Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Функциональная предельная теорема для логарифма умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 131–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:53:17

УДК 519.2

Функциональная предельная теорема для логарифма умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде

© 1998 г. В. И. Афанасьев

Пусть $\{\xi_n\}$ — умеренно докритический ветвящийся процесс в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями. Доказано, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $\{\ln \xi_{[nt]} / (\Delta \sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0\}$ случайных процессов, где Δ — некоторая положительная постоянная, сходится по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода к броуновской экскурсии $\{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}$.

1. Пусть последовательности случайных величин

$$\pi_n = \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \dots\}, \quad \pi_n^{(i)} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} = 1, \quad n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

одинаково распределены и независимы при разных n . Введем производящие функции

$$f_n(s) = \pi_n^{(0)} + \pi_n^{(1)}s + \pi_n^{(2)}s^2 + \dots, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ неотрицательных целочисленных случайных величин называется ветвящимся процессом в случайной среде $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, если

$$\mathbf{M}(s^{\xi_{n+1}} \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n) = (f_n(s))^{\xi_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

(для простоты изложения будем считать, что $\xi_0 = 1$).

Положим

$$X_n = \ln f'_{n-1}(1), \quad \eta_n = f''_{n-1}(1)l / (2f'_{n-1}(1)^2), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ветвящийся процесс в случайной среде называется умеренно докритическим, если

$$\mathbf{M}X_1 < 0, \quad \mathbf{M}(X_1 \exp X_1) > 0.$$

В работе [1], где изучался этот процесс, установлено, что если производящие функции $f_n(s), n \in \mathbf{N}_0$, дробно-линейны, конечны $\mathbf{M} \exp |X_1|$, $\mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1)$ и случайная величина X_1 имеет атом в нуле в случае, когда она решетчатая, то при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[nt]} / m_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (1)$$

где m_k — условное математическое ожидание ξ_k относительно случайной среды, μ — случайный процесс с положительными постоянными реализациями на $(0, 1)$, знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ в этом соотношении означает сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1-u]$ с топологией Скорохода [2] при любом фиксированном $u \in (0, 1/2)$.

В настоящей работе на основе соотношения (1) устанавливается следующая функциональная предельная теорема.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — умеренно докритический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbb{N}_0$, дробно-линейны. Пусть конечны $\mathbf{M} \exp |X_1|$, $\mathbf{M}(\mu_1 \exp X_1)$. Наконец, либо функция распределения X_1 имеет отличную от нуля абсолютно непрерывную компоненту, либо X_1 является решетчатой случайной величиной с атомом в нуле. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{\ln \xi_{[nt]} / (\Delta \sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (2)$$

где Δ — некоторая положительная постоянная, $W_0^+(t)$ — броуновская экскурсия, знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода.

Аналогичная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде обсуждается в работах [4–6].

2. В силу требований, предъявляемых к случайной среде $\{\pi_n\}$, пары случайных величин (X_1, η_1) , $(X_2, \eta_2), \dots$ независимы и одинаково распределены. Как показано в [1], в условиях теоремы 1 случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет следующим ограничениям:

- (A) $\mathbf{M}X_1 < 0$;
- (B) функция $\Theta(t) = \mathbf{M} \exp(tX_1)$ определена при $t \in [0, a]$, где $0 < a$ — постоянная;
- (C) функция $\Theta(t)$, $t \in [0, a]$, достигает своего минимума $\gamma < 1$ в точке $\tau \in (0, a)$;
- (D̃) либо функция распределения X_1 имеет отличную от нуля абсолютно непрерывную компоненту, либо X_1 является решетчатой случайной величиной с атомом в нуле; причем a можно считать равной 1, поэтому $\tau < 1$.

Иногда вместо условия (D̃) рассматривается более слабое ограничение:

- (D) случайная величина X_1 имеет атом в нуле, если она решетчатая.

Приведем некоторые результаты, справедливые для случайного блуждания, удовлетворяющего указанным условиям. Пусть $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ — строгие нижние лестничные моменты, то есть

$$\tau_1 = \inf\{n: S_n < 0\}, \quad \tau_2 = \inf\{n > \tau_1: S_n < S_{\tau_1}\}, \quad \dots$$

В [7] показано, что если выполнены условия (A)–(D), то при любом фиксированном $j \in \mathbb{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \sim c_1^{(j)} \frac{\gamma^n}{n^{3/2}}, \quad (3)$$

$$\mathbf{P}(\tau_j = n) \sim c_2^{(j)} \frac{\gamma^n}{n^{3/2}}, \quad (4)$$

где $c_1^{(j)}, c_2^{(j)}$ — положительные постоянные. В [1] установлено, что если выполнены условия (A)–(D), то при любых фиксированных $j \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{S_0, S_1, \dots, S_k; S_{n-l}, S_{n-l+1}, \dots, S_{n-1}, S_n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\vec{S}_0^{(j)}, \vec{S}_1^{(j)}, \dots, \vec{S}_k^{(j)}; \overleftarrow{S}_l^{(j)}, \overleftarrow{S}_{l-1}^{(j)}, \dots, \overleftarrow{S}_1^{(j)}, \overleftarrow{S}_0^{(j)}\}; \quad (5)$$

$$\{S_0, S_1, \dots, S_k; S_{n-l}, S_{n-l+1}, \dots, S_{n-1}, S_n \mid \tau_j = n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\vec{S}_0^{(j)}, \vec{S}_1^{(j)}, \dots, \vec{S}_k^{(j)}; \overleftarrow{S}_l^{(j)}, \overleftarrow{S}_{l-1}^{(j)}, \dots, \overleftarrow{S}_1^{(j)}, \overleftarrow{S}_0^{(j)}\}, \quad (6)$$

где

$$\{\vec{S}_k^{(j)}, k \in \mathbb{N}_0\}, \quad \{\overleftarrow{S}_l^{(j)}, l \in \mathbb{N}_0\}, \quad \{\overleftarrow{S}_k^{(j)}, k \in \mathbb{N}_0\}, \quad \{\vec{S}_l^{(j)}, l \in \mathbb{N}_0\}$$

— некоторые случайные последовательности. Заметим, что соотношения (3) при $j = 1$ и (5) при $j = 1, k = l = 0$ были получены в работе [8].

