествами N_α , где $\alpha \in M$, и $\bar{N}_\alpha$, где $\alpha \notin M$. По доказанному выше свойству множеств N_α пустое множество не принадлежит фильтру F_M . Фильтр F_M в булевой алгебре $\mathfrak{B}_2$ можно расширить до ультрафильтра U_M . Если множества M_1, M_2 различны, то фильтры F_{M_1} и F_{M_2} содержат взаимно дополнительные множества. Поэтому ультрафильтры U_{M_1} и U_{M_2} не могут совпадать.

Лемма доказана.

Теорема 2. В классе P_D имеется в точности гиперконтинуальное семейство предполных классов, каждый из которых содержит множество L .

Доказательство. Достаточно воспользоваться леммами 1 и 3 и заметить, что $\mathfrak{B}(P_D) = \mathfrak{B}_2$, а мощность класса P_D континуальна.

Следствие 1. Мощность семейства классов Слупецкого в P_D гиперконтинуальна.

Из анализа доказательства ключевой для теорем 1 и 2 леммы 1 видно, что одним из важных моментов доказательства является использование свойств линейности-нелинейности булевых функций. В связи с этим представляет интерес

вопрос о числе классов Слупецкого в классах L и $P_{ОД} \cap L$. Для решения этого вопроса модифицируем некоторые понятия, используемые в лемме 1.

Вместо операторов Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 будем рассматривать оператор

$$\Psi(f(x_1, \dots, x_n), M, i),$$

где $f(x_1, \dots, x_n) = y$ — функция из L , $M \subseteq N$ и $0 \leq i \leq n$. Значением оператора Ψ для указанной тройки объектов является такая функция

$$g(x_1, \dots, x_n) = z$$

из L , что для любого t , $t \geq 0$, и любых фиксированных значений переменных

$$x_1(0), \dots, x_1(t-1), \dots, x_n(0), \dots, x_n(t-1)$$

функция $z(t)$ равна 1, если $t \in M$, $i = 0$ и слагаемое 1 входит в полином Жегалкина булевой функции $y(t)$, рассматриваемой как функция от переменных $x_1(t), \dots, x_n(t)$, функция $z(t)$ равна 0, если $t \in M$, $i = 0$ и слагаемое 1 не входит в полином Жегалкина булевой функции $y(t)$, рассматриваемой как функция от переменных $x_1(t), \dots, x_n(t)$, функция $z(t)$ равна $x_i(t)$, если $t \in M$, $1 \leq i \leq n$, и слагаемое $x_i(t)$ входит в полином Жегалкина булевой функции $y(t)$, рассматриваемой как функция от переменных $x_1(t), \dots, x_n(t)$, наконец, $z(t) = y(t)$, если $t \notin M$.

Пусть $Q \subseteq L$, $M \subseteq N$. Множество M называем теперь сильно представимым в Q , если для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из Q и любого i , $0 \leq i \leq n$, функция $\Psi(f(x_1, \dots, x_n), M, i)$ также принадлежит Q . Совокупность всех множеств, сильно представимых в Q , по-прежнему обозначаем через $\mathfrak{B}(Q)$.

Лемма 4. Пусть Q — замкнутый класс функций из L , содержащий все истинностные функции из L , $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, принадлежащая $\mathfrak{B}(Q)$. Тогда мощность семейства ультрафильтров в $\mathfrak{B}$ не превосходит мощности семейства классов Слупецкого в Q .

Доказательство. Каждому ультрафильтру U в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ сопоставим множество R_U , которое состоит из всех функций множества Q^1 и всех функций вида $\Psi(f(x_1, \dots, x_n), M, i)$, где $f \in Q$, $M \in U$ и $0 \leq i \leq n$.

Докажем, что $[R_U] \neq Q$. Пусть функция $g(x, y)$ реализуется формулой G над множеством R_U . Как и в доказательстве леммы 1, находим все множества $M_1, \dots, M_r$, которые отвечают функциям-значениям оператора Ψ , входящим в формулу G . Выбираем произвольное t из непустого множества $M_1 \cap \dots \cap M_r$ и фиксируем значения переменных $x(0), \dots, x(t-1), y(0), \dots, y(t-1)$. Тогда в момент t каждая подформула формулы G будет реализовывать функцию, зависящую только от одной из переменных $x(t)$, $y(t)$, либо константу. В частности, функция $g(x, y)$ будет отлична от истинностной функции $l(x, y)$, входящей в Q . Следовательно, $[R_U] \neq Q$.

