Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Матвеевко, О дискретных сублинейных и суперлинейных операторах, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 2, 87–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:33:28

О дискретных сублинейных и суперлинейных операторах

© 1998 г. В. Д. Матвееenko

Рассматриваются два обобщения линейного (матричного) оператора: дискретный сублинейный и дискретный суперлинейный операторы. Показано, что к ним сводится ряд операторов, ранее рассматривавшихся в литературе. Изучаются сжимающие свойства этих операторов и асимптотическое поведение последовательности

$$x^{t+1} = H(x^t), \quad t = 0, 1, \dots,$$

где x^0 — произвольный неотрицательный начальный вектор, а H — оператор. Вводится понятие левого собственного элемента оператора, которое применяется для решения одной задачи математической экономики — нахождения эффективного функционала в модели Неймана–Леонтьева.

1. Введение

В ряде работ по динамическому программированию, экстремальной алгебре, математической экономике (см., например, [1–8]), часто независимо друг от друга использовались операторы, представляющие собой естественные обобщения или аналоги линейного (матричного) оператора, с использованием операции максимума или минимума. В данной статье вводятся понятия дискретного сублинейного и дискретного суперлинейного операторов, к которым сводятся операторы, использовавшиеся в [1–8]. Изучаются сжимающие свойства этих операторов и асимптотика порождаемых ими траекторий. Определяется и вычисляется левый собственный элемент оператора, который далее применяется для решения одной задачи математической экономики.

В дальнейшем неравенства $a \geq b$ и $a \gg b$ для n -мерных векторов a, b означают, соответственно, что $a_i \geq b_i$ и что $a_i > b_i$ для всех $i = 1, \dots, n$; $a > b$ означает, что $a \geq b$ и $a \neq b$; $[x, y]$ — скалярное произведение векторов x, y .

Мы рассматриваем операторы $H: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}_+^n$ (т.е. переводящие неотрицательные векторы в неотрицательные векторы), которые непрерывны и положительно однородны первой степени (т.е. $H(\lambda x) = \lambda H(x)$ для любых $\lambda > 0, x \geq 0$). Такой оператор называется сублинейным (суперлинейным), если он субаддитивный (супераддитивный), т.е., соответственно, $H(x + y) \leq H(x) + H(y)$ ($H(x + y) \geq H(x) + H(y)$) для любых $x \geq 0, y \geq 0$. Оператор H может быть представлен своими n компонентами $H_i: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}_+$. Каждая компонента сублинейного (суперлинейного) оператора является сублинейной (суперлинейной) функцией.

Известно следующее представление сублинейной функции (см. [9]). Если f — сублинейная функция, то существует такое множество $A \subset \mathbf{R}_+^n$, что

$$f(x) = \sup_{p \in A} [p, x].$$

Тем самым, каждый сублинейный оператор H может быть представлен как

$$H_i(x) = \sup_{p \in A_i} [p, x], \quad i = 1, \dots, n,$$

для некоторых множеств $A_i \subset \mathbf{R}_+^n$. Аналогично, каждый суперлинейный оператор H может быть представлен как

$$H_i(x) = \inf_{p \in A_i} [p, x], \quad i = 1, \dots, n.$$

Будем рассматривать частные случаи сублинейного оператора и суперлинейного оператора, когда все множества A_i конечны. Естественно назвать эти операторы дискретными. Итак, пусть $A_i, i = 1, \dots, n$, — конечные множества неотрицательных векторов. Назовем оператор H с компонентами

$$H_i(x) = \max_{p \in A_i} [p, x], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

дискретным сублинейным оператором. Назовем оператор H с компонентами

$$H_i(x) = \min_{p \in A_i} [p, x], \quad i = 1, \dots, n,$$

дискретным суперлинейным оператором. Заметим, что оба эти оператора монотонны в том смысле, что $H(x) \leq H(y)$ при $x \leq y$.

В [3, 4, 7] рассматривался оператор

$$H(x) = \max_{f \in F} A(f)x, \quad (2)$$

где $A(f)$ — неотрицательная матрица размера $n \times n$, зависящая от управляющего вектора f с координатами $f_i, i = 1, \dots, n$, а F — конечное множество всех управляющих векторов. Строка $[A(f)]_i$ матрицы $A(f)$ зависит только от f_i , а множество F обладает следующим производящим свойством: если $f, g \in F$, то для каждой пары $i, j = 1, \dots, n$ существует элемент $h \in F$ такой, что

$$[A(h)]_i = [A(f)]_i, \quad [A(h)]_j = [A(g)]_j.$$

Векторный максимум в (2) всегда существует, и

$$F = F(1) \times \dots \times F(n),$$

где

$$F(i) = \{f_i: f \in F\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Покажем, что (2) представляет собой дискретный сублинейный оператор. Действительно, можно отождествить $[A(f)]_i$ и f_i . Тогда, в наших обозначениях, $A_i = F(i)$, $p = [A(f)]_i$, и определения (1) и (2) совпадают.

