Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Михеева, Построение в P_k максимальных классов, не имеющих конечных базисов, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 2, 137–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:03:44

УДК 519.716

Построение в P_k максимальных классов, не имеющих конечных базисов

© 1998 г. Е. А. Михеева

Строятся замкнутые классы в k -значной логике P_k , $k \geq 3$, максимальные среди всех замкнутых классов без конечного базиса, т.е. такие классы, которые сами не имеют конечных базисов, а все их собственные замкнутые надклассы конечными базисами обладают. Для краткости такие классы мы называем максимальными. Показывается, что в P_k при любом $k \geq 3$ максимальные классы существуют, причем их множество не более чем счетно. Для $k = 3$ указывается максимальный класс, имеющий в решетке $\mathcal{C}_k$ всех замкнутых классов k -значной логики глубину 5, а для $k > 3$ описаны аналогичные классы глубины 3.

1. Введение

Проблема описания решетки (по включению) $\mathcal{C}_k$ всех замкнутых классов k -значной логики P_k решена полностью лишь в случае $k = 2$ (см. [1, 2]). Изучение $\mathcal{C}_k$ при $k \geq 3$ наталкивается на значительные трудности, поскольку в P_k есть классы, не имеющие конечного базиса, и $\mathcal{C}_k$ имеет мощность континуума (см. [3]).

Важную роль при исследовании $\mathcal{C}_k$ играют замкнутые классы, обладающие конечным базисом. В связи с поисками достаточных условий конечной порожденности замкнутых классов С. В. Яблонским была поставлена перед автором задача построения примера максимального класса в P_k и полного описания множества всех таких классов.

Саломеа (см. [4]) для каждого k , не свободного от квадратов, построил замкнутый класс, максимальный среди замкнутых классов без конечного базиса, содержащихся в классе линейных функций из P_k . Как известно, в этом случае класс линейных функций не является даже предполным.

Автором данной работы построены примеры максимальных классов в P_k для $k \geq 3$ (см. [5, 6]). Доказано, что для каждого k максимальные классы в P_k существуют, их множество не более чем счетно и каждый замкнутый класс без конечного базиса содержится в некотором максимальном. Для каждого k построен максимальный класс, лежащий в классе U_k сохранения разбиения множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$ на два подмножества: одноэлементное и $(k-1)$ -элементное, и имеющий в $\mathcal{C}_k$ глубину (и высоту) 5 при $k = 3$ и глубину (и высоту) 3 при $k > 3$. Из этих результатов вытекает достаточное условие конечной порожденности: замкнутый класс, не содержащийся целиком ни в одном из максимальных классов, обладает конечным базисом.

2. Максимальные элементы семейства $\mathfrak{B}_k$

Основные понятия из теории k -значных логик читатель может найти в [1, 2, 7, 8]. Напомним некоторые из них и введем ряд обозначений, употребляемых в дальнейшем.

Под k -значной логикой P_k , $k \geq 2$, понимается множество всех функций (от любого числа переменных, взятых из списка $W_k = \{w_{k_1}, w_{k_2}, \dots\}$), переменные в которых пробегает множество $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ и значения которых лежат в E_k , с операцией суперпозиции над этими функциями. Переменные обозначаем метасимволами $x, y, \dots$ с индексами или без них. Не теряя общности, считаем, что список переменных W_k для разных k один и тот же. Наряду с обозначением $f(x_1, \dots, x_n)$ используем запись $f(\tilde{x}^n)$ или $f(\tilde{x})$. Через $[F]$ обозначаем замыкание множества функций F относительно операции суперпозиции. Множество F называется замкнутым классом, если $[F] = F$. Система функций E называется полной в замкнутом классе F , если $[E] = F$. Если, кроме того, $[E'] \neq F$ для любого собственного подмножества E' множества E , то E называется базисом в F . Заметим, что для существования конечного базиса в F достаточно существования в F конечной полной системы.

Зафиксируем обозначения некоторых классов из P_k , $k \geq 2$. Пусть O — класс функций, принимающих только значение 0; C — класс функций, каждая из которых принимает не более $k-1$ разных значений; S_k — класс одноместных функций $f(x)$, принимающих ровно k разных значений; T — класс функций, имеющих не более одной существенной переменной или принимающих не более $k-1$ разных значений.

Обозначим через L класс линейных функций из P_2 .

При $k \geq 3$ обозначим через $\mathfrak{B}_k$ семейство всех замкнутых классов из P_k , не имеющих конечного базиса.

Множество различных классов из $\mathfrak{C}_k$ называется цепью, если оно линейно упорядочено по включению. Цепь

$$F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n$$

называется неуплотняемой цепью длины n между F и P_k , если $F_0 = P_k$, $F_n = F$ и F_{i+1} — предполный класс в F_i для каждого $i < n$. Длина наименьшей конечной неуплотняемой цепи называется глубиной, а длина наибольшей конечной неуплотняемой цепи высотой класса F в структуре $\mathfrak{C}_k$.

Через $A_1 \times \dots \times A_n$ обозначаем декартово произведение множеств $A_1, \dots, A_n$; декартово произведение n одинаковых множеств $A \times \dots \times A$ называется n -й декартовой степенью множества A и обозначается A^n , $n \geq 1$; мощность множества A будем обозначать $|A|$. Набор $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ обозначаем через $\tilde{a}^n$ или $\tilde{a}$; через $\bar{0}$, $\bar{1}$ и $\bar{2}$ обозначаем наборы $(0, \dots, 0)$, $(1, \dots, 1)$ и $(2, \dots, 2)$ соответственно.

Покажем, что максимальные элементы в семействе $\mathfrak{B}_k$ существуют, и оценим мощность множества максимальных элементов.

Класс, являющийся объединением всех классов из цепи B , назовем верхним пределом для B . Легко показать, что верно следующее утверждение.

Лемма 1. *Верхний предел цепи B принадлежит $\mathfrak{C}_k$. Если в цепи B нет наибольшего элемента, то ее верхний предел принадлежит $\mathfrak{B}_k$.*

Теорема 1. *Каждый элемент из $\mathfrak{B}_k$ содержится в некотором максимальном элементе из $\mathfrak{B}_k$. Множество максимальных элементов не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть H — верхний предел цепи B элементов из $\mathfrak{B}_k$. Очевидно, что H — верхняя грань для B . Если в B есть наибольший элемент, то он совпадает с H и, значит, $H \in \mathfrak{B}_k$. Если в B нет наибольшего элемента, то $H \in \mathfrak{B}_k$ по лемме 1. Следовательно, каждая цепь элементов из $\mathfrak{B}_k$ имеет в $\mathfrak{B}_k$ верхнюю грань. По лемме Цорна каждый элемент из $\mathfrak{B}_k$ содержится в максимальном элементе из $\mathfrak{B}_k$.

Пусть, максимальный элемент F из $\mathfrak{B}_k$ является классом последовательно бесконечной высоты. Тогда (см. определение в п.1 [9]) найдется последовательность функций $f_1, \dots, f_n, \dots$, не лежащих в F , такая, что $f_{n+1} \notin H_n$, для каждого $n \geq 1$, где

$$H_n = [F \cup \{f_1, \dots, f_n\}], \quad n \geq 1.$$

Следовательно, цепь

$$H_1 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$$

не имеет наибольшего элемента. По лемме 1 верхний предел H этой цепи принадлежит $\mathfrak{B}_k$. Поскольку $F \subseteq H$ и $F \neq H$, получаем противоречие с максимальностью элемента F . Значит, F не является классом последовательно бесконечной высоты.

Согласно [9] множество элементов из $\mathfrak{C}_k$, не являющихся классами последовательно бесконечной высоты, счетно. Значит, множество максимальных элементов в $\mathfrak{B}_k$ не более чем счетно.

Замечание 1. Пусть $F \in \mathfrak{C}_k$, $\mathfrak{B}(F)$ — семейство элементов из $\mathfrak{B}_k$, содержащихся в F . Если $F \in \mathfrak{B}(F)$, то F — максимальный элемент в $\mathfrak{B}(F)$. Если F имеет конечный базис и $\mathfrak{B}(F) \neq \emptyset$, то доказательство теоремы 1 переносится на $\mathfrak{B}(F)$. Следовательно, верна более общая теорема.

Теорема 2. Каждый элемент из $\mathfrak{B}(F)$ содержится в некотором максимальном элементе из $\mathfrak{B}(F)$. Множество максимальных элементов не более чем счетно.

3. Отображения решеток $\mathfrak{C}_2$ и $\mathfrak{C}_{k-1}$ в решетку замкнутых классов из U_k .

Класс U^*

Охарактеризуем подходящим образом класс U_k и воспользуемся этой характеристикой для построения ряда замкнутых подклассов класса U_k по замкнутым классам из P_2 и P_{k-1} .