Чтобы показать, что множество $[R_U]$ можно расширить до предполного в Q класса, возьмем произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из Q , произвольное множество M из U и обозначим

$$g_0(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)$$

значения оператора $\Psi(f(x_1, \dots, x_n), M, i)$ при $0 \leq i \leq n$. Тогда для четного n

$$f(x_1, \dots, x_n) = l_{n+1}(g_0(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)),$$

где

$$l_{n+1}(x_0, \dots, x_n) = y$$

— такая истинностная функция, что при любом t , $t \geq 0$,

$$y(t) = x_0(t) \oplus \dots \oplus x_n(t).$$

Если n нечетно, то сначала описанным выше приемом строим функцию $f'(x_1, \dots, x_{n+1})$, которая получается из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ добавлением несущественной переменной x_{n+1} , а затем из функции $f'(x_1, \dots, x_{n+1})$ получаем функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой вместо переменной x_{n+1} любой истинностной функции из L от переменных $x_1, \dots, x_n$. Итак, множество $[R_U]$ вместе с истинностными функциями из L образует полную в Q систему. Так как множество всех истинностных функций из L , очевидно, имеет конечный базис, это обеспечивает существование предполного в Q класса, содержащего множество $[R_U]$.

Остается показать, что для различных ультрафильтров U_1 и U_2 множества $[R_{U_1}]$ и $[R_{U_2}]$ не могут содержаться в одном и том же предполном классе. Пусть $M \in U_1$ и $M \notin U_2$. Тогда по свойствам ультрафильтров $\bar{M} \in U_2$. Положим

$$h_1(x_1, x_2) = \Psi(l(x_1, x_2), M, 1),$$

$$h_2(x_1, x_2) = \Psi(l(x_1, x_2), \bar{M}, 1),$$

Тогда $h_1 \in R_{U_1}$, $h_2 \in R_{U_2}$ и, как это вытекает из определения оператора Ψ ,

$$l(x_1, x_2) = h_1(h_2(x_1, x_2), x_2).$$

Суперпозициями функции l можно определить любую функцию l_n , $n > 2$. Теперь, как и выше, из функций множества R_{U_1} и функций l_n получаем все функции класса Q .

Итак, $[R_{U_1} \cup R_{U_2}] = Q$, и лемма доказана.

Из лемм 2, 3 и 4 выводим следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть Q — замкнутый класс функций из L , содержащий все истинностные функции из L . Тогда в Q имеется по крайней мере континуальное семейство классов Слупецкого.

Теорема 4. В классе L имеется гиперконтинуальное семейство классов Слупецкого.

Отметим два счетных класса, для которых выполняются условия теоремы 3, — это $P_{\text{ОД}}$ и $P_{\text{min}} \cup L$.

Список литературы

1. Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике. *Пробл. кибернетики* (1965) **15**, 5–64.
2. Гаврилов Г. П. Предполные классы частичной счетнозначной логики, содержащие все функции одной переменной. *Методы дискретного анализа и теории графов и логических функций* (1976) **28**, 12–24.
3. Кон Г. *Универсальная алгебра*. Мир, Москва, 1968.
4. Марченков С. С. О квазипеановости рекурсивных функций. *Пробл. кибернетики* (1979) **35**, 199–204.
5. Марченков С. С. О мощности множества предполных классов в некоторых классах функций счетнозначной логики. *Пробл. кибернетики* (1981) **38**, 109–116.
6. Марченков С. С. О классах Слупецкого в системах $P_k \times \dots \times P_l$. *Дискретная математика* (1992) **4**, №3, 135–148.
7. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
8. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.* (1921) **43**, 163–185.
9. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic. *Ann. Math. Studies* (1941) **5**.
10. Słupecki J. Kriterion petnjsci wielowartosciowych systemow logiki zdan. *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* (1939) **32**, 102–109.

Статья поступила 09.03.1995.