Мы будем рассматривать динамические системы

$$x^{t+1} = H(x^t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где x^0 — заданный положительный вектор.

Остановимся на некоторых частных случаях и приложениях дискретных сублинейных и суперлинейных операторов.

В хорошо известном случае, когда H — это линейный (матричный) оператор, система (3) находит многочисленные приложения в цепях Маркова, а также в моделях экологии, демографии и экономики (см., например, [10]).

В форме (2) дискретный сублинейный оператор применялся в задачах, связанных с управляемыми марковскими цепями, управляемым ростом персонала (см. [3]).

В [1] фактически рассматривались дискретные суперлинейные операторы, которые использовались для анализа некоторых моделей экономики (см. также далее п. 4).

Еще один поток литературы посвящен экстремальным матричным операторам. В экстремальной алгебре (см., например, [2, 11, 5, 6, 8]) рассматриваются аналоги линейного (матричного) оператора с заменой операции суммирования на нахождение максимума или минимума. Пусть a, b — неотрицательные n -мерные векторы. Их экстремальным произведением (в смысле максимума) называется число

$$a \circ b = \max_{i=1, \dots, n} a_i b_i.$$

Экстремальным произведением матриц A, B (где элементы неотрицательны, а число столбцов в A равно числу строк в B) называется матрица $D = A \circ B$, элемент d_{ij} которой равен экстремальному произведению i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B . Естественным образом определяются экстремальные степени квадратной матрицы, экстремальное собственное число, правый и левый экстремальные собственные векторы (см., например, [8]).

Пусть A — матрица размера $n \times n$ с неотрицательными элементами, x — n -мерный неотрицательный вектор. Видим, что экстремальный матричный оператор $A \circ x$ является частным случаем дискретного сублинейного оператора, поскольку он может быть записан в форме (1) с множествами

$$A_i = \{(a_{i1}, 0, \dots, 0), (0, a_{i2}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, a_{in})\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Совершенно параллельным является определение экстремального произведения векторов в смысле минимума. Соответствующий оператор является частным случаем дискретного суперлинейного оператора.

Область приложения экстремальных матричных операторов составляют модели структурного взаимодействия, которые описывают взаимодействие нескольких подсистем, составляющих единую систему и влияющих друг на друга таким образом, что развитие каждой подсистемы зависит от объемов всех подсистем. Такого рода модели пригодны для описания ряда экологических, организационных и экономических систем (см., например, [12]). Структура траекторий динамической системы

$$x^{t+1} = A \circ x^t$$

была исследована в [8, 13], а более общие алгебраические конструкции в [14–16].

Дальнейшая часть статьи состоит из трех разделов. В п. 2 исследуются сжимающие свойства операторов на основе квазиметрики Гильберта. Показано, что дискретный сублинейный оператор H является суперпозицией двух простейших: линейного (матричного) и экстремального матричного операторов. Первый из них при естественных условиях является сжимающим, а второй нерасширяющим, тем самым оператор H является сжимающим. Следствием является глобальная устойчивость траекторий динамической системы (3).

В п. 3 вводится понятие левого собственного элемента оператора, описан алгоритм его вычисления. В п. 4 это понятие применяется для решения одной задачи математической экономики, для построения эффективного функционала в модели Неймана–Леонтьева.

2. Глобальная устойчивость, сжимающие свойства

Важная проблема, возникающая в приложениях, состоит в описании траекторий динамической системы (3). В частности, мы интересуемся их глобальной устойчивостью.

Естественно определить степени оператора H как

$$H^1(x) = H(x), \quad H^t(x) = H(H^{t-1}(x)), \quad t = 2, 3, \dots, \quad x \geq 0.$$

Тогда (3) эквивалентно представлению

$$x^t = H^t(x^0), \quad t = 1, 2, \dots$$

Фробениусово собственное число может быть определено как

$$\alpha = \max\{\beta: H(x) = \beta x, x > 0\}.$$

Оператор H называется устойчивым, если для любого x существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{-t} H^t(x).$$

Оператор называется глобально устойчивым, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{-t} H^t(x) = c(x)\bar{x}$$

для любого $x \geq 0$, где $\bar{x}$ — собственный вектор оператора H , соответствующий собственному числу α (т.е. $H(\bar{x}) = \alpha\bar{x}$), $c(x)$ — неотрицательное число. Очевидно, $c(0) = 0$.