Множества

$$\varepsilon_0 = \{0, 1, \dots, k-2\}, \quad \varepsilon_1 = \{k-1\}$$

называем блоками. Для каждого $n \geq 2$ разбиение $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ множества E_k индуцирует разбиение множества E_k^n на 2^n блоков

$$\varepsilon_{\tilde{\alpha}} = \varepsilon_{\alpha_1} \times \dots \times \varepsilon_{\alpha_n}, \quad \tilde{\alpha} \in E_2^n.$$

Набор $\tilde{\alpha}$, употребляемый как индекс блока, в развернутом виде записывается как $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$.

Исходя из определения класса U_k (см. [7]), нетрудно видеть, что функция $f(\tilde{x}^n)$ принадлежит U_k тогда и только тогда, когда она каждый блок $\varepsilon_{\tilde{\alpha}}$ отображает целиком либо в блок ε_0 , либо в блок ε_1 , т.е. для каждого $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ справедливо одно из включений

$$f(\varepsilon_{\tilde{\alpha}}) \subseteq \varepsilon_0, \quad f(\varepsilon_{\tilde{\alpha}}) \subseteq \varepsilon_1, \quad (1)$$

где

$$f(\varepsilon_{\tilde{\alpha}}) = \{f(\tilde{a}) : \tilde{a} \in \varepsilon_{\tilde{\alpha}}\}.$$

Очевидно, что в U_k содержатся все константы $0, 1, \dots, k-1$ и все селекторные функции

$$I_i^n(\tilde{x}^n) = x_i, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Используя характеризацию (1), свяжем с $f(\tilde{x}) \in U_k$, с одной стороны, функцию $f_\varphi(\tilde{x})$ из P_2 и, с другой стороны, 2^n функций $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})$ из $P_{k-1} \cup \{k-1\}$, установив тем самым связь между классами из U_k и классами из P_2 и P_{k-1} .

Для функции $f(\tilde{x}) \in U_k$ определяем функцию $f_\varphi(\tilde{x}) \in P_2$, положив

$$f_\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\varepsilon_{\tilde{x}}) \subseteq \varepsilon_0, \\ 1, & \text{если } f(\varepsilon_{\tilde{x}}) \subseteq \varepsilon_1. \end{cases} \quad (2)$$

Замечание 2. Для константы $c \in E_k$ справедливы равенства $c_\varphi = 0$ при $c < k-1$ и $c_\varphi = 1$ при $c = k-1$. Отсюда следует, что набор

$$\tilde{a}_\varphi = (a_{1\varphi}, \dots, a_{n\varphi}), \quad (3)$$

где $\tilde{a} \in E_k^n$, есть индекс блока, которому принадлежит набор $\tilde{a}$.

Поскольку f_φ определяется по f согласно (2) однозначно, можно корректно определить отображение Φ , положив

$$\Phi[x] = x \in W_2 \text{ для переменной } x \in W_k,$$

$$\Phi[f(\tilde{x}^n)] = f_\varphi(\tilde{x}^n) \text{ для функции } f(\tilde{x}^n) \in U_k.$$

Лемма 2. Отображение Φ является гомоморфизмом U_k на P_2 .

Доказательство. Легко проверить, что правильной суперпозиции

$$f(g_1(\tilde{x}^m), g_2(\tilde{x}^m), \dots, g_n(\tilde{x}^m)) \quad (4)$$

функций $f(\tilde{y}^n), g_1(\tilde{x}^m), \dots, g_n(\tilde{x}^m)$ соответствует такая же суперпозиция функций $f_\varphi(\tilde{y}^n), g_{1\varphi}(\tilde{x}^m), \dots, g_{n\varphi}(\tilde{x}^m)$ из P_2 . Далее, пусть $g(\tilde{x}) \in P_2$. Определяем функцию $f(\tilde{x}) \in P_k$, положив

$$f(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } g(\tilde{x}_\varphi) = 0, \\ k-1, & \text{если } g(\tilde{x}_\varphi) = 1, \end{cases} \quad (5)$$

где $\tilde{x}_\varphi$ определяется по формуле (3). Очевидно, что $f(\tilde{x}) \in U_k$ и $f_\varphi(\tilde{x}) = g(\tilde{x})$. Таким образом, Φ — гомоморфизм U_k на P_2 .

Определение 1. Множество U_F есть полный прообраз множества F при гомоморфизме Φ .

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Множество U_F является замкнутым классом тогда и только тогда, когда F есть замкнутый класс.

Поставим теперь функции $f(\tilde{x}^n) \in U_k$ в соответствие 2^n функций вида $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{\alpha} \in E_2^n$, определенных на E_{k-1}^n и моделирующих значения функции f на блоке $\varepsilon_{\tilde{\alpha}}$, положив

$$f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = f(x_1^*, \dots, x_n^*),$$

где $x_i^* = x_i$ при $\alpha_i = 0$ и $x_i^* = k - 1$ при $\alpha_i = 1$, $i = 1, \dots, n$. Ясно, что $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})$ либо принадлежит P_{k-1} , либо равна константе $k - 1$. Из сказанного и формулы (2) вытекает следующая связь между $f_{\tilde{\alpha}}$ и f_{φ} :

$$\begin{aligned} f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) \in P_{k-1} &\iff f_{\varphi}(\tilde{\alpha}) = 0; \\ f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = k - 1 &\iff f_{\varphi}(\tilde{\alpha}) = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для $\tilde{\alpha} \in E_2^m$ и набора функций $\tilde{g} = (g_1(\tilde{x}^m), \dots, g_n(\tilde{x}^m))$ положим

$$\tilde{g}_{\varphi}(\tilde{\alpha}) = (g_{1\varphi}(\tilde{\alpha}), \dots, g_{n\varphi}(\tilde{\alpha})).$$

Из формул (6) следует, что i -й элемент в наборе равен нулю, если $(g_i)_{\tilde{\alpha}} \in P_{k-1}$, и равен единице, если $(g_i)_{\tilde{\alpha}} = k - 1$.

Определение 2. U^F — множество функций $f(\tilde{x}) \in U_k$, для которых при любом $\tilde{\alpha}$ либо $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) \in F$, либо $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = k - 1$.

Лемма 3. Если F — замкнутый класс в P_{k-1} , то U^F — замкнутый класс в U_k .

Доказательство. Пусть

$$h(x_1, \dots, x_m) = f(G_1, \dots, G_n),$$

где G_i — функция $g'_i(x_{r_i1}, \dots, x_{r_i t_i})$, которая, как суперпозиция ранга меньшего, чем ранг функции h , лежит в U^F , или G_i — переменная x_{l_i} , $i = 1, \dots, n$. (Переменные $x_{r_i1}, \dots, x_{r_i t_i}, x_{l_i}$ лежат в $\{x_1, \dots, x_m\}$).

Положим

$$g_i(\tilde{x}^m) = \begin{cases} g'_i(x_{r_i1}, \dots, x_{r_i t_i}), & \text{если } G_i \text{ есть } g'_i(x_{r_i1}, \dots, x_{r_i t_i}), \\ I_{l_i}^m(\tilde{x}^m), & \text{если } G_i \text{ есть } x_{l_i}. \end{cases}$$

Ясно, что $g_i \in U^F$, если G_i есть $g'_i(x_{r_i1}, \dots, x_{r_i t_i})$. Для доказательства замкнутости класса U^F достаточно показать, что функция $h(\tilde{x}^m)$ принадлежит U^F , если G_i есть $g'_i(x_{r_i1}, \dots, x_{r_i t_i})$.

По наборам $\tilde{\alpha} \in E_2^m$ и $\tilde{g}$ находим набор $\tilde{\beta} = \tilde{g}_{\varphi}(\tilde{\alpha})$.

Возможны два случая. Пусть $\tilde{\beta} = \tilde{1}$. Тогда

$$h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}^m) = f(k - 1, \dots, k - 1) = f_{\tilde{1}}(\tilde{y}^n).$$

Значит, $h_{\tilde{\alpha}}$ — константа из F или константа $k - 1$.

Пусть теперь $\tilde{\beta} \neq \tilde{1}$. Положим

$$J = \{j: \beta_j = 0\} = \{j_1 < \dots < j_s\}, \quad 1 \leq s \leq n.$$

В функции $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{y})$ переменная y_j фиктивна, если $j \notin J$. Поэтому

$$f_{\tilde{\beta}}(\tilde{y}) = p(y_{j_1}, \dots, y_{j_s})$$

для некоторой функции $p(\tilde{x}^s) \in F$ и

$$h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}^m) = p((g_{j_1})_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}^m), \dots, (g_{j_s})_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}^m)). \quad (7)$$

В равенстве (7) g_{j_i} либо лежит в F , либо есть селекторная функция из P_{k-1} и ее можно заменить на переменную. Так как класс F замкнут, $h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}_m) \in F$. Итак, $h \in U^F$.

Лемма доказана.

По следствию 1 и лемме 3 соответствия $F \rightarrow U_F$ и $G \rightarrow U^G$ будут взаимно однозначными отображениями решеток $\mathfrak{C}_2$ и $\mathfrak{C}_{k-1}$ в решетку замкнутых подклассов класса U_k .

