Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Дольников, О. П. Полякова, Функция неплотности и обобщенные числа Рамсея, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 84–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:17:05

УДК 519.1

Функция неплотности и обобщенные числа Рамсея

© 1998 г. В. А. Дольников, О. П. Полякова

Обыкновенный граф G обладает (p, q) -свойством, если каждый его подграф на p вершинах содержит пустой подграф на q вершинах. Функция неплотности $p(q, G)$ равна наименьшему из чисел p таких, что граф G обладает (p, q) -свойством, $q \geq 2$.

В работе изучается функция неплотности графов, а также находятся и оцениваются обобщенные числа Рамсея различных классов графов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-01054.

1. Введение

Приведем сначала несколько стандартных определений и обозначений (по поводу определений теории графов см. [1, 2]).

Все графы $G = (V, E)$, рассматриваемые в статье, обыкновенные, то есть неориентированные графы без петель и кратных ребер, а подграфы G_0 на подмножестве вершин $V_0 \subseteq V$ — это порожденные подграфы.

Для графа G введем следующие обозначения. Пусть $n(G)$ — число вершин графа, а $m(G)$ — число ребер; $\varphi(G)$ — плотность, или число вершин наибольшего полного подграфа (клики); $\varepsilon(G)$ — неплотность, или число вершин наибольшего пустого (независимого) подграфа; $\alpha_1(G)$ — число паросочетания, или максимальное число попарно несмежных ребер графа; $\Delta(G)$ — наибольшая из степеней вершин графа; $\chi(G)$ — хроматическое число графа.

В [3] Хадвигером и Дебруннером введено следующее определение (по поводу его важности для комбинаторной геометрии см., например, [4, 5]).

Определение 1. Будем говорить, что семейство множеств, состоящее из p или большего числа множеств, обладает (p, q) -свойством, где $p \geq q$, если в каждом его подсемействе из p множеств содержится q множеств с непустым пересечением.

В [6] при изучении графов, определяемых пересечениями семейств параллелотопов в $\mathbf{R}^n$ с параллельными ребрами, и под влиянием определения Хадвигера–Дебруннера были введены следующие определения (см. также [7], где эти определения приводятся для гиперграфов).

Определение 2. Граф G обладает (p, q) -свойством, $G \in L_{p,q}$, если каждый его подграф на p вершинах содержит пустой подграф на q вершинах (конечно, $p \geq q$ и $n(G) \geq p$).

Определение 3. Граф G обладает $\overline{(p, q)}$ -свойством, $G \in L_{\overline{p},q}$, если дополнительный граф $\overline{G} \in L_{p,q}$, то есть каждый его подграф на p вершинах содержит полный подграф на q вершинах.

Очевидно, что если $G \in L_{p,q}$, то $G \in L_{p',q}$, где $p' \geq p$. Легко видеть, что если $G \in L_{p,2}$, то $\varphi(G) \leq p - 1$, и если $G \in L_{\overline{p},2}$, то $\varepsilon(G) \leq p - 1$. Также заметим, что если граф $G \in L_{p,q}$, то и любой его подграф $G_0 \in L_{p,q}$, если, конечно, $n(G_0) \geq p$.

Определение 4. Пусть $p(q, G)$ — наименьшее из чисел p таких, что граф $G \in L_{p,q}$, $q \geq 2$. Функцию $p(q, G)$ назовем функцией неплотности графа G . Аналогично, функция плотности $\bar{p}(q, G)$ — минимальное из чисел p таких, что граф $G \in L_{\overline{p},q}$.

Для конечного графа G функция $p(q, G)$ определена при всех $q \leq \varepsilon(G)$ и не определена при $q > \varepsilon(G)$, в этом случае положим $p(q, G) = n(G) + q - \varepsilon(G)$, то есть вместо графа G берем граф $G \cup G'$, где G' — бесконечный пустой подграф. Для бесконечного графа G , как показано в [6], функция $p(q, G)$ либо определена при всех $q \geq 2$, либо неопределена при всех $q \geq 2$. Положим также $p(0, G) = 0$, $p(1, G) = 1$.

Легко видеть, что функция неплотности монотонно возрастает, так как, если $G \in L_{p,q}$, то $G \in L_{p-1,q-1}$ и поэтому $p(q-1, G) \leq p(q, G) - 1$. Очевидно также, что

$$p(2, G) = \varphi(G) + 1, \quad \bar{p}(2, G) = \varepsilon(G) + 1,$$

$p(q, G) = q$ для пустого графа и $\bar{p}(q, G) = q$ для полного графа.

Понятие функции неплотности тесно связано с теоремой Рамсея (см. [1, 2]). Легко видеть (см. [6]), что теорему Рамсея можно в этих терминах переформулировать следующим образом.

Предложение 1. Для любых натуральных $q, s \geq 2$

$$\sup_{G \in L_{s,2}} p(q, G) = N(q, s, 2) < \infty,$$

где $N(q, s, 2)$ — числа Рамсея.

Таким образом, вполне естественным становится следующее определение [8].

Определение 5. Пусть L — произвольный класс графов. Определим обобщенные числа Рамсея $N(q, s, 2; L)$ класса графов L равенством

$$N(q, s, 2; L) = \sup_{G \in L_{s,2} \cap L} p(q, G).$$

Таким образом, функцию неплотности $p(q, G)$ можно считать обобщенным числом Рамсея класса L , состоящего из одного графа G .

