Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Селиванов, В. П. Чистяков, Многомерное распределение хи-квадрат для неоднородной полиномиальной схемы, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 2, 52–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:56:44

УДК 519.2

Многомерное распределение хи-квадрат для неоднородной полиномиальной схемы

© 1998 г. Б. И. Селиванов, В. П. Чистяков

Рассматривается многомерная статистика, компонентами которой являются статистики χ^2 , построенные по частотам исходов неоднородных полиномиальных выборок нарастающих объемов. Сформулированы условия, при выполнении которых существует предельное распределение рассматриваемой статистики, и найдено его преобразование Лапласа. В однородном случае полученное преобразование Лапласа приводится к ранее известному виду.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-00531, 96-15-96092.

1. Постановка задачи

В работе [1] было получено многомерное распределение хи-квадрат, предельное для распределения набора статистик χ^2 , которые строятся по частотам исходов полиномиальных выборок нарастающих объемов. Найденное распределение использовалось в [1] для расчета вероятностей ошибок r -кратного критерия хи-квадрат последовательного типа.

Результаты работы [1] цитируются в [2], где указаны также другие подходы к определению многомерного распределения хи-квадрат. Различные обобщения и применения r -кратного критерия хи-квадрат можно найти в статьях [3, 4, 5].

В задачах обнаружения разладки для расчета характеристик используемых критериев нужно знать распределение соответствующих статистик в случае неоднородной полиномиальной схемы. В настоящей работе сформулированы условия, при которых в неоднородном случае существует предельное распределение набора статистик χ^2 , и найдено его преобразование Лапласа.

Рассмотрим последовательность независимых (неоднородных полиномиальных) испытаний с m исходами $1, 2, \dots, m$. Пусть $p_1(t), \dots, p_m(t)$ — вероятности этих исходов в испытании с номером $t = 1, 2, \dots$. Зададим r , $r \geq 2$, натуральных чисел $1 \leq n_1 < \dots < n_r$, относительно которых предположим, что при $n_1 \rightarrow \infty$ выполняются соотношения

$$\sqrt{\frac{n_i}{n_{i+1}}} = \rho_i(1 + o(1)), \quad 0 < \rho_i < 1, \quad i = 1, \dots, r-1. \quad (1)$$

Из (1) следует существование пределов

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n_i}{n_j}} = \rho_{ij} = \rho_i \dots \rho_{j-1}, \quad 1 \leq i < j \leq r, \quad (2)$$

так что $\rho_{i,i+1} = \rho_i$, $i = 1, \dots, r-1$. Положив $\rho_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, r$, и $\rho_{ji} = \rho_{ij}$, $1 \leq i < j \leq r$, введем матрицу $R = \|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^r$ порядка r , которая потребуется нам в дальнейшем.

Относительно вероятностей исходов $p_j(t)$ далее везде будем предполагать, что они изменяются так, что для каждого $j = 1, \dots, m$

$$p_j(t) = p_j \left(1 + \frac{w_j(t)}{\sqrt{n_r}} \right), \quad |w_j(t)| \leq c, \quad t = 1, \dots, n_r, \quad (3)$$

где c — положительная постоянная, $0 < p_j < 1$, $\sum_{j=1}^m p_j = 1$, и при $n_1 \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n_i - n_{i-1}} \sum_{t=n_{i-1}+1}^{n_i} \sqrt{p_j} w_j(t) = \tilde{\alpha}_{ij}(1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, r, \quad n_0 = 0. \quad (4)$$

Обозначим $\nu_j(n_i)$ частоту исхода j в первых n_i испытаниях, и рассмотрим случайные величины

$$\tilde{\xi}_{ij}(n_i) = \frac{1}{\sqrt{n_i p_j}} (\nu_j(n_i) - n_i p_j), \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Положим

$$\chi_i^2(n_i) = \sum_{j=1}^m \tilde{\xi}_{ij}^2(n_i), \quad i = 1, \dots, r, \quad \chi^2(n_r) = (\chi_1^2(n_1), \dots, \chi_r^2(n_r)). \quad (6)$$

В данной работе, в предположении, что r и вектор $(p_1, \dots, p_m)$ фиксированы, $n_1 \rightarrow \infty$, и выполняются условия (1), (3) и (4), будет получено преобразование Лапласа предельного распределения случайного вектора $\chi^2(n_r)$. Оно будет найдено в §3 с использованием вспомогательного материала, изложенного в §2. При доказательстве утверждений нами в значительной мере повторяются соответствующие доказательства работы [1].