Докажем существование конечных базисов в некоторых классах из U_k .

Пусть $A \subseteq E_k$, $|A| \geq 2$, и C_A — класс функций из P_k , принимающих значения только из множества A . Аналогично тому, как это делается в доказательстве теоремы 7 на стр. 52 в [8] при $|A| = 2$, доказывается следующее утверждение.

Лемма 4. *Класс C_A имеет конечный базис.*

Так как класс U_O (здесь $O \subseteq P_2$) совпадает с C_{ε_0} , получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Класс U_O имеет конечный базис.*

Функция f , определенная формулой (5), лежит в классе U^O (здесь $O \subseteq P_{k-1}$) и определяется однозначно по функции $g \in P_2$. Значит, ограничение Φ на U^O будет изоморфизмом классов U^O и P_2 . Используя результаты Поста [1], получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Каждый замкнутый класс в U^O имеет вид $U_F^O = U^O \cap U_F$ для подходящего класса F из P_2 и имеет конечный базис.*

Рассмотрим класс U^C , который по лемме 3 замкнут.

Лемма 5. *Класс U^C имеет конечный базис.*

Доказательство. Пусть

$$A_1 = \{a_{11}, \dots, a_{1(k-2)}\},$$

...

$$A_{k-1} = \{a_{(k-1)1}, \dots, a_{(k-1)(k-2)}\}$$

— все возможные подмножества мощности $k - 2$ множества ε_0 . При $k = 3$ класс $C_{A_i} = [\{i - 1\}]$, поэтому C_{A_i} имеет конечный базис, $1 \leq i \leq 2$. При $k > 3$ класс C_{A_i} имеет конечный базис по лемме 4.

По функции $f(\tilde{x}^n) \in U^C$ определяем функции $f_i(\tilde{x}^n) \in C_{A_i}$ для $i = 1, \dots, k-1$, полагая $f_i(\tilde{x})$ равной $f(\tilde{x})$, если $f(\varepsilon_{\tilde{x}_\varphi}) \subseteq A_i$, и $f(\varepsilon_{\tilde{x}_\varphi}) \not\subseteq A_j$ для всех $j < i$, и равной a_{i1} в противном случае; и функции $g_i(\tilde{x}^n) \in U^O$ для $i = 1, \dots, k-1$, полагая $g_i(\tilde{x})$ равной $k-1$, если либо $f(\varepsilon_{\tilde{x}_\varphi}) \subseteq \varepsilon_1$, либо $f(\varepsilon_{\tilde{x}_\varphi}) \subseteq A_i$ и $f(\varepsilon_{\tilde{x}_\varphi}) \not\subseteq A_j$ для всех $j < i$, и равной нулю в противном случае.

Пусть функция $r(\tilde{y}^{2k-2}) \in U^C$ определена следующим образом:

$r(\tilde{y}) = y_i$, если $\tilde{y}_\varphi = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, единица стоит на $(k+i-1)$ -м месте и $y_i \in A_i$;

$r(\tilde{y}) = a_{i1}$, если $\tilde{y}_\varphi = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, единица стоит на $(k+i-1)$ -м месте и $y_i \notin A_i$;

$r(\tilde{y}) = k-1$, если $\tilde{y}_\varphi = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, единица стоит на k -м месте;

$r(\tilde{y}) = 0$ в остальных случаях.

Возьмем $\tilde{x} \in E_2^n$. Если $f(\tilde{x}) \neq k-1$, то найдется такое i , что $f(\varepsilon_{\tilde{x}_\varphi}) \subseteq A_i$ и $f(\varepsilon_{\tilde{x}_\varphi}) \not\subseteq A_j$ для всех $j < i$. Тогда

$$\begin{aligned} & r(f_1(\tilde{x}), \dots, f_{k-1}(\tilde{x}), g_1(\tilde{x}), \dots, g_{k-1}(\tilde{x})) \\ & = r(a_{11}, \dots, a_{(i-1)1}, f(\tilde{x}), a_{(i+1)1}, \dots, a_{(k-1)1}, 0, \dots, 0, k-1, 0, \dots, 0) = f(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Если $f(\tilde{x}) = k-1$, то

$$\begin{aligned} & r(f_1(\tilde{x}), \dots, f_{k-1}(\tilde{x}), g_1(\tilde{x}), \dots, g_{k-1}(\tilde{x})) \\ & = r(a_{11}, \dots, a_{(k-1)1}, k-1, \dots, k-1) = k-1 = f(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(\tilde{x}) = r(f_1(\tilde{x}), \dots, f_{k-1}(\tilde{x}), g_1(\tilde{x}), \dots, g_{k-1}(\tilde{x})),$$

то есть функция $f(\tilde{x})$ является суперпозицией функций из $C_{A_1}, \dots, C_{A_{k-1}}$ и функции $r(\tilde{y}^{2k-2})$. Значит, класс U^C имеет конечную полную систему.

Определение 3. Положим $U^* = U_O \cup U^C$.

Следствие 4. Множество U^* является замкнутым классом с конечным базисом.

Доказательство. Пусть функция $h(\tilde{x}^m)$ равна правильной суперпозиции (4). Если $f(\tilde{y}^n) \in U_O$, то $h(\tilde{x}^m) \in U_O$. Если $f(\tilde{y}^n) \in U^C$, то $h(\tilde{x}^m) \in U^C$. Следовательно, U^* — замкнутый класс. А поскольку U_O и U^C имеют конечные базисы, U^* имеет конечную полную систему.

4. Функции со свойством R .

Класс U_R^*

Введем понятия строгой функции и функции, обладающей свойством R . Затем построим подклассы U_R^L и U_R класса U_3 и подклассы U_R^* и U_R^T класса U_k , $k \geq 3$, и докажем их замкнутость.

Определение 4. Функция $f(\tilde{x}) \in U_k$ называется строгой, если найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = k - 1$ и $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$ принимает $k - 1$ разных значений.

Функции из U^* — это функции, которые не принимают значение $k - 1$ или на каждом блоке принимают не более $k - 2$ разных значений, поэтому U^* — класс функций из U_k , не являющихся строгими.

Пусть $K_f = \{\tilde{\alpha}: f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = k - 1\}$, I_f — множество индексов i таких, что x_i — существенная переменная некоторой функции $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$, принимающей $k - 1$ разных значений.

Определение 5. Функция $f(\tilde{x}) \in U_k$ обладает свойством R (или, иначе, есть R -функция), если равенство $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = k - 1$ возможно только для такого набора $\tilde{\alpha}$, у которого $\alpha_i = 1$ для каждого $i \in I_f$.

Если $f \in U_O$, то $K_f = \emptyset$; если $f \in U^C$, то $I_f = \emptyset$. Значит, функции из U^* являются R -функциями. Строгая функция будет R -функцией тогда и только тогда, когда у каждого набора $\tilde{\alpha} \in K_f$ все компоненты с индексами из I_f равны единице.

Замечание 3. При $k = 3$ тот факт, что $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$ принимает $k - 1 = 2$ значений, равносителен тому, что $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$ имеет хотя бы одну существенную переменную.

Определение 6. Множество U_R — это множество всех R -функций из U_3 .

Лемма 6. Множество U_R есть замкнутый класс.

Доказательство. Так как селекторные функции входят в U_R , достаточно показать, что функция $h(\tilde{x}^m)$, равная правильной суперпозиции (4), лежит в U_R , если $f, g_1, \dots, g_n \in U_R$.

Если $f \in U^*$, то, очевидно, $h \in U^*$ и, следовательно, $h \in U_R$. Пусть теперь f — строгая R -функция и h — строгая функция. Покажем, что h — R -функция.

Пусть $i \in I_h$. Найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})$ существенно зависит от x_i . Из равенства (7) следует, что

$$(g_j)_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}^m) \text{ существенно зависит от } x_i, \quad (8)$$

$$f_{\tilde{g}_\varphi(\tilde{\alpha})}(\tilde{y}^n) \text{ существенно зависит от } y_j \quad (9)$$

для некоторого j из множества J , определенного в доказательстве лемме 3. В силу (8) $g_j \notin U^C$. Покажем, что $\tilde{g}_\varphi(\tilde{\beta}) \notin K_f$ для всякого $\tilde{\beta}$, у которого $\beta_i = 0$. Тогда получим, что $\tilde{\beta} \notin K_h$ при $\beta_i = 0$, и что, ввиду произвольности выбора i , функция h есть R -функция.

Если $g_j \in U_O$, то $g_{j\varphi}(\tilde{\beta}) = 0$ для любого $\tilde{\beta}$. Если g_j — строгая R -функция, то из (8) и свойства R для g_j получаем, что $\tilde{\beta} \notin K_{g_j}$ и, значит, $g_{j\varphi}(\tilde{\beta}) = 0$ при $\beta_i = 0$. Из (9) и свойства R для f получаем, что $\tilde{g}_\varphi(\tilde{\beta}) \notin K_f$, если $\beta_i = 0$.

Лемма доказана.