Замечание 1. Очевидно, что $N(q, s, 2; L) = N(s, q, 2; \bar{L})$, где $\bar{L}$ состоит из всех графов, дополнительных к графам из L , и $N(q, 2, 2; L) = q$.

Замечание 2. Легко видеть, что для некоторых классов графов (например, для плоских графов) конечна величина

$$N(q) = \sup_s N(q, s, 2; L).$$

Замечание 3. Все приведенные выше определения и предложение естественно переносятся на однородные r -графы [7] (гиперграфы, у которых каждое ребро состоит из r вершин), но мы в статье ограничимся изучением графов.

Замечание 4. В литературе есть только отдельные результаты в такой постановке, например, известная гипотеза Эрдёша и Секереша, что из $2^{n-2} + 1$ точек в общем положении на плоскости можно найти n , которые являются вершинами выпуклого n -угольника, или евклидова рамсеевская теория (см. [9]).

В статье изучается функция неплотности графов, а также находятся и оцениваются обобщенные числа Рамсея различных классов графов. Работа носит в основном постановочный характер и имеет целью обратить внимание на целый ряд мало изученных задач теории графов, несмотря на то, что определение (p, q) -свойства приведено уже во многих книгах (см., например, [10, 11, 12]), правда, без ссылок на [6, 7].

2. Характеризация графов с помощью функции неплотности

Приведем несколько несложных теорем, показывающих, как с помощью функции неплотности можно охарактеризовать некоторые графы. Докажем сначала простую, но важную лемму.

Лемма 1. Если $\chi(G) \leq k$, то $p(q, G) \leq k(q - 1) + 1$.

Доказательство. Пусть $\chi(G) \leq k$ для графа $G = (V, E)$ и $V_0 \subseteq V$ таково, что $|V_0| = k(q - 1) + 1$. Так как $\chi(G) \leq k$, подмножество V_0 можно представить в виде

$$V_0 = V_1 \cup \dots \cup V_k.$$

объединения k частей так, что каждая из частей порождает пустой подграф. Тогда, в силу принципа Дирихле, существует такое i , что $|V_i| \geq q$, и лемма доказана.

Замечание 5. При $k > 2$ существуют такие графы G , что $p(q, G) \leq k(q - 1) + 1$, но $\chi(G) = \infty$ (см. [13]).

Теорема 1. Если для графа G

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} p(q, G)/q < k,$$

то множество его вершин V можно разбить на две такие части V_1 и V_2 , что $|V_1| < \infty$ и $\varphi(G_2) \leq k - 1$ для подграфа G_2 на множестве V_2 .

Доказательство. Пусть $\alpha_k(G)$ — максимальное число попарно не пересекающихся полных подграфов G на k вершинах. Покажем, что $\alpha_k(G) < \infty$. Предположим противное и для любого q возьмем $q-1$ попарно не пересекающихся полных подграфов на k вершинах. Тогда очевидно, что для подграфа G_0 на объединении вершин этих полных подграфов $\varepsilon(G_0) \leq q-1$, а значит $p(q, G) \geq k(q-1) + 1$. Следовательно,

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} p(q, G)/q \geq k.$$

Получили противоречие. Поэтому $\alpha_k(G) < \infty$.

Рассмотрим объединение V_1 вершин $\alpha_k(G)$ попарно не пересекающихся полных подграфов на k вершинах. Любой другой полный подграф на k вершинах имеет со множеством V_1 общую вершину и, следовательно, подграф G_2 на множестве вершин $V_2 = V \setminus V_1$ не содержит полного подграфа на k вершинах. Теорема доказана.

Из теоремы 1 получаем следующую характеристику некоторого класса графов.

Следствие 1. *Множество вершин V графа G можно разбить на две такие части V_1 и V_2 , что V_1 — конечное множество, а V_2 — независимое множество тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} p(q, G)/q < 2.$$

Доказательство. Очевидно, что если граф G представляется в виде объединения конечного и пустого подграфов, то $p(q, G) \leq q+k$ для некоторого k , а достаточность непосредственно следует из теоремы 1.

Теорема 2. *Граф G двудольный тогда и только тогда, когда $p(q, G) \leq 2q-1$.*

Доказательство. Докажем достаточность, так как необходимость следует из леммы 1. Пусть $p(q, G) \leq 2q-1$ для графа G . Покажем, что граф G не содержит циклов нечетной длины. Предположим противное, пусть в графе G есть цикл нечетной длины G' на $2m+1$ вершине, тогда $\varepsilon(G') \leq m$ и, следовательно, $p(m+1, G) \geq 2m+1+1 = 2(m+1)$, что противоречит условию. Так как G не содержит циклов нечетной длины, по теореме Кенига [1] он двудольный.

Теорема 3. *Вершины V графа G можно разбить на две такие части V_1 и V_2 , что V_1 — конечное множество, а подграф G_2 на множестве V_2 двудольный, тогда и только тогда, когда $p(q, G) \leq 2q+k$ для всех q и некоторого k .*

Доказательство. Пусть $p(q, G) \leq 2q+k$. Покажем, что в любом семействе попарно не пересекающихся циклов нечетной длины графа G не более k элементов. Предположим противное. Если $\{C_i\}$, $|C_i| = 2l_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, k+1$, — семейство попарно не пересекающихся циклов нечетной длины, то ясно, что для подграфа G_0 на объединении вершин этих циклов

$$\varepsilon(G_0) \leq q = \sum_{i=1}^{k+1} l_i$$

или $p(q, G) \geq 2q+k+1$. Получаем противоречие.