2. Предварительные рассмотрения

Рассмотрим случайные величины

$$\xi_{ij}(n_i) = \frac{1}{\sqrt{n_i p_j}} \left(\nu_j(n_i) - \sum_{t=1}^{n_i} p_j(t) \right), \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m, \quad (7)$$

которые связаны с величинами (5) равенствами

$$\tilde{\xi}_{ij}(n_i) = \xi_{ij}(n_i) + \frac{\sqrt{n_i}}{\sqrt{p_j}} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{t=1}^{n_i} p_j(t) - p_j \right), \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Если выполняются условия (1), (3), (4), то при $n_1 \rightarrow \infty$ существуют пределы

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n_i}}{\sqrt{p_j}} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{t=1}^{n_i} p_j(t) - p_j \right) = \rho_{ir} \tilde{a}_{ij}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^i \rho_{ki}^2 (1 - \rho_{k-1}^2) \tilde{a}_{kj}, \quad \tilde{a}_{1j} = \tilde{a}_{1j}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$\rho_0 = 0$, и величины ρ_{ki} и $\tilde{a}_{ki}$ определяются соотношениями (2) и (4) соответственно.

Нетрудно проверить, используя, например, явные выражения для характеристических функций, что случайные величины $\xi_{1j}(n_1), \xi_{i+1,j}(n_{i+1}) - \xi_{ij}(n_i), i = 1, \dots, r-1, j = 1, \dots, m$, совместно асимптотически нормальны. Отсюда следует совместная асимптотическая нормальность как величин (7), так и величин (5), и вытекает сходимость по распределению при $n_1 \rightarrow \infty$ случайного вектора $\chi^2(n_r)$, определенного равенствами (6), к некоторому r -мерному случайному вектору $\chi^2 = (\chi_1^2, \dots, \chi_r^2)$.

Обозначим

$$\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{im}), \quad \tilde{\xi}_i = (\tilde{\xi}_{i1}, \dots, \tilde{\xi}_{im}), \quad i = 1, \dots, r,$$

и

$$\xi = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1m}, \dots, \xi_{r1}, \dots, \xi_{rm}), \quad \tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_{11}, \dots, \tilde{\xi}_{1m}, \dots, \tilde{\xi}_{r1}, \dots, \tilde{\xi}_{rm}).$$

Распределения случайных векторов ξ и $\tilde{\xi}$ совпадают с соответствующими предельными нормальными распределениями величин (7) и (5). В частности, вектор ξ имеет rm -мерное нормальное распределение с нулевым вектором средних значений и ковариационной матрицей, которая определяется формулами (2.4) из работы [1].

Из (8) и (9) следует, что

$$\tilde{\xi}_{ij} = \xi_{ij} + \rho_{ir} \tilde{a}_{ij}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m, \quad (11)$$

где числа $\tilde{a}_{ij}$ определяются формулой (10). Равенства (11) аналогичны равенствам (3.3) из [1], в которых, однако, множители $\tilde{a}_{ij}$ при ρ_{ir} не зависят от i : $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_j$, $j = 1, \dots, r$.

Как и в [1], предельный вектор χ^2 можно представить в виде суммы $m-1$ случайных векторов $(\tilde{\zeta}_{1j}^2, \dots, \tilde{\zeta}_{rj}^2)$, $j = 1, \dots, m-1$, где

$$\tilde{\zeta}_{ij} = \zeta_{ij} + \rho_{ir} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (12)$$

Случайные векторы $(\zeta_{1j}, \dots, \zeta_{rj})$, $j = 1, \dots, m-1$, независимы и имеют одно и то же r -мерное нормальное распределение с нулевым вектором средних значений и ковариационной матрицей R , определенной в §1. Векторы $\tilde{\zeta}_i = (\tilde{\zeta}_{i1}, \dots, \tilde{\zeta}_{im})$ и $\zeta_i = (\zeta_{i1}, \dots, \zeta_{im})$ ($\zeta_{im} = 0$ с вероятностью 1) связаны с векторами $\tilde{\xi}_i$ и ξ_i , определенными выше, равенствами

$$\tilde{\zeta}_i = C \tilde{\xi}_i', \quad \zeta_i = C \xi_i', \quad i = 1, \dots, r,$$