Положим при $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n(t) = S_{[nt]} / (\Delta \sqrt{n}),$$

где

$$\Delta = \frac{\Theta''(\tau)}{\gamma}$$

(это и есть та самая постоянная Δ , которая фигурирует в соотношении (2)). В [9] установлено, что если выполнены условия (A), (B), (C), ($\tilde{D}$), то

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_1 > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (7)$$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_1 = n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (8)$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ имеет тот же смысл, что и в соотношении (2).

Чтобы обобщить соотношения (7) и (8), нам потребуется следующее утверждение (см. [10]).

Лемма 1. Пусть последовательность $\{c_{p,q}; p, q \in \mathbb{N}_0\}$ ограничена,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} c_{p,q} &= c_p', & \lim_{p \rightarrow \infty} c_{p,q} &= c_q'', \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n n^{3/2} \gamma^{-n} &= u, & \lim_{n \rightarrow \infty} v_n n^{3/2} \gamma^{-n} &= v. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \gamma^{-n} \sum_{p=0}^n c_{p,n-p} u_p v_{n-p} = uV + vU,$$

где

$$U = \sum_{p=0}^{\infty} c'_p u_p \gamma^{-p},$$

$$V = \sum_{p=0}^{\infty} c''_p v_p \gamma^{-p}.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (A), (B), (C), ($\tilde{D}$), тогда при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (9)$$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_j = n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}. \quad (10)$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Соотношения (9), (10) справедливы при $j = 1$ (см. (7), (8)). Предположим, что эти соотношения справедливы при некотором $j \in \mathbf{N}$ и покажем, что

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}. \quad (11)$$

Для этого достаточно показать (см. теоремы 15.1, 15.5 в [2]), что, во-первых, при любых фиксированных $m \in \mathbf{N}$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$, $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \quad (12)$$

и, во-вторых, при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0, \quad (13)$$

где $w_f(\delta, u, v)$ означает модуль непрерывности функции $f \in D[u, v]$, $0 \leq u < v < \infty$, то есть

$$w_f(\delta, u, v) = \sup |f(s) - f(t)|,$$

где супремум берется по всем s, t таким, что $s, t \in [u, v]$, $|t - s| < \delta$, $\delta \in (0, \infty)$.

Докажем сначала соотношение (12). Можно ограничиться рассмотрением случая, когда $t_m < 1$, поскольку последовательность $\{Y_n(1) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$ случайных величин сходится по распределению к 0, что следует из сходимости по распределению последовательности $\{S_n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$ (см. (5)). Запишем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \sum_{p=j}^n c_{p,n-p} \mathbf{P}(\tau_j = p) \mathbf{P}(\tau_{j+1} - \tau_j > n - p), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$c_{p,q} = \mathbf{P}(Y_{p+q}(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_j = p, \tau_{j+1} - \tau_j > q).$$

Положим

$$S'_i = S_{\tau_j+i} - S_{\tau_j}, \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad \tau_{j+1} - \tau_j = \tau'_1, \quad Y'_n(t) = \frac{S'_{[nt]}}{\Delta\sqrt{n}}.$$

Случайная последовательность $\{S'_i\}$ образует точную вероятностную копию блуждания $\{S_i\}$ и не зависит от $\tau_j, S_1, \dots, S_{\tau_j}$, причем τ'_1 является первым строгим нижним лестничным моментом для $\{S'_n\}$. При любом фиксированном $p \in \mathbb{N}$ и достаточно большом q на множестве $\{\tau_j = p\}$ справедливо представление

$$S_{[(p+q)t_i]} = S'_{[(p+q)t_i]-p} + S_p, \quad i = 1, \dots, m.$$

Поскольку случайная величина $\{S_p/(\Delta\sqrt{p+q}) \mid \tau_j = p, \tau'_1 > q\}$ при фиксированном $p \in \mathbb{N}$ и $q \rightarrow \infty$ сходится по распределению к 0, ввиду соотношения (7) и независимости $\{S'_i\}$ от τ_j

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} c_{p,q} &= \lim_{q \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{S'_{[(p+q)t_i]-p}}{\Delta\sqrt{p+q}} \leq x_i \mid \tau'_1 > q \right) \\ &= \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (15)$$

При любом фиксированном $q \in \mathbb{N}$ и достаточно большом p на множестве $\{\tau_j = p\}$

$$[(p+q)t_i] < \tau_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

поэтому ввиду независимости τ'_1 от $\tau_j, S_1, \dots, S_{\tau_j}$ получаем, что

$$c_{p,q} = \mathbf{P} \left(\frac{S_{[(p+q)t_i]}}{\Delta\sqrt{p+q}} \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_j = p \right),$$

откуда по предположению индукции следует, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} c_{p,q} = \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m). \quad (16)$$

Из соотношений (3), (4), (14)–(16) в силу леммы 1 вытекает (12).

