Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Орлов, О сильно существенных системах функций
в P_k , *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 2, 120–127

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:18:28

О сильно существенных системах функций в P_k

© 1998 г. В. А. Орлов

Вводится понятие сильно существенных систем функций из P_k . Доказано, что почти все функции из P_k сильно существенны. Рассмотрено применение этого результата к синтезу схем из функциональных элементов в произвольных базисах.

1. Введение

Существенно зависящая не менее чем от двух переменных функция называется существенной [4]. Существенную функцию, существенно зависящую от всех своих переменных, назовем S -функцией. Систему S -функций из P_k назовем сильно существенной, если для любого числа m из этих функций можно построить являющуюся S -функцией неповторную суперпозицию от $n \geq m$ переменных и если любая ее подсистема этим свойством не обладает. Образующую сильно существенную систему функцию назовем сильно существенной.

Показано, что доля не являющихся сильно существенными функций убывает дважды экспоненциально с ростом числа переменных и более чем экспоненциально с ростом значности. Показано, что для почти любого базиса в P_k асимптотическое поведение функции Шеннона определяется его минимальным приведенным весом. Кроме того, показано существование сильно существенных систем растущей мощности (при растущей значности k).

Всюду в дальнейшем, если не оговорено другое, под функцией будем понимать функцию из P_k , $k \geq 3$, от n переменных. Через R_f будем обозначать множество значений функции f .

Через $f_{i,s}$ будем обозначать подфункцию, получающуюся из функции f при значении i -й переменной, равном s .

Функцию f назовем v_i -функцией, если существуют отличные друг от друга s и t из R_f такие, что $f_{i,s} = f_{i,t}$.

Функцию f назовем $z_{i,j}$ -функцией, $j \neq i$, если при любом s из R_f подфункция $f_{i,s}$ не зависит существенно от j -й переменной. Функцию, являющуюся $z_{i,j}$ -функцией при некотором j , назовем z_i -функцией.

Функцию f назовем $w_{i,t}$ -функцией, если для любого s из R_f подфункция $f_{i,s}$ не принимает значения t из R_f . Функцию, являющуюся $w_{i,t}$ -функцией при некотором t , назовем w_i -функцией.

Множество v_i -, z_i - и w_i -функций будем обозначать соответственно через V_i , Z_i и W_i . Положим

$$T_i = V_i \cup Z_i \cup W_i.$$

Отметим, что не принадлежащая T_i функция не является v_i -функцией, не является z_i -функцией и не является w_i -функцией.

Теорема 1. *S-функция, не принадлежащая множеству T_i при некотором i , сильно существенна.*

Доказательство. Не ограничивая общности, полагаем $i = n$. Пусть f — произвольная удовлетворяющая условиям теоремы функция.

Из произвольного числа d реализующих функцию f элементов построим цепочку, в которой выход каждого элемента соединен с n -м входом последующего. Покажем существенность j -го, $1 \leq j < n$, входа m -го, $1 \leq m \leq d$, элемента этой цепочки.

Так как f не является z_n -функцией, существует s_m из R_f такое, что f_{n,s_m} существенно зависит от j -й переменной. Функцию f_{n,s_m} обозначим через g . Из существенности j -й переменной функции g следует существование a и b таких, что $g_{j,a} \neq g_{j,b}$. Функции $g_{j,a}$ и $g_{j,b}$ обозначим соответственно через h_a и h_b . Таким образом, существует набор Y_m значений, отличных от n -го и j -го входов m -го элемента, такой, что значения c и d функций h_a и h_b на этом наборе различны.

Так как f не является v_n -функцией, существует набор Y_{m+1} значений, отличных от n -го входов $(m+1)$ -го элемента такой, что значения функций f_n и $f_{n,d}$ на этом наборе различны. Аналогичным образом показывается существование таких наборов для последующих элементов цепочки.

Так как f не является w_n -функцией, существует набор Y_{m-1} значений входов, отличных от n -го, и значение n -го входа $(m-1)$ -го элемента s_{m-1} такие, что значение выхода $(m-1)$ -го элемента равно s_m . Аналогичным образом показывается существование таких наборов и значений n -х входов для предыдущих элементов цепочки.

Доказательство существенности n -го входа первого элемента цепочки является более простым случаем рассмотренного выше.

Теорема 1 доказана.

Оценим число сильно существенных функций.