где C — ортогональная матрица порядка r , вид которой указан в [1], штрих обозначает транспонирование, и векторы, отмеченные штрихом, рассматриваются как вектор-столбцы. Наконец, величины в (12) определяются равенствами

$$a_i = C \tilde{a}_i', \quad a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im}), \quad \tilde{a}_i = (\tilde{a}_{i1}, \dots, \tilde{a}_{im}), \quad i = 1, \dots, r.$$

Положим также

$$\alpha_i = C\tilde{\alpha}'_i, \quad \alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im}), \quad \tilde{\alpha}_i = (\tilde{\alpha}_{i1}, \dots, \tilde{\alpha}_{im}), \quad i = 1, \dots, r,$$

где величины $\tilde{\alpha}_i$ определены соотношениями (4). Учитывая (3), (4), и то, что m -я строка матрицы C имеет вид $(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m})$, можно показать, что $\alpha_{im} = 0$, $i = 1, \dots, r$. Заметим, что, аналогично равенству (10),

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i \rho_{ki}^2 (1 - \rho_{k-1}^2) \alpha_{kj}, \quad a_{1j} = \alpha_{1j}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m, \quad (13)$$

и, кроме того, $a_{im} = 0$, $i = 1, \dots, r$.

Согласно [1], для определителя матрицы R , определенной в §1, выполняется равенство

$$|R| = \prod_{k=1}^{r-1} (1 - \rho_k^2), \quad (14)$$

где величины $\rho_1, \dots, \rho_{r-1}$ задаются соотношениями (1). Запись $|A|$ обозначает определитель матрицы A . Из (1) и (14) находим, что $|R| > 0$, и, следовательно, существует матрица $R^{-1} = \|\rho_{ij}^*\|_{i,j=1}^r$, обратная R . Ее элементы, как указано в [1], имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{ii}^* &= \frac{1 - \rho_{i-1}^2 \rho_i^2}{(1 - \rho_{i-1}^2)(1 - \rho_i^2)}, \quad i = 2, \dots, r-1, \quad r \geq 3, \\ \rho_{11}^* &= \frac{1}{1 - \rho_1^2}, \\ \rho_{rr}^* &= \frac{1}{1 - \rho_{r-1}^2}, \\ \rho_{i,i+1}^* &= \rho_{i+1,i}^* = -\frac{1}{1 - \rho_i^2}, \quad i = 1, \dots, r-1, \\ \rho_{ij}^* &= 0, \quad 1 < |j - i|. \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая равенства (12) и сказанное выше о распределении случайных векторов $(\zeta_{1j}, \dots, \zeta_{rj})$, $j = 1, \dots, m-1$, заключаем, что плотность $\tilde{p}_{rj}(x_1, \dots, x_r)$ вектора $(\tilde{\zeta}_{1j}, \dots, \tilde{\zeta}_{rj})$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{rj}(x_1, \dots, x_r) &= \frac{1}{(2\pi)^{r/2} |R|} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^r \rho_{ik}^* (x_i - \rho_{ir} a_{ij}) (x_k - \rho_{kr} a_{kj}) \right\}, \quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (16)$$

где элементы ρ_{ij}^* матрицы R^{-1} находятся с помощью равенств (15).

Если в правой части (16) величины a_{ij} заменить на a_j , то (16) сводится к формуле (3.5) из работы [1].

3. Преобразование Лапласа предельного случайного вектора

Цель настоящего параграфа — найти преобразование Лапласа случайного вектора $\chi^2 = (\chi_1^2, \dots, \chi_r^2)$, предельного для вектора (6).