Докажем соотношение (13). Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \infty)$ и запишем представление

$$\mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \sum_{p=j}^n \tilde{c}_{p,q} \mathbf{P}(\tau_j = p) \mathbf{P}(\tau_1 > n - p), \quad (17)$$

где

$$\tilde{c}_{p,q} = \mathbf{P}(w_{Y_{p+q}}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid \tau_j = p, \tau'_1 > q).$$

Очевидно, что на множестве $\{\tau_j = p\}$

$$w_{Y_{p+q}}(\delta, 0, 1) \leq 2 \max_{1 \leq i \leq p} |S_i - S_p|/(\Delta\sqrt{p+q}) + w_{Y_q}((p+q)\delta/q, 0, 1)\sqrt{q/(p+q)}.$$

Поскольку случайная величина

$$2 \max_{1 \leq i \leq p} |S_i - S_p|/(\Delta\sqrt{p+q})$$

сходится по распределению к 0 при фиксированном $p \in \mathbb{N}$ и $q \rightarrow \infty$, а процесс Y'_q не зависит от τ_j , то

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \widetilde{c}_{p,q} \leq \lim_{q \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w_{Y'_q}((p+q)\delta/q, 0, 1)\sqrt{q/(p+q)} \geq \varepsilon/2 \mid \tau'_1 > q).$$

Ввиду соотношения (7) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{q \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w_{Y'_q}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid \tau'_1 > q) = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{q \rightarrow \infty} \widetilde{c}_{p,q} = 0. \quad (18)$$

Далее, на множестве $\{\tau_j = p\}$

$$w_{Y_{p+q}}(\delta, 0, 1) \leq 2 \max_{1 \leq i \leq q} |S'_i|/(\Delta\sqrt{p+q}) + w_{Y_p}((p+q)\delta/p, 0, 1)\sqrt{p/(p+q)}.$$

Поскольку случайная величина

$$2 \max_{1 \leq i \leq q} |S'_i|/(\Delta\sqrt{p+q})$$

сходится по распределению к 0 при фиксированном $q \in \mathbb{N}$ и $p \rightarrow \infty$, а процесс Y_p не зависит от τ'_1 , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \widetilde{c}_{p,q} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w_{Y_p}((p+q)\delta/p, 0, 1)\sqrt{p/(p+q)} \geq \varepsilon/2 \mid \tau_j = p).$$

Как следует из предположения индукции, при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{p \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w_{Y_p}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid \tau_j = p) = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{p \rightarrow \infty} \widetilde{c}_{p,q} = 0. \quad (19)$$

Из соотношений (3), (4), (17)–(19) и леммы 1 вытекает (13). Итак, соотношения (12) и (13) доказаны, следовательно, установлено соотношение (11). Аналогично показывается, что

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_{j+1} = n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}.$$

Лемма 2 доказана.

Дополним соотношения (5) и (9) при $j = 1$ следующим утверждением.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (А), (В), (С), ($\tilde{D}$). Тогда случайные последовательности

$$\{S_i, i \in \mathbb{N}_0 \mid \tau_1 > n\}, \quad \{S_{n-i}, i \in \mathbb{N}_0 \mid \tau_1 > n\}$$

(по определению $S_{-1} = S_{-2} = \dots = 0$) и случайный процесс

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_1 > n\}$$

асимптотически независимы при $n \rightarrow \infty$ (в смысле конечномерных распределений).

Доказательство. Покажем, что при любых фиксированных $k, l \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$, $y_0, y_1, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots, x_m, z_0, z_1, \dots, z_l \in [0, \infty)$ для случайных событий

$$\begin{aligned} A_k &= \{S_p \leq y_p, p = 0, 1, \dots, k\}, \\ B_m &= \{Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, 2, \dots, m\}, \\ C_l &= \{S_{n-q} \leq z_q, q = 0, 1, \dots, l\} \end{aligned}$$

существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k, B_m, C_l \mid \tau_1 > n),$$

представимый в виде произведения трех функций, первая из которых зависит от $y_0, y_1, \dots, y_k$, вторая от $x_1, x_2, \dots, x_m$, третья от $z_0, z_1, \dots, z_l$. Ввиду соотношения (7) последовательность $\{Y_n(1) \mid \tau_1 > n\}$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к 0, поэтому можно ограничиться рассмотрением случая, когда $t_m < 1$. Зафиксируем $t \in (t_m, 1)$, $0 < u < v < \infty$, $z \in [0, \infty)$. Очевидно, что при достаточно большом n

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(A_k, B_m, Y_n(t) \in [u, v], S_{n-l} \leq z, \tau_1 > n - l) \\ &= \int_u^v \mathbf{P}^{(x\Delta\sqrt{n})}(\tau_1 > n - l - [nt], S_{n-l-[nt]} \leq z) d_x \mathbf{P}(A_k, B_m, Y_n(t) \leq x, \tau_1 > [nt]), \quad (20) \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{P}^{(x)}(\cdot)$ означает вероятностную меру, отвечающую случайному блужданию $\{S_n\}$, начинающемуся в точке x :

$$S_0 = x, \quad S_n = x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пусть $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^x e^{\tau y} dF(y),$$

где

$$F(y) = \mathbf{P}(X_1 \leq y).$$

Рассмотрим случайное блуждание

$$\tilde{S}_0 = 0, \quad \tilde{S}_n = \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_n, \quad n \in \mathbf{N},$$

называемое сопряженным к блужданию $\{S_n\}$. В силу условия (C)

$$\mathbf{M}\tilde{X}_1 = \frac{1}{\gamma} \mathbf{M}(X_1 e^{\tau X_1}) = \frac{\Theta'(\tau)}{\gamma} = 0,$$

