Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Бабин, Конечность множества автоматных базисов
Поста с разрешимой проблемой полноты, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 57–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:38:14

Конечность множества автоматных базисов Поста с разрешимой проблемой полноты

© 1998 г. Д. Н. Бабин

Рассматриваются базисы вида $M = \Phi \cup \nu$, где Φ — некоторый класс Поста, а ν — конечная система автоматных функций. Показано, что множества классов Поста Φ , для которых разрешима проблема полноты $\Phi \cup \nu$, соответственно, A -полноты $\Phi \cup \nu$, являются конечными.

1. Введение

Для базисов автоматных функций без памяти (булевых функций) проблема полноты относительно суперпозиции была решена Постом [1]. При обобщении этой задачи на автоматные функции с памятью при использовании суперпозиции и обратной связи возникли существенные трудности. Принципиальная невозможность решения этой задачи в общем случае была установлена в [2], где была показана континуальность всякой критериальной системы, а в [3] установлена ее алгоритмическая неразрешимость для конечных базисов автоматных функций. Тем не менее, для базисов, содержащих все булевы функции, указанная задача алгоритмически разрешима [4]. Проблема A -полноты для систем автоматных функций также алгоритмически неразрешима в общей постановке [5] и разрешима для систем, содержащих все булевы функции [6]. Естественно исследовать на полноту и A -полноту системы Поста вида $M = \Phi \cup \nu$, где Φ — некоторый класс Поста, а ν — конечная система автоматных функций. Возникает разделение классов Поста на сильные и слабые по их способности гарантировать разрешимость полноты и A -полноты для автоматных функций. В данной работе показано, что множество сильных классов Поста конечно.

2. Основные понятия и результаты

Мы будем использовать обозначения из [7, 8]. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, E_2^∞ — множество всех сверхслов $a(1)a(2)\dots$, где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, \dots$, и E_2^τ — множество всех слов $a(1)\dots a(\tau)$ длины τ . Пусть $f: (E_2^\infty)^n \rightarrow (E_2^\infty)^m$ — автоматная функция

(а.-функция), то есть функция, которая задается рекуррентно соотношениями

$$\begin{aligned} q(1) &= q_1, \\ q(t+1) &= \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \\ b_j(t) &= \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \end{aligned}$$

где $q \in Q = \{q_1, \dots, q_r\}$ и $j = 1, \dots, m$. Параметр q называется состоянием а.-функции f , q_1 — ее начальным состоянием, вектор-буквы $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\dots$ и $b(1)b(2)\dots$ — входным и выходным сверхсловами соответственно.

Класс всех а.-функций обозначим через P . В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции и обратной связи, которые далее будем интерпретировать на схемном языке. Пусть $M \subseteq P$, обозначим через $[M]$ множество всех а.-функций, получающихся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество M называется полным, если $[M] = P$. Проблема полноты для P состоит в описании всех полных множеств M .

Пусть τ — натуральное число, $f(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая автоматная функция, $f^\tau: (E_2^\tau)^n \rightarrow (E_2^\tau)^m$ — ограничение этой функции на множество слов длины τ . Скажем, что а.-функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ τ -равны, если $f^\tau = g^\tau$. Обозначим через $[M]_\tau$ множество всех а.-функций, τ -равных получающимся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи (о.с.). Известно [8], что результат применения о.с. τ -равен τ применениям суперпозиции. Множество M называется τ -полным, если $[M]_\tau = P$. Множество M называется A -полным, если $[M]_\tau = P$ при всех τ . Пусть

$$[M]_A = \bigcap_{\tau} [M]_\tau.$$

Проблема A -полноты для P состоит в описании всех A -полных множеств M . Очевидно, что полное множество M является A -полным. Обозначим через $P^{(1)}$ класс всех а.-функций с одним состоянием. A -функции из $P^{(1)}$ называются истинностными и могут рассматриваться как булевы функции. A -функция $B: E_2^\infty \rightarrow E_2^\infty$ с уравнениями

$$q(1) = 1, \quad q(t+1) = x(t), \quad b(t) = q(t)$$

называется а.-функцией задержки. В P имеются конечные полные системы. Известно, например, что $\{[B, f_{sh}]\} = P$, где f_{sh} — универсальная булева функция Шеффера.