Введем следующие естественные обобщения многочленов $V_r(s_1, \dots, s_r)$ и $W_{r-1}(s_1, \dots, s_{r-1})$ из работы [1]: при $j_0 = 0$, $k = 1, \dots, r$,

$$V_k = V_k(s_1, \dots, s_k) = 1 + \sum_{l=1}^k 2^l \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k} \prod_{h=1}^l (1 - \rho_{j_{h-1}, j_h}^2) s_{j_h}; \quad (17)$$

при $j_0 = k - 1$, $k = 1, \dots, r$,

$$V_{kr} = V_{kr}(s_1, \dots, s_k) = 1 + \sum_{l=1}^{r-k+1} 2^l \sum_{k \leq j_1 < \dots < j_l \leq r} \prod_{h=1}^l (1 - \rho_{j_{h-1}, j_h}^2) s_{j_h}; \quad (18)$$

при $j_l = k + 1$, $k = 1, \dots, r - 1$,

$$W_k = W_k(s_1, \dots, s_k) = 1 + \sum_{l=1}^k 2^l \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k} \prod_{h=1}^l (1 - \rho_{j_h, j_{h+1}}^2) s_{j_h}, \quad (19)$$

где $s_1, \dots, s_r$ — переменные и $\rho_{0j} = 0$, если $j > 0$. Отметим, что $V_{1r} = V_r$. При $k = r$ и $k = r - 1$, V_k и W_k совпадают, соответственно, с многочленами V_r и W_{r-1} из работы [1]. Многочлены W_k и V_k , как нетрудно доказать, связаны равенством

$$V_k - V_{k-1} = 2s_k W_{k-1}, \quad k = 2, \dots, r. \quad (20)$$

Рассмотрим матрицу $Q = R^{-1} + 2S$, где

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_r \end{pmatrix}$$

и R^{-1} — матрица, обратная R , определенная в §2. Если $s_1, \dots, s_r$ — неотрицательные числа, то существует матрица $Q^{-1} = \|q_{ij}^*\|_{i,j=1}^r$, обратная Q . Действительно,

$$|Q| = \frac{1}{|R|} |I + 2SR|, \quad (21)$$

где I — единичная матрица порядка r . Из формул (2.16) и (2.20) работы [1] вытекает, что

$$V_r = |I + 2SR|. \quad (22)$$

Из (17) находим, что $V_r > 0$ для неотрицательных значений $s_1, \dots, s_r$, а из (14), (21), (22) следует, что тогда и $|Q| > 0$, откуда следует существование Q^{-1} . В дальнейшем будем предполагать, что значения величин $s_1, \dots, s_r$, определяющих матрицу Q , неотрицательны.

Для нахождения преобразования Лапласа вектора χ^2 нам потребуются выражения для всех элементов q_{ij}^* матрицы Q^{-1} . В рассматриваемом в работе [1] однородном случае для этого потребовался лишь один элемент q_{rr}^* матрицы Q^{-1} . Основные этапы вычисления элементов матрицы Q^{-1} отражены в следующих двух леммах.

Лемма 1. Элементы матрицы $Q^{-1} = \|q_{ij}^*\|_{i,j=1}^r$ могут быть представлены в виде

$$q_{ij}^* = (-1)^{i+j} \frac{1}{|Q|} \Delta_{i-1} \rho_{i,i+1}^* \dots \rho_{j-1,j}^* D_{j+1,r}, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad (23)$$

где $\Delta_0 \equiv 1$, $D_{r+1,r} \equiv 1$,

$$\Delta_k = \Delta_k(s_1, \dots, s_k) = \begin{vmatrix} \rho_{11}^* + 2s_1 & \rho_{12}^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \rho_{21}^* & \rho_{22}^* + 2s_2 & \rho_{23}^* & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho_{k,k-1}^* & \rho_{kk}^* + 2s_k \end{vmatrix} \quad (24)$$

и

$$D_{kr} = D_{kr}(s_k, \dots, s_r) = \begin{vmatrix} \rho_{kk}^* + 2s_k & \rho_{k,k+1}^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \rho_{k+1,k}^* & \rho_{k+1,k+1}^* + 2s_{k+1} & \rho_{k+1,k+2}^* & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho_{r,r-1}^* & \rho_{rr}^* + 2s_r \end{vmatrix}, \quad (25)$$

$k = 1, \dots, r$, — верхние и нижние главные миноры матрицы Q .

Утверждение леммы следует из известных свойств миноров якобиевых (трехдиагональных) матриц (см. [6]). Лемма также может легко быть доказана непосредственно, при использовании известного правила вычисления элементов обратной матрицы.