то есть блуждание $\{\tilde{S}_n\}$ имеет нулевой снос. Далее,

$$\mathbf{D}\tilde{X}_1 = \frac{1}{\gamma} \mathbf{M}(X_1^2 e^{\tau X_1}) = \frac{\Theta''(\tau)}{\gamma} = \Delta.$$

Нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k, B_m, Y_n(t) \leq x, \tau_1 > [nt]) \\ = \gamma^{[nt]} \int_0^x e^{-\tau y \Delta \sqrt{n}} d_y \mathbf{P}(\tilde{A}_k, \tilde{B}_m, \tilde{Y}_n(t) \leq y, \tilde{\tau}_1 > [nt]), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\tilde{A}_k, \tilde{B}_m, \tilde{\tau}_1, \dots$ имеют тот же смысл для блуждания $\{\tilde{S}_n\}$, что и $A_k, B_m, \tau_1, \dots$ для блуждания $\{S_n\}$. Из соотношений (20), (21) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k, B_m, Y_n(t) \in [u, v], S_{n-l} \leq z, \tau_1 > n-l) \\ = \int_u^v \mathbf{P}(x \Delta \sqrt{n}) (\tau_1 > n-l-[nt], S_{n-l-[nt]} \leq z) \\ \times \gamma^{[nt]} e^{-\tau x \Delta \sqrt{n}} d_x \mathbf{P}(\tilde{A}_k, \tilde{B}_m, \tilde{Y}_n(t) \leq x, \tilde{\tau} > [nt]). \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть X_1 — нерешетчатая случайная величина. Из теорем 7 и 8 статьи [11] следует, что в условиях доказываемой леммы при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(x \Delta \sqrt{n}) (\tau_1 > n-l-[nt], S_{n-l-[nt]} \leq z) \sim \frac{c_1 x \Delta}{n(1-t)^{3/2}} e^{\tau x \Delta \sqrt{n}} \gamma^{n-l-[nt]} G(z) \quad (23)$$

равномерно по $x \in [u, v]$, причем $G(z)$ — собственная абсолютно непрерывная функция распределения, c_1 — положительная постоянная.

Поскольку блуждание $\{\tilde{S}_n\}$ имеет нулевой снос и дисперсия $\tilde{X}_1$ конечна и положительна, то, как известно (см., например, [12]),

$$\mathbf{P}(\tilde{\tau}_1 > n) \sim c_2 n^{-1/2}, \quad (24)$$

где c_2 — положительная постоянная. Далее, в [13] показано, что

$$\{\tilde{S}_i, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tilde{\tau}_1 > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{S_i^*, i \in \mathbf{N}_0\},$$

где $\{S_i^*\}$ — некоторая однородная марковская цепь. В [14] установлено, что

$$\{\tilde{Y}_n(t), t \in [0, 1] \mid \tilde{\tau}_1 > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, 1]\},$$

где $W^+(t)$ — броуновская извилина [3]. Наконец, в [4] показано, что случайная последовательность $\{\tilde{S}_i, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tilde{\tau}_1 > n\}$ и процесс $\{\tilde{Y}_n(t), t \in [0, 1] \mid \tilde{\tau}_1 > n\}$ асимптотически независимы при $n \rightarrow \infty$. Из сказанного вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tilde{A}_k, \tilde{B}_m, \tilde{Y}_n(t) \leq x \mid \tilde{\tau}_1 > [nt]) = F_1(y_0, y_1, \dots, y_k) G_1(x_1, x_2, \dots, x_m; x), \quad (25)$$

где

$$F_1(y_0, y_1, \dots, y_k) = \mathbf{P}(S_p^* \leq y_p, p = 0, 1, \dots, k),$$

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_m; x) = \mathbf{P}(W^+(t_i/t) \leq x_i/\sqrt{t}, i = 1, \dots, m; W^+(1) \leq x/\sqrt{t}).$$

Из соотношений (3) (при $j = 1$) и (22)–(25) получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k, B_m, Y_n(t) \in [u, v], S_{n-l} \leq z \mid \tau_1 > n-l) \\ = \frac{\Delta c_1 c_2}{c_1^{(1)} (1-t)^{3/2} t^{1/2}} F_1(y_0, y_1, \dots, y_k) G(z) \int_u^v x d_x G_1(x_1, \dots, x_m; x). \end{aligned}$$

Откуда ввиду соотношения (7) и неравенства $\mathbf{MW}^+(1) < \infty$ (см. [3]) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k, B_m, S_{n-l} \leq z \mid \tau_1 > n-l) \\ = \frac{\Delta c_1 c_2}{c_1^{(1)} (1-t)^{3/2} t^{1/2}} F_1(y_0, \dots, y_k) G(z) \int_0^\infty x d_x G_1(x_1, \dots, x_m; x). \end{aligned} \quad (26)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k, B_m, C_l \mid \tau_1 > n) &= \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n-l)}{\mathbf{P}(\tau_1 > n)} \\ &\times \int_0^{z_l} \mathbf{P}^{(z)}(S_1 \leq z_{l-1}, S_2 \leq z_{l-2}, \dots, S_l \leq z_0, \tau_1 > l) \\ &\times d_z \mathbf{P}(A_k, B_m, S_{n-l} \leq z \mid \tau_1 > n-l), \end{aligned}$$

откуда, учитывая соотношения (3), (26) и абсолютную непрерывность $G(z)$, получаем требуемый результат:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k, B_m, C_l \mid \tau_1 > n) \\ = \frac{\Delta c_1 c_2}{c_1^{(1)} \gamma^l (1-t)^{3/2} t^{1/2}} \\ \times \tilde{F}_1(y_1, y_2, \dots, y_k) \int_0^\infty x d_x G_1(x_1, x_2, \dots, x_m; x) \\ \times \int_0^{z_l} \mathbf{P}^{(z)}(S_1 \leq z_{l-1}, S_2 \leq z_{l-2}, \dots, S_l \leq z_0, \tau_1 > l) dG(z). \end{aligned}$$