Определение 7. Множество U_R^L — это объединение класса U^* с множеством строгих R -функций из класса U^L , $k = 3$.

Очевидно, что $U_R^L \subseteq U_R$.

Лемма 7. Множество U_R^L есть замкнутый класс.

Доказательство. Пусть функция $h(\tilde{x})$ равна правильной суперпозиции (4), где $f, g_1, \dots, g_n \in U_R^L$. Покажем, что $h \in U_R^L$.

Если $h \in U^*$, то $h \in U_R^L$. Пусть h — строгая функция. По лемме 6 она будет R -функцией. Установим, что $h \in U^L$.

Из доказательства леммы 6 вытекает, что f — строгая R -функция, поскольку h — строгая функция. Возьмем набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h_{\tilde{\alpha}} \neq 2$ ($k - 1 = 2$ при $k = 3$). Тогда $f_{\tilde{\beta}} \neq 2$ и поэтому $f_{\tilde{\beta}} \in L$, где $\tilde{\beta} = \tilde{g}_{\varphi}(\tilde{\alpha})$. Пусть $f_{\tilde{\beta}}$ не является константой. Тогда для функции $h_{\tilde{\alpha}}$ имеет место равенство (7). Не теряя общности, считаем, что в множество J (из доказательства леммы 3) вошли только индексы существенных переменных функции $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{y})$. Допустим, что одна из функций $g_{j_1}, \dots, g_{j_s}$, скажем g_{j_1} , лежит в U_O . Тогда $g_{j_1\varphi}(\tilde{\sigma}) = 0$ для любого $\tilde{\sigma}$. Так как $j_1 \in I_f$ и f — R -функция, то $\tilde{g}_{\varphi}(\tilde{\sigma}) \notin K_f$ для всякого $\tilde{\sigma}$. Следовательно, $K_h = \emptyset$, что противоречит выбору h . Значит, каждая из функций $g_{j_1}, \dots, g_{j_s}$ лежит в $U^C \setminus U_O$ или является строгой R -функцией из U^L , то есть все эти функции входят в U^L . Но тогда $h_{\tilde{\alpha}} \in L$, ввиду равенства (7). Таким образом, $h \in U^L$.

Лемма доказана.

Определение 8. Множество U_R^T — это объединение класса U^* с множеством строгих R -функций из класса U^T ($k \geq 3$; здесь $T \subseteq P_{k-1}$).

При $k = 3$ справедливо включение $U_R^T \subset U_R^L$.

Лемма 8. Множество U_R^T есть замкнутый класс.

Доказательство. Покажем, что функция $h(\tilde{x})$, равная правильной суперпозиции (4), где $f, g_1, \dots, g_n \in U_R^T$, принадлежит U_R^T .

Если $h \in U^*$, то $h \in U_R^T$. Пусть h — строгая функция. Тогда f — строгая R -функция из U_R^T . Пусть $i \in I_h$. Найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})$ существенно зависит от x_i и принимает $k - 1$ разных значений. В этом случае функция $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{y})$, где $\tilde{\beta} = \tilde{g}_{\varphi}(\tilde{\alpha})$, тоже должна принимать $k - 1$ разных значений. Так как $f_{\tilde{\beta}} \in T$, то $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{y}) = p(y_j)$ для некоторой функции $p \in S_{k-1}$ и некоторого j , $1 \leq j \leq n$. Поэтому

$$h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = p((g_j)_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})). \quad (10)$$

Из равенства (10) следует, что функция $(g_j)_{\tilde{\alpha}}$ должна принимать $k - 1$ разных значений. Тогда $(g_j)_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = q(x_r)$ для подходящих r , $1 \leq r \leq m$, и $q \in S_{k-1}$. В силу (10) $r = i$ и равенство (10) превращается в равенство

$$h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = t(x_i), \quad (11)$$

где $t(x) = p(q(x))$ лежит в S_{k-1} .

Далее, $g_{j\varphi}(\tilde{\sigma}) = q_{(0)}(0) = 0$, если $\sigma_i = 0$. Но тогда $\tilde{g}_{\varphi}(\tilde{\sigma}) \notin K_f$ при $\sigma_i = 0$, поскольку f — R -функция. Как в лемме 6, делаем вывод, что h — R -функция. Для любого набора $\tilde{\alpha}$ либо $h_{\tilde{\alpha}} = k - 1$, либо $h_{\tilde{\alpha}} \in C$, либо $h_{\tilde{\alpha}}$ принимает $k - 1$ разных значений. В последнем случае $h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = t(x_i) \in S_{k-1}$ в силу (11). Следовательно, $h \in U_R^T$.

Определение 9. R -функция $f(\tilde{x}^n)$ обладает свойством R^* (или, иначе, есть R^* -функция), если из того, что

$$f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) \text{ существенно зависит от } x_i \text{ и принимает } k - 1 \text{ разных значений,} \quad (12)$$

$$f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) \text{ существенно зависит от } x_j \text{ и принимает } k - 1 \text{ разных значений,} \quad (13)$$

причем $i \neq j$, следует, что $(\alpha_i, \alpha_j) \neq (\beta_i, \beta_j)$.

Определение 10. Множество U_R^* — это множество всех R^* -функций, $k \geq 3$.

Из определений 9 и 10 легко вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. Справедливы включения

$$U^* \subset U_R^* \subset U_R^T.$$

Замечание 4. Из (12) и (13) вытекает, что обязательно $\alpha_i = 0$ и $\beta_j = 0$. Кроме того, $f \in U^T$ в силу следствия 5. Поэтому определение 9 можно сформулировать в эквивалентной форме: R -функция $f(\tilde{x}^n)$ есть R^* -функция, если из того, что $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = p(x_i)$ и $f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) = q(x_j)$ при $i \neq j$, где $p, q \in S_{k-1}$, следует, что $\alpha_j \neq 0$ или $\beta_i \neq 0$.

Лемма 9. Множество U_R^* есть замкнутый класс.

Доказательство. Очевидно, что функция $h(\tilde{x})$, равная правильной суперпозиции (4), где функции $f, g_1, \dots, g_n$ лежат в U_R^* , принадлежит U_R^T . Покажем, что h — R^* -функция.

Если $h \in U^*$, то $h \in U_R^*$. Пусть h — строгая функция. Тогда f будет обязательно строгой R^* -функцией. Допустим, что

$$h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = p_1(x_i), \quad h_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) = p_2(x_j), \quad i \neq j, \quad p_1, p_2 \in S_{k-1}.$$

Из доказательства леммы 8 вытекает, что

$$(g_r)_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = q_1(x_i), \quad f_{\tilde{g}_\varphi(\tilde{\alpha})}(\tilde{y}) = t_1(y_r), \quad p_1(x_i) = t_1(q_1(x_i)), \quad (14)$$

$$(g_s)_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) = q_2(x_j), \quad f_{\tilde{g}_\varphi(\tilde{\beta})}(\tilde{y}) = t_2(y_s), \quad p_2(x_j) = t_2(q_2(x_j)) \quad (15)$$

для некоторых чисел r и s и функций q_1, q_2, t_1, t_2 из S_{k-1} .

Возможны два случая. Пусть $r = s$. Из первых равенств формул (14) и (15) следует, что $\alpha_j \neq 0$ или $\beta_i \neq 0$, так как g_r — R^* -функция. Значит, h — R^* -функция.

Пусть теперь $r \neq s$. Тогда вторые равенства формул (14) и (15) влекут одно из неравенств $g_{r\varphi}(\tilde{\beta}) \neq 0$ или $g_{s\varphi}(\tilde{\alpha}) \neq 0$, скажем первое, поскольку f — R^* -функция. Но тогда $\tilde{\beta} \in K_{g_r}$ и $\beta_i \neq 0$, так как $i \in I_{g_r}$ и g_r — R -функция. Следовательно, h — R^* -функция.

В заключение рассмотрим две суммирующие функции, то есть функции, которые по частям функции $f(\tilde{x})$ собирают эту функцию. Для каждого $n \geq 1$ введем нумерацию θ_n множества E_2^n натуральными числами из отрезка $[1, 2^n]$, положив для $\tilde{\alpha} \in E_2^n$

$$\theta_n(\tilde{\alpha}) = \alpha_1 2^{n-1} + \alpha_2 2^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} 2 + \alpha_n + 1,$$

и функцию $\omega_n(x_1, x_2, \dots, x_{2^n}, y_1, \dots, y_n)$, положив

$$\omega_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} x_i, & \text{где } i = \theta_n(\tilde{y}_\varphi), \text{ если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ k-1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \\ * & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $*$ — любое число из ε_0 .

Легко показать, что верна следующая лемма.

Лемма 10. Из функции $\omega_1(x_1, x_2, y_1)$ с помощью суперпозиции можно получить функцию ω_n для любого $n \geq 1$.