Ряд результатов относительно асимптотического поведения однородных операторов был получен в [1]. Там, в частности, устанавливается существование, единственность и положительность собственного числа и собственного вектора $\bar{x}$ для неразложимого монотонного однородного оператора, а также глобальная устойчивость при условии, что оператор примитивен в точках 0 и $\bar{x}$.

Используя некоторые результаты главы 3 в [1], можно доказать также следующее утверждение.

Пусть $h(f)$ — фробениусово собственное число (спектральный радиус) матрицы $A(f)$, т.е. ее наибольшее положительное собственное число. Пусть

$$h(\hat{f}) = \max_{f \in F} h(f), \quad h(\underline{f}) = \min_{f \in F} h(f).$$

Пусть $A(\hat{f}), A(f)$ — соответствующие матрицы.

Лемма 1. Пусть дискретный сублинейный оператор H удовлетворяет следующим условиям.

- (1) Матрица $A(\hat{f})$ единственная, т. е. не существует такой матрицы $A(f)$, $f \in F$, что $A(f) \neq A(\hat{f})$, $h(f) = h(\hat{f})$.
- (2) Матрица $A(\hat{f})$ неразложима и примитивна.
- (3) Для каждого индекса $j \in \{1, \dots, n\}$ существует по крайней мере один индекс $i \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $a_j \neq 0$ для каждого $a \in A_i$.

Тогда существует такое натуральное число T , что для каждого начального вектора $x^0 > 0$ динамическая система (3) удовлетворяет равенству

$$x^{t+1} = A(\hat{f})x^t$$

при всех $t > T$. Оператор H при этом глобально устойчив.

Подобные результаты были получены другим способом в [3, 4, 7]. В симметричном утверждении по поводу дискретного суперлинейного оператора используется матрица $A(f)$.

Как условия глобальной устойчивости, найденные в [1], так и подобные лемме 1, не являются универсальными. Так, эти условия слишком ограничительны для экстремального матричного оператора. Более общий подход состоит в исследовании сжимающих свойств оператора H , которое удобно провести, используя квазиметрику Гильберта (метрику Биркгофа) θ (см., например, [10]). Функция θ обладает всеми свойствами метрики, за исключением линейной однородности, которая заменяется положительной однородностью нулевой степени. Для положительных n -мерных векторов a, b

$$\theta(a, b) = \ln \max_{i,j=1,\dots,n} \frac{a_i b_j}{a_j b_i} = \ln \frac{\alpha(a, b)}{\beta(a, b)}, \quad (4)$$

где

$$\alpha(a, b) = \max_i \frac{b_i}{a_i}, \quad \beta(a, b) = \min_i \frac{b_i}{a_i}.$$

Очевидно, что

$$\alpha(a, b) = \min\{\mu: b \leq \mu a\}, \quad \beta(a, b) = \max\{\lambda: \lambda a \leq b\}. \quad (5)$$

Лемма 2. Пусть оператор H переводит положительные векторы в положительные векторы и является монотонным и положительно однородным первой степени. Тогда

$$\alpha(H(x), H(y)) \leq \alpha(x, y), \quad \beta(H(x), H(y)) \geq \beta(x, y).$$

для всех $x, y \gg 0$.

Доказательство. Рассмотрим (5). Если $\lambda x \leq y \leq \mu x$, то $\lambda H(x) \leq H(y) \leq \mu H(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \{\mu: y \leq \mu x\} &\subset \{\mu: H(y) \leq \mu H(x)\}, \\ \{\lambda: \lambda x \leq y\} &\subset \{\lambda: \lambda H(x) \leq H(y)\}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\min\{\mu: y \leq \mu x\} &\geq \min\{\mu: H(y) \leq \mu H(x)\}, \\ \max\{\lambda: \lambda x \leq y\} &\leq \max\{\lambda: \lambda H(x) \leq H(y)\},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. В условиях леммы 2

$$\theta(H(x), H(y)) \leq \theta(x, y) \quad (6)$$

для всех $x, y \gg 0$.

Доказательство немедленно следует из представления (4) и леммы 2.

Число

$$\delta(Q) = \sup_{x, y \in Q} \theta(x, y)$$

называется диаметром Гильберта множества $Q \subset \mathbf{R}_+^n$. Рассмотрим диаметр Гильберта для множества $C(\mathbf{R}_+^n)$, которое является образом $\mathbf{R}_+^n$ при линейном соответствии с положительной квадратной матрицей C . Как показано в [10],

$$\delta(C(\mathbf{R}_+^n)) = \Delta = \ln B, \quad (7)$$

где

$$B = \max_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \frac{c_{\alpha\beta} c_{\gamma\delta}}{c_{\alpha\delta} c_{\gamma\beta}}.$$

Заметим, что

$$\Delta = \max_{\beta, \delta} \theta(C^\beta, C^\delta), \quad (8)$$

где C^i — i -й столбец матрицы C .