Случай, когда X_1 — решетчатая случайная величина, рассматривается аналогично (соотношение типа (23) для решетчатого случая можно получить из теоремы 3 в [15]). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (A), (B), (C), ($\tilde{D}$). Тогда случайные последовательности

$$\{S_i, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_1 = n\}, \quad \{S_{n-i}, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_1 = n\}$$

и случайный процесс

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_1 = n\}$$

асимптотически независимы при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть A_k, B_m, C_l — случайные события, введенные при доказательстве леммы 3. Иногда нам потребуются более развернутые обозначения

$$\begin{aligned} A_k &= A_k(y_0, y_1, \dots, y_k), \\ B_m &= B_m^n(t_1, x_1, \dots, t_m, x_m), \\ C_l &= C_l^n(z_0, z_1, \dots, z_l). \end{aligned}$$

Как и при доказательстве леммы 3, можно считать, что $t_m < 1$. Запишем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k, B_m^n(t_1, x_1, \dots, t_m, x_m), C_l^n(z_0, z_1, \dots, z_l) \mid \tau_1 = n) \\ = \mathbf{P}(A_k, B_m, C_l \mid \tau_1 > n-1) \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n-1)}{\mathbf{P}(\tau_1 = n)} - \mathbf{P}(A_k, B_m, C_l \mid \tau_1 > n) \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n)}{\mathbf{P}(\tau_1 = n)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку X_n не зависит от $S_1, \dots, S_{n-1}$ и при достаточно большом n

$$\begin{aligned} B_m^n(t_1, x_1, \dots, t_m, x_m) &= \left\{ \frac{S_{[(n-1)t_i n/(n-1)]}}{\Delta \sqrt{n-1}} \leq x_i \sqrt{\frac{n}{n-1}}, i = 1, \dots, m \right\} \\ &= B_m^{n-1} \left(t_1 \frac{n}{n-1}, x_1 \sqrt{\frac{n}{n-1}}, \dots, t_m \frac{n}{n-1}, x_m \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right), \\ C_l^n(z_0, z_1, \dots, z_l) &= \{S_{n-1} + X_n \leq z_0, S_{n-1} \leq z_1, S_{n-2} \leq z_2, \dots, S_{n-l} \leq z_l\} \\ &= C_{l-1}^{n-1}(\min(z_0 - X_n, z_1), z_2, \dots, z_l), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(A_k, B_m^n(t_1, x_1, \dots, t_m, x_m), C_l^n(z_0, z_1, \dots, z_l), \tau_1 > n-1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P} \left(A_k, B_m^{n-1} \left(t_1 \frac{n}{n-1}, x_1 \sqrt{\frac{n}{n-1}}, \dots, t_m \frac{n}{n-1}, x_m \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right) \right. \\ &\quad \times C_{l-1}^{n-1}(\min(z_0 - z, z_1), z_2, \dots, z_l), \tau_1 > n-1 \Big) dF(z), \end{aligned}$$

где $F(z) = \mathbf{P}(X_1 \leq z)$, откуда в силу соотношения (5) и лемм 2, 3

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k, B_m^n(t_1, x_1, \dots, t_m, x_m), C_l^n(z_0, z_1, \dots, z_l) \mid \tau_1 > n-1) \\ &= \mathbf{P}(\vec{S}_p^{(1)} \leq y_p, p = 0, 1, \dots, k) \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\vec{S}_0^{(1)} \leq \min(z_0 - z, z_1), \vec{S}_1^{(1)} \leq z_2, \dots, \vec{S}_{l-1}^{(1)} \leq z_l) dF(z). \quad (28) \end{aligned}$$

Из соотношения (5) и лемм 2, 3 также следует, что

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k, B_m^n(t_1, x_1, \dots, t_m, x_m), C_l^n(z_0, z_1, \dots, z_l) \mid \tau_1 > n) \\ &= \mathbf{P}(\vec{S}_p^{(1)} \leq y_p, p = 0, 1, \dots, k) \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \\ &\quad \times \mathbf{P}(\vec{S}_q^{(1)} \leq z_q, q = 0, 1, \dots, l). \quad (29) \end{aligned}$$

Из соотношений (27)–(29), учитывая (3), (4), получаем, что

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k, B_m^n(t_1, x_1, \dots, t_m, x_m), C_l^n(z_0, z_1, \dots, z_l) \mid \tau_1 = n) \\ &= \mathbf{P}(\vec{S}_p^{(1)} \leq y_p, i = 0, 1, \dots, k) \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \\ &\quad \times \frac{c_1^{(1)}}{\gamma c_2^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\vec{S}_0^{(1)} \leq \min(z_0 - z, z_1), \vec{S}_1^{(1)} \leq z_2, \dots, \vec{S}_{l-1}^{(1)} \leq z_l) dF(z) \\ &\quad - \frac{c_1^{(1)}}{c_2^{(1)}} \mathbf{P}(\vec{S}_q^{(1)} \leq z_q, q = 0, 1, \dots, l). \end{aligned}$$

Так как правая часть распадается в произведение трех множителей, первый из которых зависит от $y_0, y_1, \dots, y_k$, второй от $x_1, \dots, x_m$, третий от $z_0, z_1, \dots, z_l$, лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть выполнены условия (А), (В), (С), ($\tilde{D}$). Тогда при любом фиксированном $j \in \mathbb{N}$ случайный процесс