Замкнутые классы булевых функций полностью описаны Постом [1, 7]. Все они конечнопорожденные и образуют счетную решетку по включению. Автор показал в [4], что для верхнего элемента решетки, класса всех булевых функций $\Phi = P^{(1)} = [f_{sh}]$ имеется алгоритм определения полноты системы $M = \Phi \cup \nu$. Пусть π — множество всех классов Поста, Sol и Sol_A — множества таких $\Phi \in \pi$, что для конечных $\nu \subset P$ проблема полноты $\Phi \cup \nu$ и, соответственно, A -полноты $\Phi \cup \nu$ разрешима, а $UnSol$ и $UnSol_A$ суть аналогичные множества с неразрешимой проблемой полноты. Назовем классы из Sol и Sol_A сильными классами Поста, а из $UnSol$ и $UnSol_A$, соответственно, слабыми. Заметим, что всякий надкласс сильного класса является сильным, а подкласс слабого слабым, двойственный к сильному, относительно замены 0 на 1, будет сильным, а к слабому слабым классом Поста. Пусть

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_4,$$

$F = [\{h, \bar{x} \vee y\}]$ и F' — класс, двойственный к F . Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Проблемы полноты и A -полноты для каждого из классов базисов Поста вида $F \cup \nu$ или $F' \cup \nu$ алгоритмически неразрешимы.*

Известно [1, 7], что число классов $\Phi \in \pi$, содержащихся в F' или в F бесконечно, а не содержащихся ни в F' , ни в F конечно, поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. *Множества Sol и Sol_A конечны, множества UnSol и UnSol_A бесконечны.*

3. Основные леммы

Тройка $\Theta = \langle D, \rho, w \rangle$, где $D = \{d_1, \dots, d_k\}$, D^* — множество слов в алфавите D , $\rho: D \rightarrow D^*$, $\rho(d_i) = R_i$, w — натуральное число, называется системой однородных продукций Поста. Если $l \geq w$, то скажем, что Θ применима к слову $\xi = d_{i_1} d_{i_2} \dots d_{i_l}$ и слово $\Theta(\xi) = d_{i_{w+1}} d_{i_{w+2}} \dots d_{i_l} R_{i_1}$ назовем результатом применения Θ к слову ξ . Последовательность $\xi_1, \xi_2 \dots$ такую, что $\xi_1 = \xi$, а $\xi_{i+1} = \Theta(\xi_i)$, назовем последовательностью продукций слова ξ . Известно [10], что существует система однородных продукций Поста, для которой не существует алгоритма, по слову ξ решающего вопрос о конечности последовательности продукций слова ξ . Зафиксируем систему продукций Поста $\langle D, \rho, w \rangle$ с неразрешимой проблемой конечности последовательности продукций.

Обозначим через R множество сверхслов α таких, что $\alpha(t) = 1$ при $t > t_\alpha$. Пусть **1**, **01**, **0011** суть периодические сверхслова $11\dots, 010101\dots, 00110011\dots$; $\alpha]_t$ — слово $a(1) \dots a(t)$, где $\alpha = a(1)a(2) \dots$; $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbf{N}_0$ — множество $\mathbf{N} \cup \{0\}$; $|\alpha|$ — длина слова α ; если $d_i \in D$, то $\tilde{d}_i$ — слово из $E_2^{(4k+4)}$ вида $\tilde{d}_i = (0110)^i(0101)(0110)^{k-i}$; если $\xi = d_{i_1} d_{i_2} \dots d_{i_l}$, то $\tilde{\xi} = \tilde{d}_{i_1} \tilde{d}_{i_2} \dots \tilde{d}_{i_l}$. Пусть

$$M_i = \{(0101)^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} \mathbf{0011} \mid n, l \in \mathbf{N}_0, 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq k\},$$

$$\hat{M}_i = \{(0101)^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \tilde{d}_{j_2} \dots \mid n \in \mathbf{N}_0, 1 \leq j_1, j_2 \dots \leq k\}.$$

Для $\alpha, \beta \in E_2^\infty$, $\alpha \neq \beta$, положим

$$c(\alpha, \beta) = \max\{t \mid \alpha]_t = \beta]_t\},$$

и для $\alpha \notin M_i \cup \hat{M}_i$

$$c_i(\alpha) = \max\{c(\alpha, \beta) \mid \beta \in M_i \cup \hat{M}_i\}.$$

Определим а.-функции $f_i: E_2^\infty \rightarrow E_2^\infty$, $f'_i: E_2^\infty \rightarrow E_2^\infty$, $i = 1, 2, \dots, k$, полагая

$$f_i((0101)^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} \mathbf{0011}) = \begin{cases} (0101)^{n+w(k+1)} \tilde{d}_{j_w} \dots \tilde{d}_{j_l} \tilde{R}_i \mathbf{0011}, & l > w - 1, \\ (0101)^{n+w(k+1)} \tilde{R}_i \mathbf{0011}, & l = w - 1, \\ \mathbf{01}, & l < w - 1, \end{cases}$$