Пусть V_1 — объединение вершин максимального семейства попарно не пересекающихся циклов нечетной длины. Любой цикл нечетной длины имеет с множеством

V_1 общую вершину. Поэтому подграф G_2 на множестве $V_2 = V \setminus V_1$ не содержит циклов нечетной длины и, по теореме Кенига, подграф G_2 является двудольным.

Обратно, если $|V_1| = k + 1$, то, так как подграф G_2 на множестве V_2 двудольен, по лемме 1, $p(q, G_2) \leq 2q - 1$. Следовательно, $p(q, G) \leq 2q + k$ и теорема доказана.

Можно привести еще много примеров аналогичных результатов. Ограничимся следующей теоремой, характеризующей графы по поведению функции неплотности в точке.

Теорема 4. Если $p(q+1, G) = p(q, G) + k$, то множество вершин V графа G можно разбить на две такие части V_1 и V_2 , что $|V_1| < \infty$ и $\varphi(G_2) \leq k$ для подграфа G_2 на множестве V_2 .

Доказательство. Если $G_1 = (V_1, E_1)$ — такой максимальный подграф графа G , что $\varepsilon(G_1) < q$, то $|V_1| = p(q, G) - 1$. Добавим к G_1 любые $k + 1$ вершины из $V \setminus V_1$. В полученном подграфе G_0

$$n(G_0) = p(q, G) + k = p(q + 1, G)$$

и поэтому $\varepsilon(G_0) \geq q + 1$. Следовательно, среди любых $k + 1$ вершин из $V \setminus V_1 = V_2$ есть две независимых, то есть $\varphi(G_2) \leq k$ для подграфа на V_2 , и теорема доказана.

3. Поведение функции неплотности при операциях над графами

В данном параграфе мы показываем, как будет выглядеть функция неплотности для графов, получающихся в результате простейших операций над графами, объединения и соединения. Весьма интересно было бы изучить поведение функции неплотности при других операциях, например, при взятии декартова произведения.

Объединением графов $G_1, \dots, G_n$ назовем граф

$$G = \bigcup_{i=1}^n G_i,$$

множеством вершин которого является

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_i,$$

а множеством ребер

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i.$$

Соединением графов $G_1, \dots, G_n$ назовем граф

$$G = \sum_{i=1}^n G_i,$$

который состоит из $\bigcup_{i=1}^n G_i$ и всех ребер, соединяющих $V_1, V_2, \dots, V_n$.

Теорема 5. *Справедливы равенства*

$$p\left(q, \sum_{i=1}^n G_i\right) = \sum_{i=1}^n p(q, G_i) - n + 1,$$

$$p\left(q, \bigcup_{i=1}^n G_i\right) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n p(q_i, G_i) - n + 1 \right\},$$

где максимум берется по всем $q_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n q_i \leq q + n - 1.$$

Доказательство. Доказательство первого равенства проведем индукцией по n . Пусть $n = 2$. Очевидно, что

$$p(q, G) \leq p(q, G_1) + p(q, G_2) - 1.$$

Докажем обратное неравенство

$$p(q, G) \geq p(q, G_1) + p(q, G_2) - 1.$$

По определению функции неплотности в графе G_1 найдется такой подграф G'_1 с $p(q, G_1) - 1$ вершинами, что $\varepsilon(G'_1) < q$, точно также в графе G_2 найдется такой подграф G'_2 с $p(q, G_2) - 1$ вершинами, что $\varepsilon(G'_2) < q$. Тогда для подграфа $G_1 + G_2$ справедливо неравенство $\varepsilon(G_1 + G_2) < q$. Следовательно,

$$p(q, G) \geq p(q, G_1) + p(q, G_2) - 1$$

и равенство доказано.

Предположим, что теорема доказана при $n = k - 1$. Тогда по доказанному выше и предположению индукции

$$\begin{aligned} p\left(q, \sum_{i=1}^k G_i\right) &= p\left(q, \sum_{i=1}^{k-1} G_i + G_k\right) = p\left(q, \sum_{i=1}^{k-1} G_i\right) + p(q, G_k) - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} p(q, G_i) - (k - 2) + p(q, G_k) - 1 \\ &= \sum_{i=1}^k p(q, G_i) - k + 1. \end{aligned}$$

Для доказательства второго равенства докажем сначала неравенство

$$p\left(q, \bigcup_{i=1}^n G_i\right) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^n p(q_i, G_i) - n + 1 \right\} = M, \quad (1)$$

где максимум берется по всем $q_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n q_i \leq q + n - 1.$$

Пусть $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ — те значения, на которых достигается максимум в правой части неравенства (1). Возьмем такой подграф G_0 в $\bigcup_{i=1}^n G_i$, что $n(G_0) = M$, и покажем, что $\varepsilon(G_0) \geq q$. Пусть G'_i — подграф на $W_i = V_0 \cap V_i$ и $|W_i| = k_i$, $1 \leq i \leq n$.