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}$$

асимптотически не зависит при $n \rightarrow \infty$ от совокупности случайных последовательностей

$$\{S_i, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}, \quad \{S_{n-i}, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}.$$

Аналогичное утверждение справедливо, если условия $\{\tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}$ заменить на $\{\tau_j = n\}$.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. При $j = 1$ утверждение леммы составляет содержание лемм 3, 4. Предположим, что утверждение леммы справедливо при некотором $j \in \mathbf{N}$. Для случайных событий A_k, B_m, C_l , определенных при доказательстве леммы 3, запишем представление

$$\mathbf{P}(A_k, B_m, C_l \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \sum_{p=j}^n c_{p,n-p} \mathbf{P}(\tau_j = p) \mathbf{P}(\tau_1 > n - p), \quad (30)$$

где

$$c_{p,q} = \mathbf{P}(A_k, B_m, C_l \mid \tau_j = p, \tau'_1 > q)$$

(штрихованные случайные величины введены при доказательстве леммы 2). Зафиксируем $p \in \mathbf{N}$. Пусть, к примеру, $p < k$. Тогда, учитывая независимость τ_j и τ'_1 , при достаточно большом q запишем, что

$$\begin{aligned} c_{p,q} &= \frac{1}{\mathbf{P}(\tau_j = p)} \mathbf{P}(\tau_j = p; S_0 \leq y_0, S_1 \leq y_1, \dots, S_p \leq y_p, \\ &\quad S_p + S'_1 \leq y_{p+1}, \dots, S_p + S'_{k-p} \leq y_k; \\ &\quad (S_p + S'_{[(p+q)t_i]-p}) / (\Delta \sqrt{p+q}) \leq x_i, i = 1, \dots, m; \\ &\quad S_p + S'_{q-r} \leq z_r, r = 0, 1, \dots, l \mid \tau'_1 > q). \end{aligned}$$

Откуда в силу леммы 3, соотношения (5) и независимости штрихованных случайных величин от нештрихованных получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} c_{p,q} &= \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \\ &\quad \times \mathbf{M}(\mathbf{P}(\vec{S}_1^{(1)} \leq y_{p+1} - y, \dots, \vec{S}_{k-p}^{(1)} \leq y_k - y) \mid y = S_p \\ &\quad \mathbf{P}(\vec{S}_r^{(1)} \leq z_r - y, r = 0, 1, \dots, l) \mid y = S_p \chi_{\{S_0 \leq y_0, S_1 \leq y_1, \dots, S_p \leq y_p\}} \mid \tau_j = p), \quad (31) \end{aligned}$$

где χ_A — индикатор события A . Аналогично рассматривается случай $p \geq k$.

Зафиксируем $q \in \mathbf{N}$. Пусть, например, $q \geq l$. Тогда при достаточно большом p запишем, что

$$\begin{aligned} c_{p,q} &= \frac{1}{\mathbf{P}(\tau'_1 > q)} \mathbf{P}(A_k; S_{[(p+q)t_i]} / (\Delta \sqrt{p+q}) \leq x_i, i = 1, \dots, m; \tau'_1 > q; \\ &\quad S_p + S'_{q-r} \leq z_r, r = 0, 1, \dots, l \mid \tau_j = p). \end{aligned}$$

Следовательно, по предположению индукции и ввиду соотношения (6)

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} c_{p,q} &= \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \\ &\quad \times \mathbf{M}(\mathbf{P}(S_0^{(j)} \leq y_0, \vec{S}_1^{(j)} \leq y_1, \dots, \vec{S}_k^{(j)} \leq y_k, \\ &\quad \leq \vec{S}_0^{(j)} \leq \min_{r \in \{0, 1, \dots, l\}} (z_r - u_r)) \mid u_r = S'_{q-r}, r = 0, 1, \dots, l \mid \tau'_1 > q). \quad (32) \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай $q < l$. Из соотношений (3), (4), (30)–(32) и леммы 1 вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_k, B_m, C_l \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1})$$

распадается в произведение двух функций, одна из которых зависит от $x_1, \dots, x_m$, а вторая от $y_0, y_1, \dots, y_k, z_0, z_1, \dots, z_l$. Таким образом, случайный процесс

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$$

асимптотически не зависит при $n \rightarrow \infty$ от совокупности случайных последовательностей

$$\{S_i, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}, \quad \{S_{n-i}, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}.$$

Аналогично доказывается соответствующее утверждение, если заменить условие $\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$ на $\{\tau_j = n\}$. Лемма 5 доказана.

В [1] доказано следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть случайные векторы $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ независимы и одинаково распределены и случайные величины $\eta_i, i \in \mathbf{N}$, неотрицательны. Пусть при этом выполнены условия (A)–(D), причем $\tau < 1$, и конечны $\mathbf{M} \exp(-X_1), \mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1)$.

Тогда для случайных последовательностей

$$b_0 = 0, \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}, \quad a_n = e^{-S_n}, \quad n \in \mathbf{N},$$

при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_{n-l} - b_k \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = 0$$

и

$$\{a_{[nt]}, b_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\} \Rightarrow \{\rho_j(t), \nu_j(t), t \in (0, 1]\},$$

где $\nu_j(t)$ — случайный процесс с постоянными на $(0, 1)$ траекториями, $\rho_j(t) = 0$ при $t \in (0, 1)$ и $\rho_j(1) > 0$ п.в., знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость конечномерных распределений.