Поскольку $C(\mathbf{R}_+^n)$ — это множество всех линейных комбинаций с положительными коэффициентами столбцов матрицы C , равенства (7), (8) означают, что гильбертово расстояние между любыми такими комбинациями не больше, чем гильбертово расстояние между любыми двумя столбцами. Аналогичное свойство справедливо для экстремального матричного оператора.

Предложение 1. Если $x > 0$, $y > 0$, и C — матрица с положительными элементами, то

$$\theta(C \circ x, C \circ y) \leq \Delta.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$A = \frac{c_{\mu j} x_j}{\max_k c_{\mu k} y_k} \frac{c_{\nu l} y_l}{\max_k c_{\nu k} x_k},$$

где μ, ν, j, l — произвольные фиксированные индексы. Если $x_j y_l > 0$, то

$$\begin{aligned}\max_k c_{\mu k} y_k &\geq c_{\mu l} y_l, \\ \max_k c_{\nu k} x_k &\geq c_{\nu j} x_j,\end{aligned}$$

следовательно,

$$A \leq \frac{c_{\mu j} x_j}{c_{\mu l} y_l} \frac{c_{\nu l} y_l}{c_{\nu j} x_j} = \frac{c_{\mu j} c_{\nu l}}{c_{\mu l} c_{\nu j}} \leq B.$$

При $x_j y_l = 0$, очевидно, $A \leq B$.

Поскольку неравенство справедливо при всех индексах,

$$\max_{\mu} \frac{\max_j c_{\mu j} x_j}{\max_k c_{\mu k} y_k} \max_{\nu} \frac{\max_l c_{\nu l} y_l}{\max_k c_{\nu k} x_k} \leq B.$$

Мы пришли к (8).

Оператор H называется сжимающим, если существует такое число $\nu(H) \in (0, 1)$, что

$$\theta(H(x), H(y)) \leq \nu(H) \theta(x, y)$$

для всех векторов $x, y \gg 0$.

Лемма 3. Если C — положительная матрица размера $m \times n$, то оператор C (который отображает $\mathbf{R}_+^n$ в $\mathbf{R}_+^m$) является сжимающим.

Доказательство. Для случая $m = n$ утверждение доказано в [10].

Если $m < n$, дополним матрицу C новыми $n - m$ строками, повторяющими m -ю строку. Для получившейся квадратной матрицы $\bar{C}$

$$\theta(Cx, Cy) \leq \theta(\bar{C}x, \bar{C}y) \leq \nu(\bar{C}) \theta(x, y),$$

где $\nu(\bar{C}) \in (0, 1)$.

Если $m > n \geq 2$, рассмотрим множество J всех n -элементных подмножеств индексного множества $\{1, 2, \dots, m\}$. Для каждого $I \in J$ определена подматрица C_I размера $n \times n$. Тогда

$$\theta(Cx, Cy) = \max_{I \in J} \theta(C_I x, C_I y) \leq \max_{I \in J} \nu(C_I) \theta(x, y)$$

для любых $x, y \gg 0$, где $\nu(C_I) \in (0, 1)$, $I \in J$.

Теперь укажем одно полезное представление дискретного сублинейного оператора.

Для дискретного сублинейного оператора (1) введем матрицу A размера $(\sum_{i=1}^n |A_i|) \times n$, где $|A_i|$ — число элементов множества A_i , $i = 1, \dots, n$. Строками $1, 2, \dots, |A_1|$ матрицы A являются векторы из множества A_1 , для $k = 2, \dots, n$ строками $\sum_{i=1}^{k-1} |A_i| + 1, \dots, \sum_{i=1}^{k-1} |A_i| + |A_k|$ являются векторы из множества A_k , соответственно.

Введем такую матрицу P размера $n \times (\sum_{i=1}^n |A_i|)$, для которой элементы на местах $1, 2, \dots, |A_1|$ первой строки и элементы на местах $\sum_{i=1}^{k-1} |A_i| + 1, \dots, \sum_{i=1}^{k-1} |A_i| + |A_k|$ k -й строки для $k = 2, \dots, n$ равны 1, а все остальные элементы равны 0.

Легко видеть, что дискретный сублинейный оператор H является суперпозицией двух дискретных сублинейных операторов

$$H(x) = P \circ Ax, \quad (9)$$

где A — линейный (матричный) оператор, а $P \circ$ — экстремальный матричный оператор.

Теорема 2. Пусть H — дискретный сублинейный оператор, и все элементы $p \in A_i$, $i = 1, \dots, n$, положительны (или, что эквивалентно, все матрицы $A(f)$, $f \in F$, положительны). Тогда H — сжимающий оператор.