Так как функция неплотности возрастает, то найдутся такие значения q_0^i , что

$$p(q_0^i, G_i) \leq k_i \leq p(q_0^i + 1, G_i) - 1, \quad 1 \leq i \leq n - 1, \quad (2)$$

то есть $\varepsilon(G'_i) \geq q_0^i$, $1 \leq i \leq n - 1$. Далее,

$$\sum_{i=1}^{n-1} p(q_0^i + 1, G_i) + p\left(q - \sum_{i=1}^{n-1} q_0^i, G_n\right) - n + 1 \leq \sum_{i=1}^n p(q'_i, G_i) - n + 1 = M,$$

так как q'_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — значения, на которых достигается максимум в правой части (1) и

$$\sum_{i=1}^{n-1} (q_0^i + 1) + q - \sum_{i=1}^{n-1} q_0^i = q + n - 1.$$

Следовательно, согласно неравенству (2)

$$p\left(q - \sum_{i=1}^{n-1} q_0^i, G_n\right) \leq M - \sum_{i=1}^{n-1} p(q_0^i + 1, G_i) + n - 1 \leq M - \sum_{i=1}^{n-1} (k_i + 1) + n - 1 = k_n,$$

то есть

$$\varepsilon(G'_n) \geq q - \sum_{i=1}^{n-1} q_0^i.$$

Значит, по определению объединения графов,

$$\varepsilon(G_0) \geq \sum_{i=1}^{n-1} q_0^i + q - \sum_{i=1}^{n-1} q_0^i = q.$$

Неравенство полностью доказано.

Докажем обратное неравенство

$$p\left(q, \bigcup_{i=1}^n G_i\right) \geq \max \left\{ \sum_{i=1}^n p(q_i, G_i) - n + 1 \right\} = M,$$

где максимум берется по всем $q_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n q_i \leq q + n - 1.$$

По определению функции неплотности в любом графе G_i найдется такой подграф G'_i , что $n(G'_i) = p(q'_i, G_i) - 1$ и $\varepsilon(G'_i) < q'_i$. Тогда

$$n\left(\bigcup_{i=1}^n G'_i\right) = \sum_{i=1}^n p(q'_i, G_i) - n$$

и по принципу Дирихле

$$\varepsilon \left(\bigcup_{i=1}^n G'_i \right) < \sum_{i=1}^n q'_i - n + 1.$$

Следовательно,

$$p \left(q, \bigcup_{i=1}^n G_i \right) \geq \sum_{i=1}^n (p(q'_i, G_i) - 1) + 1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^n p(q_i, G_i) - n + 1 \right\} = M,$$

где максимум берется по всем $q_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n q_i \leq q + n - 1,$$

и теорема доказана.

Следствие 2. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \bar{p} \left(q, \bigcup_{i=1}^n G_i \right) &= \sum_{i=1}^n \bar{p}(q, G_i) - n + 1, \\ \bar{p} \left(q, \sum_{i=1}^n G_i \right) &= \max \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{p}(q_i, G_i) - n + 1 \right\}, \end{aligned}$$

где максимум берется по всем $q_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n q_i \leq q + n - 1.$$

4. Оценки чисел Рамсея классов реберных и тотальных графов

Реберным графом G' графа G называется граф; вершинами которого являются ребра графа G , и две вершины графа G' смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им ребра графа G . Обозначим через L_1 класс, состоящий из всех реберных графов.

Тотальным графом $T(G)$ графа G называется граф, у которого множеством вершин является $V(G) \cup E(G)$, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда они инцидентны в графе G [1]. Обозначим через L_T класс, состоящий из всех тотальных графов.

Нахождение чисел Рамсея для этих классов графов хорошо показывает возникающие здесь трудности.

Теорема 6. *Справедливы оценки*

$$(1) N(q, s, 2; L_1) \leq s(q - 1) + 1;$$

$$(2) N(q, s, 2; L_1) \geq s(q - 1) + 1 + r(2r - s + 1), \quad s = 2t + 1, \quad t > 1, \quad q = kt + 1 + r, \quad t, r \in \mathbf{Z} \\ \text{и } 0 \leq r \leq t - 1, \quad \text{в частности, } N(q, s, 2; L_1) = s(q - 1) + 1 \text{ при } r = 0;$$

$$(3) \quad N(q, s, 2; L_1) \geq s(q-1) + r(2r+1-s) - 2(q-r-1)/s + 1, \quad s = 2t, \quad t > 1, \quad q = kt + r + 1, \\ t, r \in \mathbf{Z} \text{ и } 0 \leq r \leq t-1;$$

$$(4) \quad N(q, 3, 2; L_1) = [(5/2)(q-1)] + 1.$$

Доказательство. (1) Докажем сначала неравенство

$$N(q, s, 2; L_1) \leq s(q-1) + 1.$$

Пусть G — такой граф, что $G' \in L_{s,2}$, то есть $\varphi(G') \leq s-1$. Очевидно, что справедливы неравенства $\Delta(G) \leq \varphi(G') \leq s-1$. По теореме Визинга (см. [1])

$$\Delta(G) \leq \chi(G') \leq \Delta(G) + 1 \leq s.$$

Следовательно, по лемме 1

$$N(q, s, 2; L_1) \leq s(q-1) + 1.$$

(2) Пусть $q = kt + 1 + r$, где $0 \leq r \leq t-1$. Возьмем граф

$$G = \bigcup_{i=1}^k G_{2t+1}^i \cup G_{2r+1}$$

представляющий собой объединение k непересекающихся клик, каждая из которых состоит из $2t+1$ вершин и клики с $2r+1$ вершиной, тогда