$$f'_i((0101)^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} \mathbf{0011}) = \begin{cases} (0101)^{n+w(k+1)} \tilde{d}_{j_w} \dots \tilde{d}_{j_l} \tilde{R}_i \mathbf{0011}, & l > w - 1, \\ (0101)^{n+(l+1)(k+1)} \mathbf{01}, & l \leq w - 1, \end{cases}$$

$$f_i(\beta) = \gamma \mathbf{1}, \quad f'_i(\beta) = \gamma' \mathbf{1}, \quad \beta \notin M_i \cup \hat{M}_i, \quad |\gamma'| = |\gamma| = c_i(\beta).$$

Для $\alpha, \gamma \in E_2^\infty$ определим а.-функции G, E, f_ξ , полагая

$$\begin{aligned} G(\alpha, \gamma) &= \begin{cases} B(\alpha), & \gamma = \mathbf{01}, \\ \delta \mathbf{1}, & \gamma \neq \mathbf{01}, \end{cases} \\ E(\gamma) &= \begin{cases} 00 \dots, & \gamma = \mathbf{01}, \\ \beta \mathbf{1}, & \gamma \neq \mathbf{01}, \end{cases} \\ f_\xi(\alpha) &= \tilde{\xi} \mathbf{01}, \quad \alpha \in E_2^\infty, \end{aligned}$$

где $|\delta| = |\beta| = c(\gamma, \mathbf{01})$.

Через $\bar{X} \vee Y, H, \mathbf{0}, X \vee Y, XY$ обозначим а.-функции, являющиеся автоматными интерпретациями булевых функций $\bar{x} \vee y, h, 0, x \vee y, xy$, соответственно. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Система $\Sigma = \{\bar{X} \vee Y, H, E, f_1, \dots, f_k, f_\xi, G\}$ полна тогда и только тогда, когда последовательность произведений слова ξ конечна.

Лемма 2. Система $\Sigma' = \{\bar{X} \vee Y, H, E, f_1', \dots, f_k', f_\xi, G\}$ А-полна тогда и только тогда, когда последовательность произведений слова ξ бесконечна.

4. Доказательства лемм

Через $\hat{H}$ обозначим покомпонентное доопределение функции h на $(E_2^4)^4$. Для α_1, α_2 из E_2^∞ будем писать $\alpha_1 \geq \alpha_2$, если $\alpha_1(t) \geq \alpha_2(t)$ при всех t . Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ — некоторые последовательные произведения слова $\xi = \xi_1$ и

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \tilde{\xi}_1 \mathbf{0011}, \\ \eta_i &= (0101)^{w(i-1)(k+1)} \tilde{\xi}_i \mathbf{0011}, \quad i = 2, 3, \dots, s. \end{aligned}$$

Пусть $b_i = 1 + 4w(k+1)(i-1)$ и $t_i = b_i + |\xi_i| - 1$ — позиции, соответственно, начала и конца (включительно) подслова $\tilde{\xi}_i$ в сверхслове η_i . Если $b_{i+1} < t_i$, то $\eta_i(t) = \eta_{i+1}(t)$ при $b_{i+1} \leq t \leq t_i$. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Если $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_2^\infty$ и при $i \leq p \leq r$

$$\alpha_1 \geq \eta_i, \quad \alpha_2 \geq \eta_p, \quad \alpha_3 \geq \eta_r,$$

то $H(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq \eta_p$.

Доказательство. Ввиду монотонности функции h

$$\gamma = H(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq \eta_i \eta_p \vee \eta_i \eta_r \vee \eta_p \eta_r.$$

Пусть $b_i \leq b_p < t_i < b_r < t_p \leq t_r$. Для $t \in (t_i, b_r - 3)$

$$(\gamma(t), \gamma(t+1), \gamma(t+2), \gamma(t+3)) = \hat{H}(\cdot, 0011, \Delta, 0101) \geq \Delta,$$

где $\Delta = (\eta_p(t), \eta_p(t+1), \eta_p(t+2), \eta_p(t+3))$ и $\Delta \in \{0110, 0101\}$. Для $t \notin (t_i, b_r - 3)$ либо $\eta_p(t) = \eta_r(t)$, либо $\eta_p(t) = \eta_i(t)$, следовательно, $\gamma(t) \geq \eta_p(t)$. В остальных случаях взаимного расположения чисел $b_i, b_p, b_r, t_i, t_p, t_r$ возникают аналогичные ситуации. Предложение доказано.