Доказательство. Используем представление (9). Согласно теореме 1 оператор P_0 не расширяющий. Согласно лемме 3, оператор A сжимающий. Отсюда следует доказываемое.

Заметим, что экстремальный матричный оператор, вообще говоря, не является сжимающим.

Пример 1. Рассмотрим последовательности

$$x^{t+1} = C \circ x^t, \quad y^{t+1} = C \circ y^t,$$

где

$$x^0 = (2, 1, 2)', \quad y^0 = (1, 1, 1)', \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\theta(x^0, y^0) \approx 0.69$, $\theta(x^1, y^1) = \theta(x^2, y^2) \approx 0.29$ и $\theta(x^t, y^t) = 0$ для всех $t \geq 3$. Таким образом, оператор $C \circ$ оказывает сжимающее действие на пары (x^0, y^0) и (x^2, y^2) , но не является сжатием для (x^1, y^1) .

Следствие 1. В условиях теоремы 2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(H^t(x), H^t(y)) = 0$$

для всех векторов $x, y \gg 0$.

Следствие 2. Для любых векторов $x, y \gg 0$ последовательности $H^t(x)$ и $H^t(y)$ асимптотически пропорциональны, т.е. существует такое число $\mu > 0$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(H^t(x))_i}{(H^t(y))_i} = \mu, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Доказательство. Последовательности

$$M^t = \alpha(H^t(y), H^t(x)), \quad \mu^t = \beta(H^t(y), H^t(x))$$

согласно лемме 2 удовлетворяют неравенствам

$$M^0 \geq M^1 \geq \dots \geq M^t \geq \dots \geq \mu^t \geq \dots \geq \mu^1 \geq \mu^0.$$

Следовательно, существуют пределы

$$M = \lim_{t \rightarrow \infty} M^t, \quad \mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^t,$$

при этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(H^t(x), H^t(y)) = \ln \frac{M}{\mu},$$

и, согласно следствию 1, $M = \mu$, откуда следует (10).

Следствие 3. Оператор H имеет не более одного (с точностью до множителя) положительного собственного вектора.

Доказательство. Пусть $x, y \gg 0$ — собственные векторы с собственными числами α, β соответственно. Из (10) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^t \frac{x_i}{y_i} = \mu > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Неравенство $\alpha/\beta < 1$ противоречило бы положительности μ . Следовательно, $\alpha = \beta$, и из (11) следует, что векторы x, y пропорциональны.

Следствие 4. В условиях теоремы 2 оператор H глобально устойчив.

Доказательство. Из (10) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(H^t(x))_i}{\alpha^t \bar{x}_i} = \mu, \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Левый собственный элемент

Будем говорить, что положительно однородная первой степени функция $f: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f \neq 0$, является левым собственным элементом оператора $H: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}_+$, если

$$f(H(x)) = \alpha f(x)$$

для каждого вектора $x \in \mathbf{R}_+^n$, где α — собственное число.

Заметим, в частности, что вектор y является левым собственным вектором неотрицательной матрицы A в том и только том случае, когда скалярное произведение $[y, \cdot]$ является левым собственным элементом оператора $A \cdot$. Аналогичные свойства имеют место для экстремальных матричных операторов.

Теорема 3. Для глобально устойчивого оператора H существует единственный (с точностью до множителя) левый собственный элемент.

Доказательство. Докажем существование. Покажем, что функция $c(x)$ из определения глобальной устойчивости является левым собственным элементом оператора H . Пусть $x \geq 0$, $y = H(x)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{-t} H^t(x) = c(x) \bar{x}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{-t} H^t(y) = c(y) \bar{x}.$$

Равенство $H^t(y) = H^{t+1}(x)$ влечет равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{-t} H^t(y) = \alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{-t} H^t(x).$$

Следовательно, $c(y) = \alpha c(x)$, т. е. $c(H(x)) = \alpha c(x)$ для каждого $x \geq 0$.

Докажем единственность. Пусть $p(x)$ — левый собственный элемент. Можно подобрать такой множитель β , что $\beta p(\bar{x}) = \bar{c}(x) = 1$. Пусть x — произвольный вектор, для которого $\beta p(x) = 1$. В силу однородности, достаточно показать, что $c(x) = 1$.

Поскольку βp — собственный элемент, выполняется равенство $\alpha^{-t}\beta p(H^t(x)) = 1$ для всех $t = 1, 2, \dots$. С другой стороны, в силу глобальной устойчивости,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{-t} H^t(x) = c(x)\bar{x},$$

т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^{-t} \beta p(H^t(x)) = c(x).$$

Следовательно, $c(x) = 1$.