$$\varphi(G') = 2t, \quad n(G') = m(G) = kt(2t+1) + r(2r+1).$$

Легко видеть, что $\alpha_1(G) = \varepsilon(G') = kt + r$, так как если бы $\alpha_1(G) \geq kt + r + 1$, то, по принципу Дирихле, или $\alpha_1(G_{2t+1}^i) \geq t+1$, или $\alpha_1(G_{2r+1}) \geq r+1$, но тогда $n(G_{2t+1}^i) \geq 2t+2$ или $n(G_{2r+1}) \geq 2r+2$. Следовательно, для $q = kt + r + 1$

$$p(q, G') = p(kt + r + 1, G') = kt(2t+1) + r(2r+1) + 1 = s(q-1) + 1 + r(2r+1-s)$$

и утверждение (2) доказано.

(3) Пусть $q = kt + r + 1$, где $0 \leq r \leq t-1$. Возьмем граф G , состоящий из $t-1$ попарно не смежных ребер и еще двух ребер, смежных между собой и не смежных с предыдущими, и такой что $n(G) = s+1 = 2t+1$, $m(G) = t+1$. Следовательно,

$$m(\bar{G}) = t(2t+1) - t - 1 = 2t^2 - 1, \quad \Delta(\bar{G}) = 2t - 1 = s - 1.$$

Пусть

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^k \bar{G}^i \cup G_{2r+1}$$

есть объединение k непересекающихся копий графа $\bar{G}$ и клики с $2r+1$ вершиной. Тогда, как и выше,

$$m(G_0) = k(2t^2 - 1) + r(2r+1), \quad \alpha_1(\bar{G}) = \varepsilon(\bar{G}') \leq kt + r.$$

Следовательно, при $q = kt + r + 1$

$$p(q, G'_0) \geq k(2t^2 - 1) + r(2r+1) + 1 = (q-1) + r(2r+1-s) - \frac{2(q-r-1)}{s} + 1.$$

(4) Докажем сначала неравенство

$$N(q, 3, 2; L_1) \leq [5(q-1)/2] + 1.$$

Доказательство будем вести индукцией по q . Пусть $q = 2$; тогда, так как $\varphi(G') \leq 2$, из трех ребер можно выбрать два несмежных, и оценка $N(q, 3, 2; L_1) \leq [5/2] + 1 = 3$ доказана.

Предположим, что неравенство верно для всех $q_0 < q$ и докажем его для q . Для всех $q \geq 1$

$$[5(q-1)/2] + 1 = 2q - 1 + [(q-1)/2] \geq 2q - 1.$$

Возьмем такой граф G , что $\varphi(G') \leq 2$ и $m(G) = 2q - 1 + [(q-1)/2]$. Так как $\varphi(G') \leq 2$, любая из компонент связности G — либо путь, либо цикл длины > 3 , а значит, так же устроены компоненты связности G' . Возможны два случая.

В первом случае все компоненты связности графа — циклы четной длины и пути. По теореме Кенига, граф G' можно окрасить в две краски и в силу леммы 1

$$p(q, G') \leq 2q - 1 \leq [5(q-1)/2] + 1.$$

Во втором случае среди компонент связности графа G есть цикл C нечетной длины $2k+1$. Среди его ребер найдутся k попарно несмежных. Удалим ребра цикла, и так как $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} 2q - 1 + [(q-1)/2] - (2k+1) &= 2(q-k) + [(q-3)/2] - 1 \\ &\geq 2(q-k) + [(q-k-1)/2] - 1 = N. \end{aligned}$$

По предположению индукции, среди N ребер можно выбрать $q-k$ попарно не смежных. Добавляя к ним k попарно не смежных ребер цикла C , получаем q попарно не смежных ребер. Неравенство доказано.

Докажем обратное неравенство.

Пусть $q = 2t + 1$. Возьмем граф

$$G = \bigcup_{i=1}^t C_5^i$$

который есть объединение t попарно не пересекающихся циклов длины пять. Очевидно, что $\alpha_1(G) = \varepsilon(G') = 2t$, то есть $p(2t+1, G') = 5t+1$, или

$$N(q, 3, 2; L_1) \geq 5t + 1 = [(5/2)(q-1)] + 1$$

при нечетном q .

Пусть теперь $q = 2t + 2$. Возьмем граф

$$G = \bigcup_{i=1}^t C_5^i \cup P_2$$

который есть объединение t попарно не пересекающихся циклов длины пять и пути длины 2. Очевидно, что $\alpha_1(G) = \varepsilon(G') = 2t+1$, то есть $p(2t+2, G') = 5t+3$, или

$$N(q, 3, 2; L_1) \geq 5t + 3 = [(5/2)(q-1)] + 1$$

при четном q . Теорема доказана.