Пусть $f(\tilde{x}) \in U_k$. Для любого $\tilde{\alpha}$ положим

$$f^{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = \begin{cases} f(\tilde{x}), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{\alpha}, \\ k-1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi \in K_f, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (16)$$

Лемма 11. Для функции $f(\tilde{x}^n)$ имеет место представление

$$f(\tilde{x}^n) = \omega_n(f^{(0, \dots, 0)}(\tilde{x}^n), f^{(0, \dots, 0, 1)}(\tilde{x}^n), \dots, f^{(1, \dots, 1)}(\tilde{x}^n), \tilde{x}^n). \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $g(\tilde{x})$ равна правой части равенства (17). Если $\tilde{\beta} \in K_f$, то $\tilde{\beta} \in K_{f^{\tilde{\alpha}}}$ для каждого $\tilde{\alpha}$ в силу (16). Тогда $\tilde{\beta} \in K_g$, так как

$$g_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) = \omega_n(k-1, \dots, k-1, \tilde{x}) = k-1.$$

Если $\tilde{\beta} \notin K_f$, то $\tilde{\beta} \notin K_{f^{\tilde{\alpha}}}$ для каждого $\tilde{\alpha}$. Пусть $\theta_n(\tilde{\beta}) = i$. На i -м месте в правой части равенства (17) стоит $f^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$. Поэтому

$$g_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) = f^{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) = f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}).$$

Итак, $g_{\tilde{\beta}} = f_{\tilde{\beta}}$ для каждого $\tilde{\beta}$. Следовательно, равенство (17) справедливо.

Положим

$$\rho(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ k-1, & \text{если } x_2 = k-1, \\ * & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $*$ — любое число из ε_0 .

Лемма 12. Для каждой функции $f(\tilde{x}) \in U_k$ найдутся функции $f_1(\tilde{x})$ из U_O и $f_2(\tilde{x})$ из U^O такие, что

$$f(\tilde{x}) = \rho(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})). \quad (18)$$

Доказательство. Положим

$$f_1(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x}_\varphi \in K_f, \\ f(\tilde{x}), & \text{если } \tilde{x}_\varphi \notin K_f, \end{cases}$$

$$f_2(\tilde{x}) = \begin{cases} k-1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi \in K_f, \\ 0, & \text{если } \tilde{x}_\varphi \notin K_f. \end{cases}$$

Ясно, что $f_1 \in U_O$, $f_2 \in U^O$. Пусть $\tilde{x} \in E_2^n$. Если $f(\tilde{x}) = k-1$, то $\tilde{x}_\varphi \in K_f$ и

$$\rho(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})) = \rho(0, k-1) = k-1 = f(\tilde{x}).$$

Если $f(\tilde{x}) \neq k-1$, то $\tilde{x}_\varphi \notin K_f$ и

$$\rho(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})) = \rho(f(\tilde{x}), 0) = f(\tilde{x}).$$

Следовательно, равенство (18) справедливо.

5. Принадлежность класса U_R^* семейству $\mathfrak{B}_k$

Покажем, что класс U_R^* является элементом семейства $\mathfrak{B}_k$.

Лемма 13. *Класс U_R^* не имеет конечного базиса.*

Доказательство. Положим

$$G_n = \{f(\tilde{x}^{2n}) : f \in U_R^*\}, \quad H_n = [G_n], \quad n = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что

$$U_R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

и

$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_n \subseteq \dots \quad (19)$$

Покажем, что строгое включение $H_n \subset H_{n+1}$ верно для любого n . Тогда цепь (19) не будет иметь наибольшего элемента и, по лемме 1, класс U_R^* , как верхний предел этой цепи, не будет иметь конечного базиса.

Возьмем следующие наборы $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{2n+1}$ из E_2^{2n+1} , каждый из которых содержит n единиц и $n+1$ нулей:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \\ \tilde{\sigma}_2 &= (1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \\ \tilde{\sigma}_3 &= (1, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \\ &\dots \\ \tilde{\sigma}_n &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1), \\ \tilde{\sigma}_{n+1} &= (1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \\ \tilde{\sigma}_{n+2} &= (0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ \tilde{\sigma}_{2n+1} &= (0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0). \end{aligned}$$

Покажем, что в H_n не содержится никакая строгая R^* -функция $h(\tilde{x}^{2n+1})$ такая, что для всех i

$$h_{\tilde{\sigma}_i}(\tilde{x}) = p_i(x_i), \quad (20)$$

где $p_1, \dots, p_{2n+1}$ — произвольные функции из S_{k-1} . Тогда, поскольку такие функции h лежат в H_{n+1} , включение $H_n \subset H_{n+1}$ будет обосновано.

Доказательство проведем индукцией по рангу суперпозиции.

Суперпозиции ранга $t = 1$ из класса H_n — это функции из G_n . Они, очевидно, не обладают свойством (20).

Покажем, что суперпозиция

$$h(\tilde{x}^{2n+1}) = f(g_1(\tilde{x}^{2n+1}), \dots, g_{2n}(\tilde{x}^{2n+1})) \quad (21)$$

ранга $t+1$ не является строгой R^* -функцией со свойством (20), если таковы суперпозиции $g_1, \dots, g_{2n}$ ранга t и $f \in G_n$.

Предположим, что h — строгая R^* -функция, обладающая свойством (20). Из леммы 6 вытекает, что f — строгая функция. Пользуясь тем, что f — R -функция, покажем, что f не обладает свойством R^* .

Из доказательства леммы 8 вытекает, что равенство

$$h_{\tilde{\sigma}_i}(\tilde{x}^{2n+1}) = p_i(x_i) \quad (22)$$

возможно только в том случае, когда для некоторых j , $1 \leq j \leq 2n$, и $q_i, t_i \in S_{k-1}$

$$(g_j)_{\tilde{\sigma}_i}(\tilde{x}) = q_i(x_i), \quad f_{\tilde{\beta}_i}(\tilde{y}) = t_i(y_j), \quad p_i(x_i) = t_i(q_i(x_i)), \quad (23)$$

где $\tilde{\beta}_i = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_i)$. Будем говорить, что равенство (22) связано с g_j , если имеют место равенства (23). В дальнейших рассуждениях существенно лишь, что функция $p_i(x_i)$ в равенстве (20) принимает $k-1$ разных значений, поэтому считаем, что p_i, q_i, t_i в соотношениях (22) и (23) тождественны. Таким образом, нужно доказать, что если все равенства

$$h_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{x}^{2n+1}) = x_1, \dots, h_{\tilde{\sigma}_{2n+1}}(\tilde{x}^{2n+1}) = x_{2n+1} \quad (24)$$

верны, то f не обладает свойством R^* . Для краткости будем писать $h_i = x_i$ вместо $h_{\tilde{\sigma}_i}(\tilde{x}^{2n+1}) = x_i$.

Пусть равенство $h_i = x_i$ связано с g_j . Как в доказательстве леммы 7, получаем, что тогда $g_j \notin U_O$. Значит, $K_{g_j} \neq \emptyset$ и, в силу (23), функция $(g_j)_{\tilde{\sigma}_i}$ принимает $k-1$ разных значений. Следовательно, g_j — строгая R^* -функция.

Все равенства (24) не могут быть связаны с одной функцией g_j , иначе в силу (23) для нее выполнялись бы равенства

$$(g_j)_1 = x_1, \dots, (g_j)_{2n+1} = x_{2n+1},$$

то есть g_j была бы строгой R^* -функцией со свойством (20). Значит, равенства (24) связаны по меньшей мере с двумя из функций $g_1, \dots, g_{2n}$. А так как функций меньше, чем равенств (24), по меньшей мере два из равенств связаны с одной функцией, скажем с g_r . Положим

$$J = \{i: h_i = x_i \text{ связано с } g_r\}, \quad m = \min J, \quad M = \max J.$$

Так как $|J| \geq 2$, то $m \neq M$. Поскольку $I = \{1, 2, \dots, 2n+1\} \setminus J \neq \emptyset$, будем считать, что нужное из равенств (24) с номером из I связано с функцией g_s , $s \neq r$.

Составим из компонент наборов $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{2n+1}$ матрицу A , в i -ю строку поставив компоненты набора $\tilde{\sigma}_i$, $i = 1, \dots, 2n+1$. Нетрудно заметить, что в i -м столбце будет содержаться n раз число 1 и $n+1$ раз число 0. Если равенство $h_i = x_i$ связано с g_j , то $i \in I_{g_j}$. А так как g_j — R -функция, $(g_j)_{\tilde{\sigma}_l}(\tilde{x}) \in P_{k-1}$ для всякого l , против которого в i -м столбце матрицы A стоит 0. Следовательно, для набора $\tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_l)$, построенного по суперпозиции (21), будет выполняться одно из следующих условий:

$$\text{если } 1 \leq i < n+1, \text{ то } g_{j\varphi}(\tilde{\sigma}_l) = 0 \text{ для всякого } l, \quad 1 \leq l \leq i \text{ или } n+1+i \leq l \leq 2n+1; \quad (25)$$

$$\text{если } n+1 \leq i \leq 2n+1, \text{ то } g_{j\varphi}(\tilde{\sigma}_l) = 0 \text{ для всякого } l, \quad i-n \leq l \leq i. \quad (26)$$

Возможны 5 случаев.