Следующая теорема указывает левый собственный элемент для дискретного сублинейного оператора.

Теорема 4. В обозначениях леммы 1, пусть матрица $A(\hat{f})$ единственна, и ее левый собственный вектор $\hat{p}$ положителен. Тогда существует такое конечное множество $\mathcal{P}$ неотрицательных векторов, что дискретная сублинейная функция

$$f(x) = \max_{p \in \mathcal{P}} [p, x]$$

является левым собственным элементом дискретного сублинейного оператора H .

Напомним, что точка $b \in B$ называется крайней точкой множества $B \subset \mathbf{R}_+^n$, если не существует таких точек $b_1, b_2 \in B$, что $b = \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$ для некоторого числа $\lambda \in (0, 1)$. Точка $b \in B$ называется паретовой, если не существует такой точки $a \in B$, что $a > b$. Через $\text{Par } B$ обозначим множество крайних паретовых точек в B .

Предположим, что выполняются условия теоремы 4. Рассмотрим последовательность множеств

$$\mathcal{P}_0 = \{\hat{p}\}, \quad \mathcal{P}_{t+1} = \text{Par } \alpha^{-1}\{pA(f) : p \in \mathcal{P}_t, f \in F\}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Лемма 4. Последовательность $\mathcal{P}_t$, $t = 0, 1, \dots$, стабилизируется, т.е. существуют такое конечное множество $\mathcal{P}$ и такое натуральное число T , что $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}$ для всех $t > T$, и

$$\mathcal{P}_t = \text{Par } \alpha^{-1}\{pA(f) : p \in \mathcal{P}, f \in F\}. \quad (13)$$

Доказательство. В качестве T будем использовать число, указанное в лемме 1. Каждому вектору $\bar{p} \in \mathcal{P}_t$ соответствует такой набор матриц $A(\bar{f}_k)$, $k = 1, \dots, t$, что

$$\bar{p} = \alpha^{-t} \hat{p} A(\bar{f}_1) A(\bar{f}_2) \dots A(\bar{f}_t).$$

Пусть $t > T$. Покажем, что матрицы $A(\bar{f}_1), \dots, A(\bar{f}_{t-T})$ совпадают с $A(\hat{f})$. Действительно, для вектора $\bar{p}$ можно найти такой вектор $x > 0$, что

$$[\bar{p}, x] = \max_{p \in \mathcal{P}_t} [p, x].$$

Справедливо равенство

$$\hat{p} A(\bar{f}_1) \dots A(\bar{f}_t) x = \max_{f_1, \dots, f_t} \hat{p} A(f_1) \dots A(f_t) x. \quad (14)$$

С другой стороны, согласно лемме 1, для каждого набора $A(f_i)$, $i = 1, \dots, t$, такого, что $A(f_\tau) \neq A(\hat{f})$ для некоторого $\tau \leq t - T$, существует другой набор $A(\tilde{f}_i)$, $i = 1, \dots, t$, где $A(\tilde{f}_i) = A(\hat{f})$ для всех $i \leq t - T$, и

$$A(\tilde{f}_1)A(\tilde{f}_2) \dots A(\tilde{f}_t)x > A(f_1)A(f_2) \dots A(f_t)x.$$

Поскольку $\hat{p} \gg 0$, выполняется неравенство

$$\hat{p}A(\tilde{f}_1) \dots A(\tilde{f}_t)x > \hat{p}A(f_1) \dots A(f_t)x.$$

Следовательно, в (14) $A(\tilde{f}_i) = A(\hat{f})$ для всех $i \leq t - T$. Это значит, что

$$\bar{p} = \alpha^{-t} \hat{p} A(\tilde{f}_{t-T+1}) A(\tilde{f}_{t-T+2}) \dots A(\tilde{f}_t).$$

Другими словами, при $t > T$ множество $\mathcal{P}_t$ может быть представлено как

$$\mathcal{P}_t = \mathcal{P} = \text{Par}\{\bar{p} = \alpha^{-t} \hat{p} A(f_1) A(f_2) \dots A(f_T) : f_1, f_2, \dots, f_T \in F\}.$$

Здесь $f_i = \tilde{f}_{t-T+i}$. Множество $\mathcal{P}$ конечное. Из (12) и $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_{t+1}$, $t > T$ следует (13).