Теорема 7. Для класса L'_1 графов, реберных к двудольным графам,

$$N(q, s, 2; L'_1) = (s - 1)(q - 1) + 1.$$

Доказательство. Известно (см. [1]), что $\chi(G') \leq \Delta$ для двудольного графа G . Отсюда, по лемме 1

$$N(q, s, 2; L'_1) \leq (s - 1)(q - 1) + 1.$$

Докажем обратное неравенство. Пусть

$$q = k(s - 1) + 1 + r, \quad 0 \leq r \leq s - 2.$$

Возьмем двудольный граф

$$G = \bigcup_{i=1}^t K_{s-1, s-1}^i \cup K_{s-1, r},$$

являющийся объединением k попарно не пересекающихся полных двудольных графов $K_{s-1, s-1}$ и полного двудольного графа $K_{s-1, r}$, тогда

$$\varphi(G') = \Delta(G) = s - 1, \quad n(G') = m(G) = k(s - 1)^2 + r(s - 1).$$

Очевидно, что $\alpha_1(G) = \varepsilon(G') = k(s - 1) + r$. Следовательно, при $q = k(s - 1) + 1 + r$

$$p(q, G') = k(s - 1)^2 + r(s - 1) + 1 = (s - 1)(q - 1) + 1,$$

или

$$N(q, s, 2; L'_1) \geq (s - 1)(q - 1) + 1.$$

Теорема доказана.

Приведем оценки чисел Рамсея для класса L_T графов, тотальных по отношению к обыкновенным графам. Очевидно, что при $\Delta(G) > 1$ плотность тотального графа $\varphi(T(G)) = s - 1 \leq \Delta(G) + 1$, и если G — непустой граф, то $\varphi(T(G)) \geq 3$.

Теорема 8. Справедливы оценки

$$(1) \quad N(q, s, 2; L_T) \leq (s - 1 + 2\lceil\sqrt{s - 1}\rceil)(q - 1) + 1;$$

$$(2) \quad N(q, s, 2; L_T) \geq s(q - 1) + 1, \quad s > 4;$$

$$(3) \quad N(q, 4, 2; L_T) = 18\lfloor q/2 \rfloor - 5q - 4.$$

Доказательство. (1) Доказательство первой оценки сразу следует из леммы 1 и оценки Хайнда (см. [14]) для тотального хроматического числа

$$\chi(T(G)) \leq \chi(G') + 2\lceil\sqrt{\chi(G)}\rceil,$$

где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее x .

Хорошо известно, что $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (см. [1]). По теореме Визинга

$$\chi(G') \leq \Delta(G) + 1 = s - 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p(q, T(G)) &\leq (\Delta(G) + 1 + 2] \sqrt{\Delta(G) + 1}] (q - 1) + 1 \\ &\leq (s - 1 + 2] \sqrt{s - 1}] (q - 1) + 1 \end{aligned}$$

и оценка доказана.

(2) Пусть

$$s = 2t + 1, \quad q = kt + 1 + r, \quad 0 \leq r \leq t - 1.$$

Возьмем граф

$$G = \bigcup_{i=1}^{t-1} K_{2t}^i \cup H,$$

где K_{2t}^i попарно не пересекаются;

$$H = N_{2r+1} + H_{2t-1, 2(r-t-1)},$$

N_{2r+1} — пустой граф на $2r + 1$ вершинах; $H_{2t-1, 2(r-t-1)}$ — однородный граф на $2t - 1$ вершинах со степенью $\Delta = 2(r - t - 1)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} n(T(G)) &= (k - 1)(2t + 1)t + (2t + 1)(t + r) = (2t + 1)(kt + r) = s(q - 1), \\ \varphi(T(G)) &= 2t = s - 1, \\ \varepsilon(G) &= kt + r. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p(q, T(G)) = (2t + 1)(kt + r) = s(q - 1).$$

Пусть $s = 2t + 2$. Доказательство, для простоты изложения, приведем только в случае $q = k(t + 1) + 1$. Возьмем граф

$$G = \bigcup_{i=1}^k H_{2t+2, 2t}^i,$$

где $H_{2t+2, 2t}^i$ — попарно не пересекающиеся однородные графы на $2t + 2$ вершинах со степенью $\Delta = 2t$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} n(T(G)) &= k(2t + 2)(t + 1) = s(q - 1), \\ \varphi(T(G)) &= 2t + 1 = s - 1, \\ \varepsilon(G) &= k(t + 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p(q, T(G)) = (2t + 1)k(t + 1) = s(q - 1).$$

(3) Докажем третью оценку. Ясно, что

$$18[q/2] - 5q - 4 = \begin{cases} 8t - 4, & q = 2t, \\ 8t + 1, & q = 2t + 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что если $\varphi(T(G)) \leq 3$, то $\varphi(G) < 3$ и $\Delta(G) < 3$. Следовательно, каждая компонента связности G — либо путь, либо цикл длины, большей трех. Известно [15], что если G — либо путь, либо цикл длины, большей трех, то $\chi(T(G)) \leq 4$. По лемме 1

$$N(q, 4, 2; L_T) \leq 18[q/2] - 5q - 4.$$

Для доказательства обратного неравенства возьмем граф

$$G = \bigcup_{i=1}^t C_4^i,$$

являющийся объединением t попарно не пересекающихся циклов C_4 длины 4 при $q = 2t + 1$, и граф

$$G = \bigcup_{i=1}^{t-1} C_4^i \cup K_2,$$

являющийся объединением $t - 1$ попарно не пересекающихся циклов C_4 длины 4 и ребра при $q = 2t$. Тогда

$$\varphi(T(G)) = 3, \quad n(T(G)) = \begin{cases} 8t - 5, & q = 2t, \\ 8t, & q = 2t + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varepsilon(T(C_4)) = 2$ и $\varepsilon(T(K_2)) = 1$. Следовательно,

$$p(q, T(G)) = \begin{cases} 8t - 4, & q = 2t, \\ 8t + 1, & q = 2t + 1. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Замечание 6. Из справедливости гипотезы Визинга [15] о том, что верна оценка $\chi_t(G) \leq \Delta(G) + 2$, следовало бы равенство $N(q, s, 2; L_T) = s(q - 1) + 1$.