Случай 1: $m \leq n$, $M = 2n + 1$, $n + 1 \notin J$. Считаем в этом случае, что с g_s связано равенство $h_{n+1} = x_{n+1}$.

Так как равенство $h_m = x_m$ связано с g_r и равенство $h_{n+1} = x_{n+1}$ связано с g_s , по формулам (23)

$$f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{y}^{2n}) = y_r, \quad f_{\tilde{\beta}}(\tilde{y}^{2n}) = y_s, \quad r \neq s. \quad (27)$$

где

$$\tilde{\alpha} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_m), \quad \tilde{\beta} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_{n+1}).$$

Так как с g_r связано равенство $h_{2n+1} = x_{2n+1}$, в силу (26)

$$\beta_r = g_{r\varphi}(\tilde{\sigma}_{n+1}) = 0.$$

Так как с g_s связано равенство $h_{n+1} = x_{n+1}$, в силу (26)

$$\alpha_s = g_{s\varphi}(\tilde{\sigma}_m) = 0.$$

Итак, из равенств (27) не вытекает, что $\alpha_s \neq 0$ или $\beta_r \neq 0$. Значит, f не является R^* -функцией.

Случай 2: $m \leq n$, $M = 2n + 1$, $n + 1 \in J$. Считаем в этом случае, что с g_s связано равенство $h_l = x_l$, где $l \notin J$.

Если в этом случае $1 \leq l < n + 1$, то так как $h_{2n+1} = x_{2n+1}$ связано с g_r и $h_l = x_l$ связано с g_s , используя (23), получаем равенства (27) при $\tilde{\alpha} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_{2n+1})$, $\tilde{\beta} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_l)$. Так как $h_{n+1} = x_{n+1}$ связано с g_r , в силу (26)

$$\beta_r = g_{r\varphi}(\tilde{\sigma}_l) = 0.$$

Так как $h_l = x_l$ связано с g_s , в силу (25)

$$\alpha_s = g_{s\varphi}(\tilde{\sigma}_{2n+1}) = 0.$$

Итак, из равенств (27) не следует, что $\alpha_s \neq 0$ или $\beta_r \neq 0$. Значит, f не является R^* -функцией.

Если в этом случае $n + 1 < l < 2n + 1$, то так как $h_{n+1} = x_{n+1}$ связано с g_r и $h_l = x_l$ связано с g_s , используя (23), получаем равенства (27) при $\tilde{\alpha} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_{n+1})$, $\tilde{\beta} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_l)$. Так как $h_{2n+1} = x_{2n+1}$ связано с g_r , в силу (26)

$$\beta_r = g_{r\varphi}(\tilde{\sigma}_l) = 0.$$

Так как $h_l = x_l$ связано с g_s , в силу (26)

$$\alpha_s = g_{s\varphi}(\tilde{\sigma}_{n+1}) = 0.$$

Получаем, что $\alpha_s = \beta_r = 0$. Значит, f — не R^* -функция.

Случай 3: $m \leq n$, $m + n + 1 \leq M < 2n + 1$. Считаем, что с g_s связано равенство $h_{M+1} = x_{M+1}$.

Так как $h_m = x_m$ связано с g_r и $h_{M+1} = x_{M+1}$ связано с g_s , используя (23), получаем равенства (27) при $\tilde{\alpha} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_m)$, $\tilde{\beta} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_{M+1})$. Так как $h_m = x_m$ связано с g_r , в силу (25) $\beta_r = 0$, а так как $h_{M+1} = x_{M+1}$ связано с g_s , в силу (26) $\alpha_s = 0$. Получаем, что f не обладает свойством R^* .

Случай 4: $m \leq n$, $M < m + n + 1$. Считаем, что с g_s связано равенство $h_{m+n+1} = x_{m+n+1}$.

Так как $h_M = x_M$ связано с g_r и $h_{m+n+1} = x_{m+n+1}$ связано с g_s , используя (23), получаем равенства (27) при $\tilde{\alpha} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_M)$, $\tilde{\beta} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_{m+n+1})$. Так как $h_m = x_m$ связано с g_r , в силу (25) $\beta_r = 0$, а так как $h_{m+n+1} = x_{m+n+1}$ связано с g_s , в силу (26) $\alpha_s = 0$. Следовательно, f не обладает свойством R^* .

Случай 5: $n + 1 \leq m \leq 2n$. Считаем, что с g_s связано равенство $h_{m-n} = x_{m-n}$.

Так как $h_M = x_M$ связано с g_r и $h_{m-n} = x_{m-n}$ связано с g_s , используя (23), получаем равенства (27) при $\tilde{\alpha} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_M)$, $\tilde{\beta} = \tilde{g}_\varphi(\tilde{\sigma}_{m-n})$. Так как $h_m = x_m$ связано с g_r , в силу (26) $\beta_r = 0$, а так как $h_{m-n} = x_{m-n}$ связано с g_s , в силу (25) $\alpha_s = 0$. В этом случае

$$1 \leq m - n \leq n, \quad n + 1 + (m - n) \leq M \leq 2n + 1.$$

Значит, f не обладает свойством R^* .

Итак, в каждом из пяти случаев показано, что f не является R^* -функцией. Получаем противоречие с предположением. Значит, h не является строгой R^* -функцией со свойством (20).

По индукции получаем, что никакая суперпозиция функций из G_n не является строгой R^* -функцией со свойством (20), то есть такие функции h не лежат в H_n . Лемма доказана.

6. Доказательство максимальности U_R^* в $\mathfrak{B}_k$

Итак, мы показали, что $U_R^* \in \mathfrak{B}_k$. Покажем, что U_R^* максимален в семействе $\mathfrak{B}_k$ и найдем его глубину и высоту в решетке $\mathfrak{C}_k$.

Лемма 14. Класс U_R^T имеет конечный базис.

Доказательство. Для $n = 2, 3, \dots$ пусть Q_n — множество функций q вида

$$q(\tilde{x}^n) = \begin{cases} p(x_i), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{\alpha}, \\ k - 1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi \in B, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (28)$$

где $1 \leq i \leq n$, $p \in S_{k-1}$, $\tilde{\alpha} \in E_2^n$, и $\alpha_i = 0$, B — непустое подмножество множества наборов $\tilde{\beta}$, у которых $\beta_i = 1$. Положим

$$Q = \bigcup_{n=2}^{\infty} Q_n.$$

Пусть

$$\tau(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ k - 1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (29)$$

Покажем, что

$$Q \subseteq G = [SU \cup U^O \cup \{\tau\}],$$

где

$$SU = S_k \cap U_k.$$

Возьмем функцию $q(\tilde{x}^n)$ вида (28) и положим

$$f(\tilde{x}^n) = \begin{cases} p(x_i), & \text{если } x_{i\varphi} = 0, \\ k-1, & \text{если } x_{i\varphi} = 1, \end{cases}$$

$$g(\tilde{x}^n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{\alpha}, \\ k-1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi \neq \tilde{\alpha}. \end{cases}$$

Тогда $f \in [SU]$, $g \in U^O$ и

$$q(\tilde{x}) = \tau(f(\tilde{x}), g(\tilde{x})).$$

Значит, $q \in G$.

Пусть функция $f(\tilde{x}) \in U_R^T$. Для нее имеет место представление (17). Ясно, что функции $f^{\tilde{\alpha}}$ будут лежать в U^* или в Q . По следствию 4 класс U^* имеет конечный базис, скажем E . Если $f^{\tilde{\alpha}} \in Q$, то по доказанному ее можно получить из функций класса $\{\tau\} \cup SU \cup U^*$. Наконец, по лемме 10 все функции $\omega_1, \omega_2, \dots$, получают-ся из функции ω_1 , которая лежит в U_R^T , если $*$ в ее определении заменить на 0. Значит, $f(\tilde{x})$ является суперпозицией над конечным множеством $E \cup \{\tau, \omega_1\} \cup SU$, содержащимся в U_R^T . Следовательно, U_R^T имеет конечную полную систему.

Лемма 15. *Классы U_R^* , U_R^T , U_k , P_k образуют при $k > 3$ неуплотняемую цепь*

$$P_k \supset U_k \supset U_R^T \supset U_R^*$$

длины 3 в решетке $\mathfrak{C}_k$.

Доказательство. Класс U_k предполон в P_k согласно [7].

Пусть $h(\tilde{x}) \in U_k \setminus U_R^T$. Тогда h — строгая функция, не обладающая свойством R . Найдутся i , $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$, $h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})$ существенно зависит от x_i и принимает $k-1$ разных значений, $h_{\tilde{\beta}} = k-1$.

Покажем, что класс

$$H = [U_R^T \cup \{h\}]$$

содержит функцию $\rho(\tilde{x}^2)$. Так как U^O и U_O содержатся в U_R^T , по лемме 12 $H = U_k$, откуда следует предполнота U_R^T в U_k .