Лемма 7. В условиях леммы 6 при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$ случайный процесс

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}$$

асимптотически не зависит при $n \rightarrow \infty$ от двумерного случайного процесса

$$\{a_{[nt]}, b_{[nt]}, t \in [0, 1] \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1, x_1, y_1, \dots, x_m, y_m, y \in \mathbf{R}$. Достаточно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$, где

$$P(n) = \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, b_{[nt_i]} \leq y_i, i = 1, \dots, m; a_n \leq y \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j),$$

распадается в произведение двух функций, одна из которых зависит от $x_1, \dots, x_m$, а другая от $y_1, \dots, y_m, y$ (будем предполагать, что точка $(y_1, \dots, y_m)$ является точкой

непрерывности функции распределения случайного вектора $\{\nu_j(t_1), \dots, \nu_j(t_m)\}$. При достаточно большом n и фиксированных $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$P_2(n, k) - P_3(n, k) \leq P(n) \leq P_1(n, k),$$

где

$$\begin{aligned} P_1(n, k) &= \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, b_k \leq y_i, i = 1, \dots, m-1; \\ &\quad b_k + b_n - b_{n-k} \leq y_m, a_n \leq y \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j), \\ P_2(n, k) &= \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, b_k \leq y_i - \varepsilon, i = 1, \dots, m-1; \\ &\quad b_k + b_n - b_{n-k} \leq y_m - \varepsilon, a_n \leq y \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j), \\ P_3(n, k) &= \mathbf{P}(\max_{1 \leq i \leq m-1} (b_{[nt_i]} - b_k), b_{n-k} - b_k) > \varepsilon \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ &= \mathbf{P}(b_{n-k} - b_k > \varepsilon \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j). \end{aligned}$$

В силу лемм 2, 5, 6

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(n, k) &= \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \\ &\quad \times \mathbf{P}(\nu_j(t_i) \leq y_i, i = 1, \dots, m; \rho_j(1) \leq y), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_2(n, k) &= \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \\ &\quad \times \mathbf{P}(\nu_j(t_i) \leq y_i - \varepsilon, i = 1, \dots, m; \rho_j(1) \leq y), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_3(n) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \mathbf{P}(\nu_j(t_i) \leq y_i - \varepsilon, i = 1, \dots, m; \rho_j(1) \leq y) \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(n) \\ \leq \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \mathbf{P}(\nu_j(t_i) \leq y_i, i = 1, \dots, m; \rho_j(1) \leq y). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ и учитывая, что $(y_1, \dots, y_m)$ — точка непрерывности функции распределения случайного вектора $\{\nu_j(t_1), \dots, \nu_j(t_m)\}$, получаем требуемое утверждение. Лемма 7 доказана.

3. Доказательство теоремы 1 основано на том, что в силу соотношения (1) случайные процессы

$$\{\ln \xi_{[nt]} / (\Delta \sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0\}, \quad \{\ln m_{[nt]} / (\Delta \sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0\}$$

близки друг к другу в некотором смысле, поэтому, чтобы исследовать первый процесс, предварительно рассмотрим второй. Очевидно, что при $k \in \mathbb{N}$

$$m_k = f'_1(1) \dots f'_k(1) = e^{S_k},$$

поэтому при $t \in [0, 1]$

$$\ln m_{[nt]} / (\Delta \sqrt{n}) = Y_n(t).$$

Пусть

$$T = \inf\{n: \xi_n = 0\}$$

— момент вырождения $\{\xi_n\}$. Для нахождения пределов условных вероятностей при условии $\{T > n\}$ удобно использовать следующее утверждение (см. [1]).

Лемма 8. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\{A_n\}$ — такая последовательность случайных событий, что при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n, T > n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = d_j.$$

Тогда существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n \mid T > n) = \sum_{j=1}^{\infty} c_1^{(j)} d_j \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_1^j \mathbf{M} \frac{1}{\rho_j(1) + \nu_j(1)} \right)^{-1},$$

где постоянные $c_1^{(j)}$ те же, что в соотношении (3).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$, $0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$, $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{R}$. В [16] показано, что если производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}_0$, дробно-линейны, то

$$\mathbf{P}_\pi(T > n) = \frac{1}{a_n + b_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

(символы $\mathbf{P}_\pi$, $\mathbf{M}_\pi$ означают условную вероятность и условное математическое ожидание относительно случайной среды π). Поэтому при $j \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m; T > n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(\tau_{j-1} \leq n < \tau_j)} \mathbf{M} \mathbf{M}_\pi(\chi_{\{Y_n(t_i) \leq x_i, i=1, \dots, m\}} \chi_{\{T > n\}} \chi_{\{\tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}}) \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(\tau_{j-1} \leq n < \tau_j)} \mathbf{M}(\chi_{\{Y_n(t_i) \leq x_i, i=1, \dots, m\}} \chi_{\{\tau_{j-1} \leq n < \tau_j\}} \mathbf{P}_\pi(T > n)) \\ &= \mathbf{M}(\chi_{\{Y_n(t_i) \leq x_i, i=1, \dots, m\}} / (a_n + b_n) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j). \end{aligned}$$

В силу лемм 2, 6, 7 при фиксированном $j \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\chi_{\{Y_n(t_i) \leq x_i, i=1, \dots, m\}} / (a_n + b_n) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ & \quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}((a_n + b_n)^{-1} \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ &= \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m) \mathbf{M} \frac{1}{\rho_j(1) + \nu_j(1)}. \end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 8, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid T > n) = \mathbf{P}(W_0^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m). \quad (33)$$

Осталось показать, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w_{Y_n}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0, \quad (34)$$

но в силу леммы 2 при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w_{Y_n}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(w_{Y_n}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon, T > n \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = 0,$$

а это ввиду леммы 8 означает справедливость соотношения (34). Из соотношений (33), (34) вытекает утверждение теоремы 2.