5. Числа Рамсея графов пересечений геометрических множеств

Рассмотрим графы пересечений геометрических множеств.

Пусть дано семейство $X = \{M_i\}$, $i \in I$, произвольных множеств. Графом пересечений $G(X)$ этого семейства называется обыкновенный граф, вершинами которого служат сами эти множества и вершины M_i и M_j , $i \neq j$, смежны тогда и только тогда, когда $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ [1].

Обозначим класс графов пересечения семейств кубов в $\mathbf{R}^n$ через L_1^n , семейств равных кубов в $\mathbf{R}^n$ через L_2^n и семейств параллелотопов в $\mathbf{R}^n$ через L_3^n . Во всех семействах кубы и параллелотопы с соответственно параллельными ребрами.

Теорема 9. *Справедливы оценки*

$$N(q, s, 2; L_1^n) \leq 2^n(s - 2)(q - 2) + s + q - 2,$$

$$N(q, s, 2; L_2^n) \leq 2^{n-1}(s - 2)(q - 2) + s + q - 2,$$

$$N(s, q, 2; L_3^n) \leq ((s - 1) \log_2^{n-1}(s - 1) + n - (1/2)(s - 1) \log_2^{n-1}(s - 1))(q - 1) + 1.$$

Доказательство. Доказательство первой оценки проведем индукцией по q . Возьмем семейство кубов X в $\mathbf{R}^n$, и пусть G — его граф пересечений. Пусть $q = 2$. Тогда $N(q, s, 2; L_2^n) \leq s$, а это и означает, что $G \in L_{s,2}$.

Пусть неравенство выполняется при $q - 1$, то есть

$$N(q - 1, s, 2; L_2^n) \leq 2^n(s - 2)(q - 3) + s + q - 3.$$

Докажем неравенство для q . Выберем из семейства куб K , у которого ребро имеет наименьшую длину. Тогда каждый куб семейства, его пересекающий, содержит вершину K . Так как $\varphi(G) \leq s - 1$, его пересекает не более $2^n(s - 2)$ кубов. Удалим из семейства выбранный куб и его пересекающие, тогда число кубов в оставшихся семействе будет не менее

$$2^n(s - 2)(q - 2) + s + q - 2 - 2^n(s - 2) - 1 = 2^n(s - 2)(q - 3) + s + q - 3.$$

По предположению индукции среди такого числа кубов можно выбрать $q - 1$ попарно не пересекающихся. Добавляя к ним куб K , получаем множество, состоящее из q попарно не пересекающихся кубов.

Докажем вторую оценку. Возьмем семейство равных кубов в $\mathbf{R}^n$. Не уменьшая общности, можно считать, что все кубы имеют стороны, параллельные координатным осям, и единичное ребро. Будем вести доказательство индукцией по q . База уже доказана выше. Пусть неравенство выполняется при $q - 1$, то есть

$$N(q - 1, s, 2; L_1^n) \leq 2^{n-1}(s - 2)(q - 3) + s + q - 3.$$

Докажем неравенство для q . Возьмем из данного семейства куб K , у которого координата x_1 вершины достигает наименьшего значения x_1^0 среди всех кубов. Тогда все кубы, пересекающие куб K , содержат одну из вершин K с координатой $x_1^0 + 1$. Всего таких вершин 2^{n-1} и, так как $\varphi(G) \leq s - 1$, куб K пересекает не более $2^{n-1}(s - 2)$ кубов семейства. Далее, повторяя предыдущее рассуждение, получаем доказательство неравенства.

Докажем третье неравенство. В [16] для $\chi(G)$, где $G \in \overline{L}_3^n$ и $\varphi(G) \leq s - 1$, получена оценка

$$\chi(G) \leq (s - 1) \log_2^{n-1}(s - 1) + n - (1/2)(s - 1) \log_2^{n-1}(s - 1).$$

Отсюда, по лемме 1, непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} N(s, q, 2; \overline{L}_3^n) &= N(q, s, 2; L_3^n) \\ &\leq ((s - 1) \log_2^{n-1}(s - 1) + n - (1/2)(s - 1) \log_2^{n-1}(s - 1))(q - 1) + 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 7. Берлинг показал (см. [4]), что если $G \in L_3^2 \cap L_{q+1,2}$, то $\chi(G) \leq 2q^2 - q$ и, что $\sup \chi(G) = \infty$ для графов $G \in L_3^n \cap L_{3,2}$ при $n \geq 3$ (см. [7]).

Замечание 8. Аналогичные результаты можно получить для графов пересечений семейств выпуклых множеств, состоящих из транслятов и гомотетов произвольного выпуклого множества [17], точные значения обобщенных чисел Рамсея были получены только в случае $n = 1$. Следующий результат хорошо известен (в другой формулировке), однако оказалось трудно привести точную ссылку, поэтому, для полноты изложения, приведем его с полным доказательством.