Через M_r будем обозначать множество функций f таких, что $R_f = \{0, \dots, r-1\}$, через S_r обозначим множество S-функций из M_r , а через NSS_r множество функций из S_r , не являющихся сильно существенными. Пусть

$$d_r = \frac{|NSS_r|}{|S_r|},$$

$$k_r = \frac{r^{k^n}}{|S_r|}.$$

Из соотношения

$$|S_r| \geq r^{k^n} - nr^{k^{n-1}} - r(r-1)^{k^n}$$

следует, что k_r быстро стремится к единице.

Оценим число функций из NSS_r и их долю d_r .

Пусть

$$T = \bigcap_{i=1}^n T_i, \quad T^r = T \cap M_r.$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$|NSS_r| \leq |T^r|.$$

Рассмотрим три случая.

2. Функции, принимающие все значения

Пусть

$$V = \bigcap_{i=1}^n V_i, \quad V^r = V \cap M_r.$$

Нетрудно проверить, что любая функция из S_k не является $z_{i,j}$ -функцией и не является $w_{i,t}$ -функцией при любых i, j и t .

Отсюда и из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Принимающая все значения S -функция из P_k , не принадлежащая множеству V^k , сильно существенна.*

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$|V^r| \leq \binom{r}{2}^n r^{(k-1)^n}.$$

Доказательство. Пусть $s_i \neq t_i$ — значения i -й переменной из определения v_i -функции, $1 \leq i \leq n$.

В таблице для функции f удалим все наборы, i -я компонента которых равна t_i , $1 \leq i \leq n$. По парам (s_i, t_i) и по содержащей $(k-1)^n$ наборов оставшейся части v -функция восстанавливается полностью. Лемма 2 доказана.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Справедлива оценка*

$$d_k < D_k(n) = k_k \binom{k}{2}^n k^{(k-1)^n - k^n}.$$

Приведем результаты подсчета величины $D_k(n)$:

$$\begin{aligned} D_3(2) &= 4.02 \cdot 10^{-2}, \\ D_3(3) &= 2.32 \cdot 10^{-8}, \\ D_3(4) &= 7.9 \cdot 10^{-30}, \\ D_4(2) &= 2.29 \cdot 10^{-3}, \\ D_4(3) &= 1.1 \cdot 10^{-20}, \\ D_4(4) &= 5.6 \cdot 10^{-103}, \\ D_5(2) &= 5.22 \cdot 10^{-5}, \\ D_5(3) &= 2.3 \cdot 10^{-40}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим функции, принадлежащие V^k .

Множество всех неупорядоченных пар различных значений функции f на всех парах соседних по i -й переменной наборов значений ее переменных будем обозначать через $OP_{f,i}$. Множество всех неупорядоченных пар (s, t) различных значений i -й переменной таких, что $f_{i,s} = f_{i,t}$ и $f_{i,s} \neq f_{i,t}$ будем соответственно обозначать через $VP_{f,i}$ и $NV_{f,i}$.

Нетрудно проверить справедливость следующего достаточного условия того, что функция не является сильно существенной.

Теорема 4. Если для любого j существует i такое, что пересечение множеств $OP_{f,i}$ и $NV_{f,j}$ пусто, то функция f не является сильно существенной.

При $k = 3$ имеет место следующий критерий сильной существенности.

Теорема 5. Принимающая все значения S -функция f из P_3 сильно существенна тогда и только тогда, когда существует j такое, что для любого i пересечение множеств $OP_{f,i}$ и $NV_{f,j}$ не пусто.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 4.

Отметим, что при $k = 3$ для любого j справедливо равенство $|VP_{f,j}| = 1$ и, следовательно, $|NV_{f,j}| = 2$.

Не ограничивая общности, полагаем $j = n$ и $VP_{f,n} = (0, 1)$. Тогда из условия теоремы следует, что для любого i множество $OP_{f,i}$ содержит пару $(0, 2)$ или $(1, 2)$.

Из произвольного числа d реализующих функцию f элементов E_f построим цепочку G , в которой выход каждого элемента соединен с n -м входом последующего.

Так как $VP_{f,n} = (0, 1)$ и множество $OP_{f,n}$ содержит пару $(0, 2)$ или $(1, 2)$, существуют наборы Y^0 и Y^1 значений отличных от n -го входов элемента E_f такие, что неупорядоченные пары $(f(Y^0, 0), f(Y^0, 2))$ и $(f(Y^1, 1), f(Y^1, 2))$ принадлежат множеству $\{(0, 2), (1, 2)\}$.