Лемма 2. Определители (24) и (25) могут быть вычислены по формулам

$$\Delta_k = \frac{W_k}{\prod_{l=1}^k (1 - \rho_l^2)}, \quad D_{kr} = \frac{V_{kr}}{\prod_{l=k-1}^{r-1} (1 - \rho_l^2)}, \quad k = 1, \dots, r, \quad (26)$$

где многочлены W_k и V_{kr} определены формулами (19) и (18) соответственно.

Доказательство равенств (26) аналогично доказательству пар формул (2.16), (2.17) и (3.9), (3.10) в [1].

Следствие 1. Для элементов q_{ij}^* , $i, j = 1, \dots, r$, матрицы Q^{-1} справедливо равенство

$$q_{ij}^* = \frac{1}{V_r} W_{i-1} \rho_{ij}^* V_{j+1,r}, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad (27)$$

где ρ_{ij} , $i, j = 1, \dots, r$, — элементы матрицы R , многочлены $V_{j+1,r}$ и W_{i-1} определяются формулами (18) и (19), а V_r задается равенством (17).

Действительно, из формул (14), (21) и (22) следует, что

$$|Q| = \frac{V_r}{\prod_{l=1}^{k-1} (1 - \rho_l^2)}.$$

Используя это равенство и формулы (15), (16), убеждаемся в справедливости следствия 1.

Учитывая (20), в формуле (27) многочлены W_{i-1} можно заменить на многочлены (17).

Из равенств (26) получаем матричные представления для многочленов V_{kr} и W_k :

$$\begin{aligned} V_{kr} &= \prod_{l=k-1}^{r-1} (1 - \rho_l^2) D_{kr}, \quad k = 1, \dots, r, \\ W_k &= \prod_{l=1}^k (1 - \rho_l^2) \Delta_k, \quad k = 1, \dots, r-1, \end{aligned} \quad (28)$$

где миноры D_{kr} и Δ_k определяются формулами (25) и (24). Из представлений (28) находим, что для многочленов V_{kr} при $k = r-2, \dots, 1$, $r \geq 3$, выполняются рекуррентные соотношения

$$V_{kr} = \frac{1}{1 - \rho_k^2} ((1 - \rho_{k-1}^2 \rho_k^2 + 2(1 - \rho_{k-1}^2)(1 - \rho_k^2)s_k) V_{k+1,r} - \rho_k^2 (1 - \rho_{k-1}^2) V_{k+2,r})$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} V_{rr} &= 1 + 2(1 - \rho_{r-1}^2)s_r, \\ V_{r-1,r} &= 1 + 2(1 - \rho_{r-2}^2)s_{r-1} + 2(1 - \rho_{r-2}^2 \rho_{r-1}^2)s_r + 4(1 - \rho_{r-2}^2)(1 - \rho_{r-1}^2)s_{r-1}s_r, \end{aligned}$$

и для многочленов W_k при $k = 3, \dots, r-1$, $r \geq 4$, — соотношения

$$W_k = \frac{1}{1 - \rho_{k-1}^2} ((1 - \rho_{k-1}^2 \rho_k^2 + 2(1 - \rho_{k-1}^2)(1 - \rho_k^2)s_k) W_{k-1} - \rho_{k-1}^2 (1 - \rho_k^2) W_{k-2})$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} W_1 &= 1 + 2(1 - \rho_1^2)s_1, \\ W_2 &= 1 + 2(1 - \rho_1^2 \rho_2^2)s_1 + 2(1 - \rho_2^2)s_2 + 4(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)s_1s_2, \end{aligned}$$

Заметим также, что, аналогично равенству (22), многочлен V_k , $k = 1, \dots, r-1$, равен верхнему главному минору матрицы $I + 2SR$. Для многочленов V_k выполняется рекуррентное соотношение

$$V_k = \left(1 + 2(1 - \rho_{k-1}^2)s_k + \rho_{k-1}^2 \frac{s_k}{s_{k-1}} \right) V_{k-1} - \rho_{k-1}^2 \frac{s_k}{s_{k-1}} V_{k-2}, \quad k = 3, \dots, r, \quad r \geq 3,$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} V_1 &= 1 + 2s_1, \\ V_2 &= 1 + 2s_1 + 2s_2 + 4(1 - \rho_1^2)s_1s_2. \end{aligned}$$