Доказательство леммы 1. Начнем с доказательства необходимости. Пусть система продукций $\xi_1, \xi_2, \dots$ бесконечна и система Σ при этом полна. Тогда найдется схема S над Σ , реализующая константную а.-функцию C_{01} с выходным словом 01 . Можно считать, что схема S получилась из Σ применением сначала всех операций суперпозиции, а потом всех операций о.с. Обозначим через S_t схему, получающуюся из S заменой ее а.-функций булевыми функциями их состояний в момент $4t + 1$. Заметим, что а.-функции $E, f_1, \dots, f_k$ будут заменены на функцию X или на 1 ; f_ξ будет заменена на 0 ; G на 1 или Y . Каждая из схем S_t реализует константу 0 . Пусть g — элемент схемы S_t , выход которого совпадает с выходом схемы. Разорвем обратную связь от g (если она имеется) в схеме S_t и подставим на образовавшийся вход константу 1 , в результате новая схема S'_t также будет давать константу 0 . Возможны следующие варианты:

- (а) g — выходная функция состояния одного из элементов $E, f_1, \dots, f_k$, то есть $g \equiv x$, а $S'_t = g(S')$, и, следовательно, S' реализует константу 0 .
- (б) g — это функция $\bar{X}_1 \vee X_2$, тогда $\bar{x}_1 \vee x_2 \equiv 0$, значит, $x_2 \equiv 0$; для $g = G$ также $x_2 \equiv 0$ (случай, когда элемент $g = G$ имеет в момент $4t + 1$ состояние с выходной функцией 1 невозможен). Получаем схему S' с двумя выходами, имеющую на правом выходе 0 , такую что $S'_t = g(S')$.
- (с) Для $g = h$ имеем $h(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$, что с точностью до перестановки x_1, x_2, x_3, x_4 дает $x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv 0$. Получается схема S' с тремя нулевыми выходами такая, что $S'_t = g(S')$. Заметим, что в исходной схеме S на каждом из этих выходов не может быть константы 1 .

Пометим элемент g , пометим его нулевой вход (входы) и рассмотрим те элементы схемы S' , выходы которых совпадают с выходами самой схемы S' . Прделаем с ним подходящее действие (а), (б) или (с). Эти элементы не могли быть ранее помечены, так как обратные связи от ранее помеченных элементов разорваны. Продолжая этот процесс, пометим в схеме S_t дерево, вершины которого суть помеченные элементы, а ребра помеченные входы элементов схемы S_t . Листьями дерева будут являться элементы 0 .

Перенеся метки в схему S , получим в ней дерево T_t . Листья дерева T_t суть элементы вида f_ξ ; в вершины вида $E, f_1, \dots, f_k$ входит одно ребро, в вершины вида $\bar{X}_1 \vee X_2, G$ входит также одно ребро, соответствующее их правому входу, в вершины вида H входят три ребра. При этом в схеме S на каждом из выходов вершин дерева T_t не может быть константы 1 . Из каждой вершины дерева T_t выходит одно ребро. Последовательность деревьев $T_1, T_2, \dots$ периодическая (T_t зависит от состояния $q(t)$ схемы S , не имеющей входа). Пусть $T_r, \dots, T_{r+K}$ встречаются в последовательности $T_1, T_2, \dots$ бесконечно часто. Рассмотрим дерево T , множества вершин и, соответственно, ребер которого суть объединения вершин и ребер деревьев $T_r, \dots, T_{r+K}$. (В дереве T возможна вершина, элемент H , в которую входит четыре ребра). Пусть

$$L_1 = \bigcup_i \{\alpha \mid \alpha \geq \eta_i\}, \quad L = L_1 \cup R.$$

При всех $i = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} f_i: L_1 \rightarrow L_1, \quad f_i: R \rightarrow R, \quad E: L \rightarrow R, \quad G: E_2^\infty \times L \rightarrow R, \\ \bar{X}_1 \vee X_2: E_2^\infty \times L_1 \rightarrow L_1, \quad \bar{X}_1 \vee X_2: E_2^\infty \times R \rightarrow R. \end{aligned}$$

В предложении 1 было показано, что $H: E_2^\infty \times L_1 \times L_1 \times L_1 \rightarrow L_1$. Очевидно, что $H: E_2^\infty \times E_2^\infty \times R \times R \rightarrow R$. Покажем, что в схеме S не может быть случая, когда на элемент H , имеющий в дереве T три входящих ребра, поступят последовательности $\alpha_1 \in R$ и $\alpha_2, \alpha_3 \in L_1$. В самом деле, пусть $\alpha_1 = \alpha \mathbf{1}$, $|\alpha| = t_0$, тогда существует $t > t_0$ такое, что в схеме S_t' при построении дерева T_t' возникнет этот элемент H , имеющий три нуля на рассматриваемых входах, что противоречит тому, что при $t > t_0$ будет $\alpha_1(t) = 1$. Значит, этот элемент H имеет четыре ребра в дереве T . Таким образом, на выходе схемы S должно получиться сверхслово из L , получаем противоречие.