Покажем существенность t -го, $1 \leq t < n$, входа m -го, $1 \leq m \leq d$, элемента этой цепочки.

Так как множество $OP_{f,t}$ содержит пару $(0, 2)$ или $(1, 2)$, существует набор Y_m значений отличных от n -го и t -го входов m -го элемента, значение s_m n -го входа и различные значения a и b входа с номером t такие, что при этом значения выхода m -го элемента образуют пару $(0, 2)$ или $(1, 2)$.

Так как $VP_{f,n} = (0, 1)$, существует набор Y_{m+1} значений отличных от n -го входов $(m+1)$ -го элемента такой, что значения выхода $(m+1)$ -го элемента образуют пару

$(0, 2)$ или $(1, 2)$. Аналогичным образом показывается существование таких наборов для последующих элементов цепочки.

Так как f принимает все значения, существует набор Y_{m-1} значений входов, отличных от n -го, и значение n -го входа $(m-1)$ -го элемента s_{m-1} такие, что значение выхода $(m-1)$ -го элемента равно s_m . Аналогичным образом показывается существование таких наборов и значений n -х входов для предыдущих элементов цепочки.

Доказательство существенности n -го входа первого элемента цепочки является более простым случаем рассмотренного выше.

Теорема 5 доказана.

Было проведено полное исследование при $k = 3$, $n = 2$. В этом случае имеется 24 существенно зависящих от всех своих аргументов и принимающих все значения функций из P_3 , не являющихся сильно существенными, и их доля равна $1.33 \cdot 10^{-3}$.

3. Функции, принимающие два значения

Пусть

$$N_i = V_i \cup Z_i, \quad N = \bigcap_{i=1}^n N_i, \quad N^r = N \cap M_r.$$

Нетрудно проверить, что не принадлежащая множеству N функция не является $w_{i,t}$ -функцией при любых i и t . Кроме того, легко проверить, что принадлежащая множеству N^2 функция не является сильно существенной.

Отсюда и из теоремы 1 следует критерий сильной существенности.

Теорема 6. *Принимающая два значения S -функция из P_k является сильно существенной тогда и только тогда, когда она не принадлежит множеству N^2 .*

Из теорем 5 и 6 получаем критерий сильной существенности функций из P_3 .

Пусть $Z_i^r = Z_i \cap M_r$.

Лемма 3. *Для любого i*

$$|Z_i^r| \leq (n-1)r^{k^n - r(k-1)k^{n-2}}.$$

Доказательство. Функцию, являющуюся $z_{i,j}$ -функцией, будем задавать набором k^{n-2} ее подфункций от переменных x_i и x_j . Каждую такую подфункцию будем задавать $k \times k$ матрицей, в которой строки соответствуют значениям x_i , а столбцы значениям x_j . Во всех этих матрицах каждая из первых r строк состоит из одинаковых элементов, т.е. эти матрицы задаются $k(k-r) + r$ элементами. Лемма 3 доказана.

Нетрудно проверить, что имеет место оценка

$$|N^2| \leq |V^2| + \sum_{i=1}^n |Z_i^2|,$$

так что справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Справедлива оценка*

$$d_2 < k_2(2^{(k-1)^n - k^n} + n(n-1)2^{-2(k-1)k^{n-2}}).$$

Эту оценку можно улучшить, удаляя пересечения множеств V_i и Z_j . Так при $n = 2$ и $r = 2$ получаем соотношение

$$|NSS_2| = 2^{k^2 - 2k + 1}(1 + 2^{3-k}).$$

4. Функции, принимающие более двух и менее k значений

Пусть

$$W_i^r = W_i \cap M_r, \quad m_r = (r/(r-1))^r.$$

Легко проверить, что верно следующее утверждение.

Лемма 4. *Для любого i*

$$|W_i^r| \leq r^{k^n + 1} m_r^{-k^{n-1}}.$$

Из лемм 2, 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Справедлива оценка*

$$|T^r| \leq \binom{r}{2}^n r^{(k-1)^n} + n(n-1)r^{k^n - r(k-1)k^{n-2}} + nr^{k^n + 1} m_r^{-k^{n-1}}.$$

Следующая теорема есть следствие леммы 5 и теоремы 2.