4. Докажем теорему 1. Положим при $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} X_n(t) &= \xi_{[nt]}/m_{[nt]}, \\ Z_n(t) &= \ln \xi_{[nt]}/(\Delta\sqrt{n}) \end{aligned}$$

(последний процесс определен лишь на множестве $\{T > n\}$). Очевидно, что при $T > n$

$$\ln X_n(t)/(\Delta\sqrt{n}) = Z_n(t) - Y_n(t).$$

Из соотношения (1) следует, что при любом $u \in (0, 1/2)$

$$\{\ln X_n(t), t \in [u, 1 - u] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \ln \mu,$$

поэтому

$$\{Z_n(t) - Y_n(t), t \in [u, 1 - u] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0.$$

Применяя теорему 2, получаем, что при $u \in (0, 1/2)$

$$\{Z_n(t), t \in [u, 1 - u] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [u, 1 - u]\}.$$

Требуется показать, что это соотношение выполняется и при $u = 0$. Поскольку

$$Z_n(0) = 0, \quad Z_n(1) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$$

(это следует из того, что последовательность $\{X_n(1) \mid T > n\}$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к некоторой случайной величине (см. теорему 2 в [1])), для этого достаточно установить, что при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(\sup_{t \in [0, \delta]} Z_n(t) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0, \quad (35)$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(\sup_{t \in [1 - \delta, 1]} |Z_n(t) - Z_n(1)| \geq \varepsilon \mid T > n) = 0. \quad (36)$$

Установим сначала (35). Очевидно, что при $\delta \in (0, 1)$

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0, \delta]} Z_n(t) \geq \varepsilon \mid T > n) \leq Q_1(n, \delta) + Q_2(n, \delta), \quad (37)$$

где

$$Q_1(n, \delta) = \mathbf{P}(\sup_{t \in [0, \delta]} Y_n(t) \geq \varepsilon/2 \mid T > n),$$

$$Q_2(n, \delta) = \mathbf{P}(\sup_{t \in [0, \delta]} \ln X_n(t)/(\Delta\sqrt{n}) \geq \varepsilon/2 \mid T > n).$$

В силу теоремы 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_1(n, \delta) = \mathbf{P}(\sup_{t \in [0, \delta]} W_0^+(t) \geq \varepsilon/2),$$

откуда, учитывая непрерывность траекторий $W_0^+(t)$ и соотношение $W_0^+(0) = 0$, получаем, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_1(n, \delta) = 0. \quad (38)$$

Далее, при фиксированной случайной среде последовательность $\{\xi_n/m_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ является мартингалом, поэтому по неравенству Дуба для произвольных $\delta \in (0, 1)$, $j \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\sup_{t \in [0, \delta]} X_n(t) \geq \exp(\varepsilon\Delta\sqrt{n}/2) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ \leq \mathbf{P}(\sup_{1 \leq k \leq n} (\xi_k/m_k) \geq \exp(\varepsilon\Delta\sqrt{n}/2) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ = \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(\sup_{1 \leq k \leq n} (\xi_k/m_k) \geq \exp(\varepsilon\Delta\sqrt{n}/2)) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) \\ \leq \exp(-\varepsilon\Delta\sqrt{n}/2), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\sup_{t \in [0, \delta]} X_n(t) \geq \exp(\varepsilon\Delta\sqrt{n}/2) \mid \tau_{j-1} \leq n < \tau_j) = 0.$$

Применяя лемму 8, получаем, что при любом $\delta \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_2(n, \delta) = 0. \quad (39)$$

Из соотношений (37)–(39) следует (35).

Теперь установим (36). Поскольку

$$\sup_{t \in [1-\delta, 1]} |Z_n(t) - Z_n(1)| \leq \sup_{t \in [1-\delta, 1]} Z_n(t),$$

достаточно показать, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\sup_{t \in [1-\delta, 1]} Z_n(t) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0.$$

Это соотношение доказывается точно так же, как (35) (при этом надо учесть, что $W_0^+(1) = 0$). Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. Афанасьев В. И. Предельные теоремы для умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика*. (1998) 10, №1, 141–157.
2. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1977.
3. Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R. Weak convergence to brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) 5, №1, 117–129.
4. Афанасьев В. И. Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1993) 5, №1, 45–58.
5. Козлов М. В. Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Докл. РАН* (1995) 344, №1, 12–15.
6. Афанасьев В. И. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1997) 9, №3, 52–67.
7. Афанасьев В. И. О максимуме невозвратного случайного блуждания в случайной среде. *Теория вероятн. и ее применения* (1990) 35, №2, 209–219.
8. Iglehart D. L. Random walks with negative drift conditioned to stay positive. *J. Appl. Probab.* (1974) 11, №4, 742–751.
9. Афанасьев В. И. Условное случайное блуждание с отрицательным сносом. *Теория вероятн. и ее применения* (1979) 24, №1, 191–198.
10. Veraverbeke N., Teugels J. L. The exponential rate of convergence of the distribution of the maximum of a random walk. *J. Appl. Probab.* (1976) 13, №4, 733–740.
11. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. *Сиб. матем. ж.* (1962) 3, №5, 645–694.
12. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т.2, Мир, Москва, 1984.
13. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятн. и ее применения* (1976) 21, №4, 813–825.
14. Bolthausen E. On a functional limit theorem for random walks conditioned to stay positive. *Ann. Probab.* (1976) 4, №3, 480–485.
15. Боровков А. А., Рогозин Б. А. Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий. *Теория вероятн. и ее применения* (1964) 9, №3, 401–430.
16. Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Probab.* (1975) 12, №1, 39–46.

Статья поступила 19.12.1997.