Теперь упростим две суммы, которые появятся в дальнейшем в выражении для искомого преобразования Лапласа случайного вектора $\chi^2(n_r)$. Речь идет о суммах

$$A^2 = \sum_{j=1}^{m-1} A_j^2, \quad A_j^2 = \sum_{i,k=1}^r \rho_{ik}^* \rho_{ir} \rho_{kr} a_{ij} a_{kj}, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (29)$$

и

$$Y_{ik} = \sum_{j=1}^{m-1} y_{ij} y_{kj}, \quad y_{ij} = - \sum_{l=1}^r \rho_{il} \rho_{lr} a_{lj}, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad i, k = 1, \dots, r. \quad (30)$$

Числа a_{ij} в суммах A^2 и Y_{ik} определяются равенством (13).

Лемма 3. Для сумм (29) и (30) выполняются равенства

$$A^2 = \sum_{l=1}^r \rho_{lr}^2 (1 - \rho_{l-1}^2) \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_{lj}^2 \quad (31)$$

и

$$Y_{ik} = \rho_{ir} \rho_{kr} \beta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, r, \quad (32)$$

где

$$\beta_{ik} = \tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}'_k + \tilde{\alpha}_{i+1} \tilde{\alpha}'_{k+1} - \tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}'_{k+1} - \tilde{\alpha}_{i+1} \tilde{\alpha}'_k, \quad (33)$$

$\tilde{\alpha}_i = (\tilde{\alpha}_{i1}, \dots, \tilde{\alpha}_{im})$, и величины $\tilde{\alpha}_{ij}$ задаются формулой (4).

Доказательство. Используя формулы (13) и (15), нетрудно проверить, что

$$y_{ij} = -\rho_{ir}(\alpha_{ij} - \alpha_{i+1,j}), \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad \alpha_{r+1,j} = 0 \quad (34)$$

(величины α_{ij} определены в §2). Отметим также, что, поскольку $\alpha_i = C\tilde{\alpha}'_i$, $i = 1, \dots, r$, и C — ортогональная матрица,

$$\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} \alpha_{kj} = \alpha_i \alpha'_k = \tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}'_k.$$

Из этих утверждений следует справедливость равенства (32).

Далее, учитывая формулы (30) для величин y_{ij} , из (29) получаем, что

$$A_j^2 = - \sum_{i=1}^r \rho_{ir} a_{ij} y_{ij}, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

откуда, используя равенства (13) и (34), находим, что

$$\begin{aligned} A^2 &= \sum_{j=1}^{m-1} A_j^2 = \sum_{l=1}^r \rho_{lr}^2 (1 - \rho_{l-1}^2) \alpha_l \alpha'_l \\ &= \sum_{l=1}^r \rho_{lr}^2 (1 - \rho_{l-1}^2) \tilde{\alpha}_l \tilde{\alpha}'_l, \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

Сформулируем и докажем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. Если $n_1 \rightarrow \infty$ и выполнены условия (1), (3) и (4), то случайный вектор $\chi^2(n_r)$ (см. (6)) сходится по распределению к вектору $\chi^2 = (\chi_1^2, \dots, \chi_r^2)$, преобразование Лапласа которого имеет вид

$$L_r(s_1, \dots, s_r) = \frac{1}{V_r^{(m-1)/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^r \rho_{lr}^2 (1 - \rho_{l-1}^2) \tilde{\alpha}_l \tilde{\alpha}'_l \right\} \times \exp \left\{ \frac{1}{2V_r} \sum_{i,j=1}^r \rho_{ir} \rho_{jr} \rho_{ij} \beta_{ij} W_{i-1} V_{j+1,r} \right\}, \quad (35)$$

где $s_1, \dots, s_r$ — неотрицательные переменные, V_r , $V_{j+1,r}$ и W_{i-1} — многочлены от этих переменных, определяемые формулами (17), (18) и (19), величины ρ_{ij} и β_{ij} находятся с помощью (2) и (33), и компоненты векторов $\tilde{\alpha}_l = (\tilde{\alpha}_{l1}, \dots, \tilde{\alpha}_{lm})$, $l = 1, \dots, r$, задаются соотношениями (4).