Докажем теперь достаточность. Если последовательность продукций слова ξ конечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, а d_{i_p} — первая буква в ξ_p и $|\xi_s| < w$, то

$$f_{i_s}(f_{i_{s-1}} \dots f_{i_1}(f_\xi) \dots) = C_{01}, \quad E(\mathbf{01}) = \mathbf{0}, \quad G(x, \mathbf{01}) = B(x).$$

Следовательно, Σ — полная система. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Начнем с доказательства необходимости. Предположим противное. Пусть система Σ' полна, а последовательность продукций ξ конечна и равна $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. Пусть

$$\begin{aligned} \tau &= 4w(k+1)s + 5, & \eta_1 &= \tilde{\xi}_1 \mathbf{0011}, \\ \eta_i &= (0101)^{w(i-1)(k+1)} \tilde{\xi}_i \mathbf{0011}, & \eta_{s+1} &= (0101)^{ws(k+1)} \mathbf{01}, \end{aligned}$$

$\eta_{i+1} = f_{j_i}(\eta_i)$ при подходящем j_i , $i = 1, \dots, s$,

$$L_1 = \bigcup_i^s \{\alpha \mid \alpha \geq \eta_i\}, \quad L_2 = \{\alpha' \mathbf{1} \mid |\alpha'| = \tau - 1\}.$$

Пусть схема S над Σ' реализует константу $0101 \dots 010$ длины τ . Без ограничения общности в схеме S нет обратных связей и все операции отождествления входов выполнены в последнюю очередь. Очевидно, что f_ξ присутствует в схеме S , так как булевы функции начальных состояний остальных элементов Σ' сохраняют единицы. Подставим f_ξ на фиктивные входы схемы S и получим схему $S'(f_\xi)$, где схема S' элементов f_ξ не содержит. На выходе f_ξ получилась константа $\tilde{\xi}_1 \mathbf{0011}]_\tau$ из L_1 . Покажем, что все a -функции g из $\Sigma' \setminus \{f_\xi\}$ сохраняют $L_1 \cup L_2$. В самом деле, при всех $i = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} f'_i: L_1 &\rightarrow L_1 \cup L_2, & f'_i: L_2 &\rightarrow L_2, & E: L_1 \cup L_2 &\rightarrow L_2, \\ G: E_2^\infty \times (L_1 \cup L_2) &\rightarrow L_2, & \bar{X}_1 \vee X_2: E_2^\infty \times (L_1 \cup L_2) &\rightarrow (L_1 \cup L_2). \end{aligned}$$

Покажем, что $H: (L_1 \cup L_2)^4 \rightarrow (L_1 \cup L_2)$. В самом деле, если три из четырех входных слов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ из L_1 , то по предложению 1 $H(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in L_1$, в альтернативном случае два из них принадлежат L_2 , что приводит к тому, что $H(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in L_2$. Таким образом, на выходе схемы S получится слово из $L_1 \cup L_2$, получаем противоречие.

Докажем теперь достаточность. Если последовательность продукций слова ξ бесконечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \dots$, а d_{i_p} — первая буква ξ_p , то на словах длины τ

$$f_{i_\tau}(f_{i_{\tau-1}} \dots f_{i_1}(f_\xi) \dots) = C_{01}, \quad E(\mathbf{01}) = \mathbf{0}, \quad G(x, \mathbf{01}) = B(x).$$

Следовательно, Σ' есть A -полная система. Лемма 2 доказана.

Автор выражает благодарность В. Б. Кудрявцеву за постановку задачи и ценные указания.

Список литературы

1. Post E. *Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
2. Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. *Докл. АН СССР* (1963) **151**, №3, 493–496.
3. Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. *Докл. АН СССР* (1964) **155**, №1, 35–37.
4. Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций. *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 41–55.
5. Буюевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A -полноты. *Матем. заметки* (1972) **12**, №6, 687–697.
6. Буюевич В. А. *Условия A -полноты для конечных автоматов*. Изд. МГУ, Москва, 1986.
7. Кудрявцев В. Б., Гаврилов Г. П., Яблонский С. В. *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
8. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
9. Мальцев А. И. *Итеративные алгебры Поста*. ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1976.
10. Мальцев А. И. *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1986.

Статья поступила 18.05.1998.