Теорема 10. *Справедливо равенство*

$$N(q, s, 2; L_1^1) = (s - 1)(q - 1) + 1.$$

Доказательство. Докажем неравенство $N(q, s, 2; L_1^1) \leq (s - 1)(q - 1) + 1$. Доказательство будем вести индукцией по q . Возьмем семейство отрезков на прямой и пусть G — его граф пересечений. Если $q = 1$, то $N(1, s, 2; L_1^1) = 1$.

Пусть неравенство верно при $q - 1$, то есть

$$N(q - 1, s, 2; L_1^1) \leq (s - 1)(q - 2) + 1.$$

Докажем неравенство для q . Выберем из них отрезок I с самым левым правым концом. Поскольку $\varphi(G) \leq s - 1$, его пересекает не более чем $s - 2$ отрезка. Далее, повторяя предыдущее рассуждение из доказательства теоремы 9, получаем неравенство

$$N(q, s, 2; L_1^1) \leq (s - 1)(q - 1) + 1.$$

Рассмотрим семейство отрезков X , разбитое на $q - 1$ подсемейств $K_1, \dots, K_{q-1}$ таким образом, что в каждом подсемействе по $s - 1$ отрезку, каждое подсемейство имеет непустое пересечение, отрезки из разных подсемейств не пересекаются. Очевидно, что среди этих $(s - 1)(q - 1)$ отрезков нельзя выбрать q попарно не пересекающихся. Следовательно, для графа G пересечений семейства отрезков X выполняется равенство $p(q, G) = (s - 1)(q - 1) + 1$ и теорема доказана.

Теорема 11. *Для класса L_4^1 графов пересечений дуг на окружности*

$$N(q, s, 2; L_4^1) \leq (s - 1)q,$$

причем при $s = 3$ это неравенство точное.

Доказательство. Пусть G — граф пересечения дуг на окружности. Так как справедлива оценка $\varphi(G) \leq s - 1$, а дуги замкнуты, существует точка, которую покрывает не более чем $s - 2$ дуги. Удалим из множества точек окружности выбранную точку, а вместе с ней и $s - 2$ дуги, ее покрывающих. Оставшееся множество точек окружности можно рассматривать как подмножеством прямой, а граф пересечения G_1 оставшихся дуг, являющийся подграфом графа G , как граф пересечения отрезков на прямой. Тогда по теореме 10 для графа G_1

$$p(q, G_1) \leq (s - 1)(q - 1) + 1.$$

Добавляя удаленные $s - 2$ отрезка, получаем, что

$$p(q, G) \leq (s - 1)(q - 1) + 1 + (s - 2),$$

или $N(q, s, 2; L_4^1) \leq (s - 1)q$.

Покажем теперь, что для $s = 3$ неравенство в теореме точное. Возьмем $2q - 1$ точку на окружности, тогда граф пересечения G , образованных точками $2q - 1$ дуг на окружности, является циклом на $2q - 1$ вершине и $\varphi(G) = 2$. Очевидно, что граф $G \in L_{2q-1, q-1}$ и $G \notin L_{2q-1, q}$. Поэтому

$$p(q, G) = 2q - 1 + 1 = 2q = (s - 1)q,$$

и теорема доказана.

Список литературы

1. Харари Ф. *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
2. Емеличев Е. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.
3. Хадвигер Г., Дебруннер Г. *Комбинаторная геометрия на плоскости*. Наука, Москва, 1965.
4. Helly J. E. Radon and Caratheodory type theorems. In: *Handbook of Convex Geometry* (Gruber P. M., Wills J. M. Eds.). Elsevier, Amsterdam, 1993, pp. 389–448.
5. Alon N., Kleitman D. J. Piercing convex sets and Hadviger–Debrunner (p, q) -problem. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1992) **27**, №2, 252–256.
6. Дольников В. Л. Об одной задаче окрашивания. *Сиб. матем. ж.* (1972) **13**, №6, 1272–1283.
7. Дольников В. Л. Об одном обобщении теоремы Рамсея. *Докл. АН СССР* (1977) **232**, №6, 1241–1244.
8. Дольников В. Л., Полякова О. П. Функция неплотности графа и числа Рамсея различных классов графов. *Дискретный анализ и исследование операций* (1997) №4, 102–103.
9. Грэхем Р. *Начала теории Рамсея*. Мир, Москва, 1984.
10. Рыбников К. А. *Комбинаторный анализ — задачи и упражнения*. Наука, Москва, 1976.
11. Баранов В. И., Стечкин Б. С. *Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения*. Наука, Москва, 1989.
12. Зыков А. А. *Основы теории графов*. Наука, Москва, 1987.
13. Эрдеш П., Спенсер Дж. *Вероятностные методы в комбинаторике*. Мир, Москва, 1976.
14. Chetwynd A. G., Hilton A. G., Zhao Cheng N. The total chromatic number of graphs of high minimum degree. *J. London Math. Soc.* (1991) **44**, №2, 193–202.
15. Визинг В. Г. Оценка числа внешней устойчивости графа. *Докл. АН СССР* (1965) **164**, №4, 729–731.
16. Fon-Der-Flaas D. G., Kostochka A. V. Covering boxes by points. *Discrete Math.* (1993) **120**, 269–275.
17. Дольников В. Л. О разбиении семейств выпуклых тел. *Сиб. матем. ж.* (1971) **12**, №3, 664–667.

Статья поступила 04.07.1997.

Переработанный вариант поступил 28.05.1998.