Доказательство теоремы 4. Пусть $\mathcal{P}$ — множество, указанное в лемме 4. Согласно (13)

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \alpha[p, x] = \max_{p \in \mathcal{P}} \max_{f \in F} [pA(f), x], \quad x > 0.$$

Для любых фиксированных векторов $p > 0$, $x > 0$

$$\max_{f \in F} [pA(f), x] = \sum_{i=1}^n p_i \max_{a \in A_i} [a, x] = [p, H(x)].$$

Следовательно,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} [p, H(x)] = \alpha \max_{p \in \mathcal{P}} [p, x], \quad x > 0.$$

Пример 2. Рассмотрим дискретный сублинейный оператор H вида (1), для которого

$$A_1 = \{(1, 2), (2, 0)\}, \quad A_2 = \{(2, 1), (0, 2)\}.$$

Соответствующее семейство матриц есть

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для

$$A(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

спектральный радиус равен $\alpha = 3$, левый собственный вектор равен $\hat{p} = (3, 3)$. Для всех остальных матриц семейства спектральные радиусы равны 2. Ясно, что

$$\mathcal{P}_3 = \{(3, 3)\}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{(3, 3), (1, 4), (4, 1)\}.$$

Левый собственный элемент оператора H равен

$$f(x) = \max_{p \in \mathcal{P}} [p, x]. \quad (15)$$

Заметим, что множество $\mathcal{P}$ можно было бы использовать для ускорения вычисления значений H в различных точках. Поставим в соответствие каждому элементу $p \in \mathcal{P}$ такую матрицу $A(p) \in \mathcal{A}$, что $\alpha^{-1}pA(p) \in \mathcal{P}$. В нашем примере

$$A((3,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A((1,4)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A((4,1)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $H(x)$ найдем точку максимума $p(x) \in \mathcal{P}$ в (15). Тогда $H(x) = A(p(x))x$. Например, для $x = (1,3)'$ максимум в (15) достигается при $p(x) = (1,4)$. Тогда

$$H((1,3)') = A((1,4))(1,3)' = (7,6)'.$$

Симметричные лемме 4 и теореме 4 результаты справедливы для дискретного суперлинейного оператора.

4. Приложение в экономической динамике

В качестве примера применения левого собственного элемента рассмотрим задачу вычисления эффективного функционала. Определим это понятие. Пусть для каждого $x \in \mathbf{R}_+^n$ задано множество $a(x) \subset \mathbf{R}_+^n$ состояний, в которые можно непосредственно перейти из x , причем $a(x)$ — суперлинейное точечно-множественное отображение (см. [9]). Последовательность $\{x^t\}$, $t = 0, 1, \dots$, называется эффективной траекторией, если $x^{t+1} \in a(x^t)$, и x^{t+1} является паретовой точкой множества $a^{t+1}(x^0)$, $t = 0, 1, \dots$. В [9, 17] для весьма широкого класса отображений показано, что если функция $Q: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ (называемая эффективным функционалом) обладает тем свойством, что

$$\gamma Q(x) = \max_{y \in a(x)} Q(y)$$

для всех $x > 0$, где γ — положительная постоянная, то всякая пошагово оптимальная траектория $\{x^t\}$,

$$Q(x^{t+1}) = \max_{x \in a(x^t)} Q(x),$$

является эффективной. Таким образом, эффективный функционал, если он известен, дает простой способ построения эффективных траекторий.

Отыщем эффективный функционал для модели Неймана–Леонтьева (см. [1, 18]). В модели рассматривается n производственных отраслей; каждая отрасль i производит единственный продукт i и располагает $k(i) \geq 1$ альтернативными производственными процессами. При производстве единицы i -го продукта с использованием k -го процесса, $1 \leq k \leq k(i)$, требуется a_{kj} единиц j -го продукта, $j = 1, 2, \dots, n$. Различные производственные процессы могут смешиваться. Таким образом, i -я отрасль описывается конечным множеством A_i неотрицательных векторов $a_i^k = (a_{ij}^k)$, $k = 1, \dots, k(i)$.

Двойственной для модели Неймана–Леонтьева является модель с отображением

$$a^*(x) = \{y: y \leq R(x)\},$$

где R — дискретный суперлинейный оператор,

$$R_i(x) = \min_{r \in A_i} [r, x], \quad i = 1, \dots, n.$$

Лемма 5. *Левый собственный элемент $f(x)$ дискретного суперлинейного оператора R является эффективным функционалом модели, двойственной для модели Неймана–Леонтьева.*

Доказательство. Для любых $x > 0, y \in a^*(x)$.

$$\alpha f(x) = f(R(x)) \geq f(y).$$

При этом $R(x) \in a^*(x)$. Следовательно,

$$\alpha f(x) = \max_{y \in a^*(x)} f(y),$$

и, значит, $f(x)$ — эффективный функционал.