Возможны два случая. В первом случае существуют $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$ из ε_0 и $p \in S_{k-1}$ такие, что

$$h_{\tilde{\alpha}}(b_1, \dots, b_{i-1}, x_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = p(x_i).$$

Пусть

$$g_i(x_1, x_2) = \begin{cases} p^{-1}(x_1), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$g_j(x_1, x_2) = \begin{cases} b_j, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0} \text{ и } \alpha_j = 0, \\ k-1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0} \text{ и } \alpha_j = 1, \\ \beta_j^{-1}, & \text{если } x_2 = k-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

при $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, где p^{-1} — функция, обратная к функции p , и $\beta_j^{-1} = 0$ при $\beta_j = 0$, $\beta_j^{-1} = k-1$ при $\beta_j = 1$. Нетрудно проверить, что

$$\rho(\tilde{x}) = h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})).$$

Так как $g_i \in U_O$ и $g_j \in U^C$ при $j \neq i$, то $\rho(\tilde{x}) \in H$.

Рассмотрим второй случай, когда $h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})$ имеет не менее двух существенных переменных и рассмотренный выше первый случай не имеет места. Так как $h_{\tilde{\alpha}}$ принимает $k-1 \geq 3$ значений, по лемме 4 из [8] (стр. 48) найдутся $A_1, \dots, A_n$ такие, что $A_i \subseteq E_{k-1}$, $|A_i| \leq k-2$ и на множестве $A_1 \times \dots \times A_n$ функция $h_{\tilde{\alpha}}$ принимает $k-1$ разных значений. Возьмем наборы $\tilde{\gamma}_0, \dots, \tilde{\gamma}_{k-2}$ из E_{k-1}^n такие, что $h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\gamma}_i) = i$, $0 \leq i \leq k-2$ и положим $t_j(x) = \gamma_{x_j}$ для $x \in E_{k-1}$. Для $j = 0, 1, \dots, n$ определим функции $g_j(\tilde{x}^2) \in U_k$, полагая

$$g_j(\tilde{x}) = \begin{cases} t_j(x_1), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0} \text{ и } \alpha_i = 0, \\ k-1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0} \text{ и } \alpha_i = 1, \\ \beta_i^{-1}, & \text{если } x_2 = k-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как $t_j \in C$, то $g_j \in U^C$, поэтому

$$\rho(\tilde{x}) = h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})) \in H.$$

Покажем теперь, что U_R^* предполон в U_R^T , то есть что

$$U_R^T = [U_R^* \cup \{h\}]$$

для любой функции $h(\tilde{x}) \in U_R^T \setminus U_R^*$. Для этого, в силу лемм 10 и 11, достаточно установить, что $\omega_1 \in H$, где

$$H = [U_R^* \cup \{h\}].$$

Так как h — строгая R -функция, но не R^* -функция, найдутся числа i и j , $i \neq j$, наборы $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ и функции p, q из S_{k-1} такие, что

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = \tilde{0}, \quad (\gamma_i, \gamma_j) = \tilde{1},$$

$$h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = p(x_i), \quad h_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) = q(x_j), \quad h_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}) = k-1.$$

Рассмотрим функции $g_i(\tilde{x}^3)$, $g_j(\tilde{x}^3)$ из Q и $g_s(\tilde{x}^3) \in U^O$, $s \neq i$, $s \neq j$, $1 \leq s \leq n$, определяемые следующим образом:

$$g_i(\tilde{x}) = \begin{cases} p^{-1}(x_1), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ \gamma_i^{-1}, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \tilde{x}_\varphi = (1, 1, 0), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g_j(\tilde{x}) = \begin{cases} q^{-1}(x_2), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = (0, 0, 1), \\ \gamma_j^{-1}, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \tilde{x}_\varphi = (1, 1, 0), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g_s(\tilde{x}) = \begin{cases} \beta_s^{-1}, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = (0, 0, 1), \\ \gamma_s^{-1}, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \tilde{x}_\varphi = (1, 1, 0), \\ \alpha_s^{-1} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Считаем, что $i < j$.

Если $\tilde{x}_\varphi = \tilde{0}$, то

$$h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})) = h(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_{i-1}^{-1}, p^{-1}(x_1), \alpha_{i+1}^{-1}, \dots, \alpha_{j-1}^{-1}, 0, \alpha_{j+1}^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) \\ = p(p^{-1}(x_1)) = x_1.$$

Если $\tilde{x}_\varphi = (0, 0, 1)$, то

$$h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})) = h(\beta_1^{-1}, \dots, \beta_{i-1}^{-1}, 0, \beta_{i+1}^{-1}, \dots, \beta_{j-1}^{-1}, q(x_2)^{-1}, \beta_{j+1}^{-1}, \dots, \beta_n^{-1}) \\ = q(q^{-1}(x_2)) = x_2.$$

Если $\tilde{x}_\varphi = \tilde{1}$ или $\tilde{x}_\varphi = (1, 1, 0)$, то

$$h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})) = h(\gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_n^{-1}) = k - 1.$$

Если $\tilde{x}_\varphi \neq \tilde{0}, \tilde{1}, (0, 0, 1), (1, 1, 0)$, то

$$h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})) = h(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) = p(0) \in \varepsilon_0.$$

Следовательно,

$$h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})) = \omega_1(\tilde{x}),$$

то есть $\omega_1 \in H$.

Лемма 16. При $k > 3$ любой замкнутый надкласс класса U_R^* представлен в цепи из условия леммы 15.

Доказательство. Пусть H — замкнутый класс и $U_R^* \subset H$. Докажем, что H совпадает с одним из классов U_R^T, U_k, P_k .

Возможны три случая. Рассмотрим первый случай, когда H содержит функцию $h(\tilde{x}) \notin U_k$. Покажем, что $H = P_k$.

Найдется набор $\tilde{a}$ такой, что h принимает на блоке $\varepsilon_{\tilde{a}}$ значение $k - 1$ и хотя бы одно значение, скажем c , из ε_0 . Пусть $h(\tilde{a}) = k - 1$, $h(\tilde{b}) = c$, где $\tilde{a}, \tilde{b} \in \varepsilon_{\tilde{a}}$. Возьмем

функции g и g_{is} из U_R^* , где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq s \leq k-2$, определяемые следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < k-1, \\ k-1 & \text{при } x = k-1, \end{cases}$$

$$g_{is}(x) = \begin{cases} a_i & \text{при } x < s, \\ b_i & \text{при } x \geq s. \end{cases}$$

Функция

$$g_s(x) = g(h(g_{1s}(x), \dots, g_{ns}(x))) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < s, \\ k-1 & \text{при } x \geq s \end{cases}$$

принадлежит H , $1 \leq s \leq k-2$.

Функции

$$f_r(\tilde{x}^2) = \begin{cases} x_1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ r, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = (1, 0), \\ k-1, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$2 \leq r \leq k-2$, и

$$q(\tilde{x}^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = 0, \quad x_2 < k-1, \\ x_1 - 1, & \text{если } x_1 > 0, \quad x_2 < k-1, \\ k-1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

лежат в U_R^* .

Функция

$$t(x) = f_{k-2}(\dots f_3(f_2(g_1(x), g_2(x)), g_3(x)), \dots, g_{k-2}(x))$$

$$= \begin{cases} x+1 & \text{при } x < k-2, \\ k-1 & \text{при } x \geq k-2 \end{cases}$$

принадлежит H . Но тогда и функция $\rho(\tilde{x})$, равная $k-1$ на блоке ε_{10} , принадлежит H , поскольку $\rho(\tilde{x}) = q(t(x_1), x_2)$. По лемме 12, $U_k \subseteq H$, откуда следует, что $H = P_k$.

Рассмотрим второй случай, когда $H \subseteq U_k$, H содержит функцию $h(\tilde{x}) \notin U_R^T$. В доказательстве леммы 15 показано, что из $h(\tilde{x})$ и функций из класса U_R^* можно получить функцию $\rho(\tilde{x}^2)$. Так как классы U^O , U_O и функция ρ порождают весь класс U_k , то $H = U_k$.

Пусть, наконец, $H \subseteq U_R^T$. Тогда $H = U_R^T$, так как U_R^* предполон в U_R^T .

Пусть теперь $k = 3$.