Доказательство. Факт сходимости по распределению при $n_1 \rightarrow \infty$ случайного вектора (6) к вектору χ^2 был установлен в §2. Вспоминая, что вектор $\chi^2 = (\chi_1^2, \dots, \chi_r^2)$ является суммой независимых векторов $(\tilde{\zeta}_{1j}, \dots, \tilde{\zeta}_{rj})$, $j = 1, \dots, m-1$, (см. §2), запишем преобразование Лапласа вектора χ^2 следующим образом:

$$L_r(s_1, \dots, s_r) = \mathbf{M} \exp \{ -(s_1 \chi_1^2 + \dots + s_r \chi_r^2) \} \\ = \prod_{j=1}^{m-1} \mathbf{M} \exp \{ -(s_1 \tilde{\zeta}_{1j}^2 + \dots + s_r \tilde{\zeta}_{rj}^2) \},$$

где $s_1, \dots, s_k$ — неотрицательные числа. Используя формулу (16) для плотности случайного вектора $(\tilde{\zeta}_{1j}, \dots, \tilde{\zeta}_{rj})$, приведем $L_r(s_1, \dots, s_r)$ к виду

$$L_r(s_1, \dots, s_r) = \frac{1}{((2\pi)^{r/2} \sqrt{|R|})^{m-1}} e^{-A^2/2} \prod_{j=1}^{m-1} \int \dots \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^r (\rho_{ik}^* + 2\delta_{ik} s_k) x_i x_k - \sum_{i=1}^r y_{ij} x_i \right\} dx_1 \dots dx_r, \quad (36)$$

где интегрирование в каждом из интегралов ведется по всему r -мерному пространству, величины A^2 и y_{ij} , $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m-1$, определены посредством (29) и (30), δ_{ik} — символ Кронекера. Все квадратичные формы в подинтегральных выражениях в правой части равенства (36) имеют одну и ту же матрицу Q , определенную в начале §3. Для любых неотрицательных значений переменных $s_1, \dots, s_r$ матрица Q положительно определена. Действительно, главные верхние миноры Q суть многочлены $V_k(s_1, \dots, s_k)$, $k = 1, \dots, r$, определенные формулой (17), и для неотрицательных значений $s_1, \dots, s_k$ выполняются неравенства $V_k > 0$, $k = 1, \dots, r$. Следовательно, можно воспользоваться формулой (II.12.1b) из [7]. В результате, преобразование Лапласа вектора χ^2 представляется в виде

$$L_r(s_1, \dots, s_r) = \frac{1}{V_r^{(m-1)/2}} e^{-A^2/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r q_{ij}^* \left(\sum_{j=1}^{m-1} y_{ij} y_{kj} \right) \right\}, \quad (37)$$

где q_{ij}^* — элементы матрицы Q^{-1} . В заключение, используя формулу (27) и лемму 3, из (37) получаем (35); теорема тем самым доказана.

В рассматриваемом в работе [1] однородном случае, среди сумм $\sum_{j=1}^{m-1} y_{ij}y_{kj}$ в (37) отлична от нуля только сумма с $i = k = r$, и преобразование Лапласа (35), полученное здесь, сводится к виду (3.8) из [1].

Список литературы

1. Захаров В. К., Сарманов О. В., Севастьянов Б. А. Последовательный критерий χ^2 . *Матем. сб.* (1969) **79(121)**, №3(7), 444–460.
2. Johnson N. L., Kotz S. *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*. Wiley, New York, 1972.
3. Ивченко Г. И., Севастьянов Б. А. Процесс χ^2 и его применение в статистике. В кн.: *Вероятностные распределения и математическая статистика*. ФАН, Ташкент, 1986, с.188–198.
4. Левин В. В. Общая предельная нормальная теорема в задаче о размещении и ее приложения в статистике. В кн.: *Некоторые прикладные вопросы теории вероятностей и математической статистики*. МИЭМ, Москва, 1978, с.54–70.
5. Селиванов Б. И., Чистяков В. П. Последовательный χ^2 -критерий, построенный по s -цепочкам состояний цепи Маркова. *Дискретная математика* (1997) **9**, №4, 127–136.
6. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Наука, Москва, 1966.
7. Крамер Г. *Математические методы статистики*. ГИИЛ, Москва, 1948.

Статья поступила 10.12.1997.