Теорема 8. *Справедлива оценка*

$$d_r < k_r \left(\binom{r}{2}^n r^{(k-1)^n - k^n} + n(n-1)r^{-r(k-1)k^{n-2}} + nrm_r^{-k^{n-1}} \right).$$

Эту оценку можно улучшить, учитывая пересечения множеств V_i , Z_j и W_t .

Таким образом, для любого r доля существенно зависящих от всех n своих переменных и принимающих r значений функций из P_k , не являющихся сильно существенными, убывает дважды экспоненциально с ростом n и более чем экспоненциально с ростом k .

5. Применение полученных результатов к синтезу схем

Пусть Φ — произвольная полная в P_k , $k \geq 2$, система S -функций от конечного числа переменных. Системе Φ сопоставим базис B , состоящий из реализующих ее функции элементов, каждому из которых приписано положительное число (вес элемента). Для имеющего не менее двух входов элемента его приведенным весом [1] называется отношение веса к уменьшенному на единицу числу входов. Приведенным весом ρ_B базиса B называется минимум приведенных весов его элементов. Всюду в дальнейшем будем рассматривать схемы в базисе B и под ρ понимать ρ_B .

Под сложностью $L(S)$ схемы S будем понимать сумму весов ее элементов. Через $L(G)$ обозначается минимальная сложность схемы, реализующей систему функций G , а через $L(k, n)$ максимум $L(f)$ по всем функциям f из P_k от n переменных.

Пусть

$$b_n = \min_f \frac{L(f)}{n-1},$$

где минимум берется по всем функциям f , существенно зависящим от n переменных, и пусть

$$b^* = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Отметим, что $b^* \geq \rho$.

Верна следующая теорема [2,3].

Теорема 9. *Справедлива оценка*

$$L(k, n) \lesssim \frac{b^* k^n}{n}.$$

Базис B назовем оптимальным, если

$$L(k, n) \sim \frac{\rho k^n}{n}.$$

Покажем, что почти все базисы оптимальны.

Множество всех имеющих минимальный приведенный вес элементов базиса назовем его ядром. Базис назовем сильно существенным, если его ядро содержит сильно существенную систему. Отметим, что в случае сильно существенных базисов $b^* = \rho$.

Теорема 10. *Сильно существенный базис оптимален.*

Утверждение следует из теоремы 9 и обычных мощностных соображений.

Максимальное число входов элементов базиса назовем его рангом. Из теорем 3 и 10 следует, что при растущем ранге или значности почти все базисы в P_k оптимальны.

Покажем, что при $k > 2$ приведенные веса элементов базиса не играют такую существенную роль, как в случае $k = 2$.

Через ρ_B^{mx} обозначим максимальный приведенный вес базиса B .

Теорема 11. *Для любого $k > 3$ и любой константы $c > 1$ существует базис B_c такой, что*

$$L_{B_c}(k, n) \sim c \rho_{B_c}^{mx} \frac{k^n}{n}.$$

При $k = 3$ базис B_c состоит из элемента с двумя входами единичного веса, реализующего функцию с вектором 000122122, и трех элементов с одним входом веса $c - 1$, реализующих порождающую все функции от одной переменной систему с векторами 120, 102 и 112, соответственно. При $k > 3$ построения аналогичны.

В заключение опишем сильно существенную систему функций из P_k растущей мощности (при растущей значности k). Она состоит из $\lfloor k/2 \rfloor$ функций f_j , $0 \leq j < \lfloor k/2 \rfloor$, от двух переменных. В таблице функции f_j значение элемента на пересечении $(2j+1)$ -й строки и $(2j+1)$ -го столбца равно $2j+1 \pmod k$, а значение всех остальных элементов равно $2j+2 \pmod k$. Суперпозиция $f_i(f_j, x)$ ($f_i(x, f_j)$) существенно зависит от всех своих аргументов при $i = j+1 \pmod{\lfloor k/2 \rfloor}$ и является константой в противном случае.

Список литературы

1. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем. *Проблемы кибернетики* (1963) 10, 63–97.
2. Орлов В. А. О реализации функций из P_k схемами в произвольном базисе. *Тезисы докл. XI Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики*. Ульяновск, 1996, 154–155.
3. Орлов В. А. Реализация функций из P_k схемами в произвольном базисе из функциональных элементов. *Докл. РАН* (1998) 359, 308–309.
4. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 24.12.1997.