Лемма 17. Пусть F, G — замкнутые классы,

$$T \subseteq F \subseteq G \subseteq P_2,$$

$$h(\tilde{x}) \in U_R^G \setminus U_R^F \text{ и}$$

$$[F \cup \{h_{\tilde{\alpha}}\}] = G$$

для некоторого $\tilde{\alpha}$. Тогда

$$[U_R^F \cup \{h\}] = U_R^G.$$

Доказательство. Каждой функции $g(\tilde{x}) \in P_2$ поставим в соответствие функцию $t^g(\tilde{x}) \in U_3$

$$t^g(\tilde{x}) = \begin{cases} g(\tilde{x}), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ 2, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (30)$$

Так как h — строгая функция, $h_{\tilde{\beta}} = 2$ при некотором $\tilde{\beta}$. Пусть

$$g_i(\tilde{x}) = \begin{cases} x_i, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \quad \alpha_i = 0, \\ 2, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \quad \alpha_i = 1, \\ \beta_i^{-1}, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \\ \alpha_i^{-1} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$v(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ 2, & \text{если } \tilde{x}_\varphi \neq \tilde{0}, \end{cases} \quad (31)$$

где $1 \leq i \leq n$. Поскольку $g_1, \dots, g_n, v, \tau$ принадлежат U_R^T , где τ определено формулами (29), и

$$t^{h_{\tilde{\alpha}}}(\tilde{x}) = \tau(h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})), v(\tilde{x})),$$

то

$$t^{h_{\tilde{\alpha}}}(\tilde{x}) \in H = [U_R^F \cup \{h\}].$$

Кроме того, $t^g \in H$ для всех $g \in F$. Возьмем $g(\tilde{x}) \in G \setminus F$. Функция $g(\tilde{x})$ равна некоторой суперпозиции вида (4), где $f \in F \cup h_{\tilde{\alpha}}$ и $g_1, \dots, g_n$ — суперпозиции меньшего ранга, чем ранг суперпозиции g . По индукционному предположению $t^{g_i} \in H$, $1 \leq i \leq n$, и по доказанному $t^f \in H$. Но тогда $t^g \in H$, ибо

$$t^g(\tilde{x}) = \tau(t^f(t^{g_1}(\tilde{x}), \dots, t^{g_n}(\tilde{x})), v(\tilde{x})),$$

где v определена формулами (31). Значит,

$$\{t^g : g \in G\} \subseteq H.$$

Пусть $f(\tilde{x})$ — произвольная функция из U_R^G и $\tilde{\beta}$ — произвольный набор. Рассмотрим функцию $f^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$, определенную формулой (16). Если $f_{\tilde{\beta}} \in F$, то $f^{\tilde{\beta}} \in H$. Допустим, что $f_{\tilde{\beta}} \in G \setminus F$. Определим $g_i(\tilde{x})$, $1 \leq i \leq n$, полагая

$$g_i(\tilde{x}) = \begin{cases} x_i, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{\beta}, \quad \beta_i = 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{\beta}, \quad \beta_i = 1, \\ 2, & \text{если } \tilde{x}_\varphi \in K_f, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как $t^{f\tilde{\beta}}, g_1, \dots, g_n$ принадлежат H и, как легко проверить,

$$f^{\tilde{\beta}}(\tilde{x}) = \tau(t^{f\tilde{\beta}}(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})), v(\tilde{x})),$$

где v определена формулами (31), то $f^{\tilde{\beta}} \in H$. Но тогда в силу леммы 11 $f \in H$, поскольку $\omega_1 \in U_R^T$, и, значит, $\omega_1 \in H$. Таким образом,

$$H = U_R^G.$$

Докажем теперь для $k = 3$ леммы, аналогичные леммам 15 и 16.

Лемма 18. *Классы U_R^* , U_R^T , U_R^L , U_R , U_3 , P_3 образуют неуплотняемую цепь*

$$P_3 \supset U_3 \supset U_R \supset U_R^L \supset U_R^T \supset U_R^*$$

длины пять в решетке $\mathfrak{C}_3$.

Доказательство. Класс U_3 предполон в P_3 согласно [7].

Класс U_R предполон в U_3 , потому что доказательство в соответствующем случае леммы 15 верно и для $k = 3$ (при $k = 3$ всегда выполняется первый случай.)

Класс U_R^L предполон в U_R и класс U_R^T предполон в U_R^L по лемме 17.

Доказательство предполноты класса U_R^* в U_R^T верно и для $k = 3$.

Из лемм 14, 15 и 18 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *Классы U_R^L , U_R при $k = 3$ и U_k , P_k при $k \geq 3$ имеют конечные базисы.*

Лемма 19. *При $k = 3$ любой замкнутый надкласс класса U_R^* представлен в цепи из леммы 18.*

Доказательство. Пусть H — замкнутый класс и $U_R^* \subset H$. Покажем, что H совпадает с одним из классов U_R^T , U_R^L , U_R , U_3 , P_3 .

Два из возможных случаев, когда H содержит функцию $h \notin U_3$ и когда $H \subseteq U_3$ и H содержит функцию $h \notin U_R$ рассматриваются, как в лемме 16.

Рассмотрим оставшийся третий случай, когда $H \subseteq U_R$. Если $H \subseteq U_R^T$, то $H = U_R^T$, поскольку U_R^* предполон в U_R^T . Пусть H содержит функцию $h(\tilde{x}) \notin U_R^T$. Покажем, что тогда $U_R^T \subseteq H$, а для этого достаточно доказать, что $\omega_1 \in H$.

Так как h — строгая R -функция, $h \notin U_R^T$, найдутся числа i и j , $i \neq j$, а также наборы $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ такие, что

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \tilde{0}, \quad (\beta_i, \beta_j) = \tilde{1}, \quad h_{\tilde{\beta}} = 2,$$

и $h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})$ существенно зависит от x_i и x_j . Но тогда найдутся числа

$$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n$$

из E_2 и функции $p, q \in S_2$ такие, что

$$h_{\tilde{\alpha}}(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = p(x),$$

$$h_{\tilde{\alpha}}(b_1, \dots, b_{j-1}, x, b_{j+1}, \dots, b_n) = q(x).$$

Возьмем функции $g_1(\tilde{x}^3), \dots, g_n(\tilde{x}^3)$ из U_R^*

$$g_i(\tilde{x}) = \begin{cases} p^{-1}(x_1), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \\ \beta_i^{-1}, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \tilde{x}_\varphi = (1, 1, 0), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g_j(\tilde{x}) = \begin{cases} q^{-1}(x_2), & \text{если } \tilde{x}_\varphi = (0, 0, 1), \\ \beta_j^{-1}, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \tilde{x}_\varphi = (1, 1, 0), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g_s(\tilde{x}) = \begin{cases} a_s, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \alpha_s = 0, \\ 2, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{0}, \alpha_s = 1, \\ b_s, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = (0, 0, 1), \alpha_s = 0, \\ 2, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = (0, 0, 1), \alpha_s = 1, \\ \beta_s^{-1}, & \text{если } \tilde{x}_\varphi = \tilde{1}, \tilde{x}_\varphi = (1, 1, 0), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $s \neq i, s \neq j$. Ясно, что

$$\omega_1(\tilde{x}) = h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})),$$

так что $\omega_1 \in H$.

Итак,

$$U_R^T \subset H \subseteq U_R.$$

Если $H \subseteq U_R^L$, то $H = U_R^L$, поскольку U_R^T предполон в U_R^L . Пусть H содержит функцию $h \notin U_R^L$. Так как $[T \cup \{h_{\tilde{\alpha}}\}] = P_2$, где $h_{\tilde{\alpha}} \notin L$, по лемме 17

$$U_R^{P_2} = U_R \subseteq H.$$

Но тогда $H = U_R$.

Из лемм 13–16, 18, 19 и следствия 6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Класс U_R^* — максимальный элемент в $\mathfrak{B}_k$ при любом $k \geq 3$. Он имеет в $\mathfrak{C}_k$ глубину (и высоту) пять при $k = 3$ и глубину (и высоту) три при $k > 3$.*

В силу принципа двойственности для P_k получаем следующее утверждение.

Следствие 7. *В $\mathfrak{B}_k$ существует по меньшей мере k различных максимальных элементов.*

Поскольку $I_1^1(x) \in U_R^*$ и U_R^* имеет только один минимальный надкласс, согласно [10] он предикатно описуем, откуда получаем следующее утверждение.

Следствие 8. *Для каждого $k \geq 3$ в P_k существуют предикатно-описуемые классы, не имеющие конечного базиса.*

Автор благодарен С. В. Яблонскому, под руководством которого выполнена эта работа.

Автор посвящает статью памяти своего мужа, Владимира Леонидовича Михеева, скончавшегося 24 апреля 1998 г.

Список литературы

1. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. *Ann. Math. Studies* (1941) **5**.
2. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
3. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *Докл. АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.
4. Salomaa A. On infinitely generated sets of operations in finite algebras. *Ann. Univ. Turku, Ser. AI* (1964) **74**, 1–12.
5. Михеева Е. А. О максимальных классах k -значной логики, не имеющих конечного базиса. В кн.: *Тезисы докл. VII Всесоюзной конференции по математической логике*. Новосибирск. 1984, с. 111.
6. Михеева Е. А. О существовании в k -значной логике максимальных классов, не имеющих конечного базиса. *Докл. АН СССР* (1986) **287**, №1, 49–52.
7. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике. *Труды МИАН* (1958) **51**, 5–142.
8. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.
9. Salomaa A. On the heights of closed sets of operations in finite algebras. *Suomal. tiedeakat. teimituks. Ser. AI* (1965) **363**, 1–12.
10. Яблонский С. В. Строение верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k . *Докл. АН СССР* (1974) **218**, №2, 304–307.

Статья поступила 25.03.1996.

Переработанный вариант поступил 15.07.1997.