Сопряженной функцией для суперлинейной функции $g: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ называется

$$g^0(x) = \inf\{[y, x]: g(x) \geq 1, x \gg 0\} = \inf\left\{\frac{[y, x]}{g(x)}: x \gg 0\right\}.$$

Теорема 5. *Сопряженная функция f^0 для функции f , указанной в лемме 5, является эффективным функционалом для модели Неймана–Леонтьева.*

Доказательство. Как показано в [9], сопряженная функция для эффективного функционала является эффективным функционалом для двойственной модели. Отсюда и из леммы 5 следует доказываемое утверждение.

Пример 3. Рассмотрим модель Неймана–Леонтьева с двумя отраслями, которые располагают следующими множествами альтернативных векторов затрат:

$$A_1 = \{(2, 4), (6, 2)\}, \quad A_2 = \{(2, 4), (4, 3)\}.$$

Соответствующий дискретный суперлинейный оператор H задан семейством матриц

$$\mathcal{A} = \{A(f), f \in F\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Матрица

$$A(\underline{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет спектральный радиус $\underline{\alpha} = 6$. Для остальных матриц семейства спектральные радиусы больше.

Левый фробениусов собственный вектор матрицы $A(\underline{f})$ равен $\underline{p} = (1, 2)$. Последовательность множеств

$$\mathcal{P}_0 = \{\underline{p}\}, \quad \mathcal{P}_{t+1} = \text{rag } \underline{\alpha}^{-1}\{pA(f): p \in \mathcal{P}_t, f \in F\}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

стабилизируется,

$$\mathcal{P} = \{(1, 2), (5/3, 5/3), (7/3, 4/3)\}.$$

Через rag обозначено множество крайних нижних паретовых точек. Точка $b \in B \subset \mathbf{R}_+^n$ называется нижней паретовой точкой множества B , если не существует точек $a \in B$, для которых $a < b$.

Левым собственным элементом дискретного суперлинейного оператора является функция $f(x) = \min_{p \in \mathcal{P}} [p, x]$.

Для построения сопряженной функции находим множество Q крайних парето-вых точек многогранника $\{x: [p, x] \geq 1, p \in \mathcal{P}, x > 0\}$. Ясно, что

$$Q = \{(1, 0), (0, 3/4), (1/5, 2/5)\}.$$

Искомый эффективный функционал модели Неймана–Леонтьева равен

$$f^0(x) = \min_{q \in Q} [q, x].$$

Список литературы

1. Моришима М. *Равновесие, устойчивость, рост*. Наука, Москва, 1972.
2. Воробьев Н. Н. Экстремальная алгебра положительных матриц. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik* (1967) **3**, 39–71.
3. Sladky K. On dynamic programming recursions for multiplicative Markov decisions chains. *Math. Program. Study* (1976) **6**, 216–226.
4. Sladky K. Bounds on discrete dynamic programming recursions I. Models with nonnegative matrices. *Kybernetika* (1980) **16**, 526–547.
5. Zimmerman U. Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures. *Ann. Discrete Mathematics* (1981) **10**, 1–380.
6. Zimmerman U. On max-separable optimization problems. *Ann. Discrete Mathematics* (1984) **19**, 357–362.
7. Zijm W. H. M. Dynamic programming models with general nonnegative matrices. *Technische Hochschule Leipzig, Wissenschaftliche Zeitschrift* (1984) **8**, №3, 145–153.
8. Матвеевко В. Д. Оптимальные траектории схемы динамического программирования и экстремальные степени неотрицательных матриц. *Дискретная математика* (1990) **2**, №1, 59–71.
9. Рубинов А. М. *Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам*. Наука, Ленинград, 1980.
10. Seneta E. *Nonnegative Matrices*. Allen and Unwin, London, 1975.
11. Cuninghame-Green R. A. *Minimax Algebra*. Springer, Berlin, 1979.
12. Matveenko V. Development with positive externalities. The case of the Russian economy. *J. Policy Modeling* (1995) **17**, №3, 203–221.
13. Матвеевко В. Д. Применение модели Неймана для исследования схемы динамического программирования. *Автоматика и телемеханика* (1988) №11, 62–70.
14. Дудников П. И., Самборский С. Н. *Эндоморфизмы полумодуля над полукольцом с идемпотентной операцией*. Препринт. ИМ АН УССР, Киев, 1987.
15. Дудников П. И., Самборский С. Н. Спектры эндоморфизмов полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией. *Доклады АН СССР* (1990) **308**, №4, 780–783.
16. Маслов В. П., Колокольцев В. Н. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении*. Наука, Москва, 1994.
17. Рубинов А. М., Борисов К. Ю., Десницкая В. Н., Матвеевко В. Д. *Оптимальное управление в агрегированных моделях экономики*. Наука, Ленинград, 1991.
18. Burmeister E., Dobell A. R. *Mathematical Theories of Economic Growth*. Macmillan, London, 1970.