Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, Р. А. Бердышева, О сильной устойчивости векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 3–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:11:36

УДК 519.10

О сильной устойчивости векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации

© 1998 г. В. А. Емеличев, Р. А. Бердышева

Исследуется тот тип устойчивости лексикографического множества векторной траекторной задачи с произвольной комбинацией частных критериев вида MINSUM, MINMAX и MINMIN, при котором малые возмущения параметров векторного критерия могут приводить к появлению новых лексикографических оптимумов, однако, сохраняют лексикографическую оптимальность хотя бы одной из траекторий первоначальной задачи.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, проект Ф95–70.

Под устойчивостью по векторному критерию комбинаторной задачи лексикографической оптимизации, как обычно (см., например, [1, 2]), будем понимать свойство не появления новых лексикографических оптимумов задачи при малых возмущениях параметров векторного критерия. Если при таких возмущениях разрешить появление новых, но потребовать сохранения хотя бы одного из первоначальных лексикографических оптимумов, то такое ослабление естественно приводит к понятию сильной устойчивости задачи, впервые введенному В. К. Леонтьевым в [3] для линейных однокритериальных траекторных задач.

В настоящей заметке получены необходимые и достаточные условия сильной устойчивости по векторному критерию траекторной лексикографической задачи с широко известными в дискретной оптимизации частными критериями вида MINSUM (линейный), MINMAX (узкого места) и MINMIN. Указана нижняя достижимая оценка для радиуса сильной устойчивости в случае чебышевской нормы в пространстве возмущающих параметров.

Пусть (E, T) — система подмножеств; $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m > 1$; $T \subseteq 2^E \setminus \{\emptyset\}$, $|T| > 1$, то есть T — некоторая совокупность непустых подмножеств множества E , называемых траекториями. Пусть на множестве E задана векторная функция

$$a(e) = (a_1(e), a_2(e), \dots, a_n(e)) \in \mathbf{R}^n, \quad n \geq 1,$$

а на множестве траекторий T задан векторный критерий

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)),$$

компоненты которого (частные критерии) имеют вид

$$\text{MINSUM} \quad f_i(t) = \sum_{e \in t} a_i(e) \rightarrow \min_T, \quad (1)$$

$$\text{MINMAX} \quad f_i(t) = \max\{a_i(e) : e \in t\} \rightarrow \min_T, \quad (2)$$

$$\text{MINMIN} \quad f_i(t) = \min\{a_i(e) : e \in t\} \rightarrow \min_T. \quad (3)$$

Обозначим через I_{SUM} , I_{MAX} , I_{MIN} множества тех чисел из $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, которыми в векторном критерии f занумерованы соответственно критерии MINSUM, MINMAX и MINMIN. Ясно, что $N_n = I_{\text{SUM}} \cup I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}$.

Под векторной (n -критериальной) траекторной задачей лексикографической оптимизации будем понимать задачу поиска лексикографического множества, которое, являясь подмножеством множества Парето, определяется следующим образом [1, 2].

Пусть S_n — множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. Для всякой перестановки $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_n$ в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$ вводится бинарное отношение лексикографического порядка :

$$\mathbf{x} \leq_s \mathbf{x}',$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}';$$

$$(2) \quad \exists j \in N_n \forall k \in N_{j-1} (x_{s_j} < x'_{s_j} \text{ \& } x_{s_k} = x'_{s_k}).$$

В случае, когда $k = 1$, последние равенства отсутствуют.

Множество

$$L^n = \bigcup_{s \in S_n} L^n(s),$$

где

$$L^n(s) = \{t \in T : f(t) \leq_s f(t') \forall t' \in T\},$$

называется лексикографическим, а его элементы лексикографически оптимальными траекториями.

Векторную функцию $a(e)$ будем представлять в виде матрицы $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$, где $a_{ij} = a_i(e_j)$. Если зафиксировать множества E , T , I_{SUM} , I_{MAX} , I_{MIN} то матрица A может служить для индексации лексикографического множества L^n , которое будем обозначать через $L^n(A)$. В дальнейшем задачу нахождения этого множества, то есть векторную задачу лексикографической оптимизации, будем обозначать через $Z^n(A)$, векторный критерий $f(t)$ через $f(t, A)$, а частные критерии $f_i(t)$ через $f_i(t, A)$.

Ясно, что в частном случае, когда $n = 1$, наша задача превращается в однокритериальную траекторную задачу, решениями которой являются траектории, доставляющие минимум функционала $f_1(t, A)$, где A — m -вектор. В схему такой задачи легко вписываются все известные оптимизационные задачи на графах, задачи булева программирования и некоторые задачи теории расписаний. Исследованию

радиуса устойчивости таких задач посвящена обширная литература (см., например, монографию [4] и обзоры [5, 6]).

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\tau_i(t, t', A) = f_i(t, A) - f_i(t', A).$$

Непосредственно из определения лексикографического множества $L^n(A)$ вытекают следующие свойства, справедливые для задач с векторным критерием, состоящим из любых частных критериев (не только вида (1)–(3)).

Свойство 1. Пусть $T = T_1 \cup T_2$ и $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Если существует такой индекс $i \in N_n$, что для любой траектории $t \in T_1$ найдется такая траектория $t' \in T_2$, что $\tau_i(t, t', A) > 0$, то

$$T_2 \cap L^n(A) \neq \emptyset.$$

Свойство 2. Пусть $T = T_1 \cup T_2$ и $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Если для любого индекса $i \in N_n$ существует такая траектория $t \in T_1$, что $\tau_i(t, t', A) < 0 \forall t' \in T_2$, то

$$T_2 \cap L^n(A) = \emptyset.$$

Как обычно, возмущение матрицы $A \in \mathbf{R}^{nm}$ будем осуществлять путем сложения этой матрицы с матрицами множества

$$R(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm} : \|B\| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\|\cdot\|$ — чебышевская норма в пространстве $\mathbf{R}^{nm}$, то есть

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}, \quad B = \{b_{ij}\}_{n \times m}.$$

Пусть $A, B \in \mathbf{R}^{nm}$. Задачу $Z^n(A+B)$, полученную из исходной задачи $Z^n(A)$ при сложении матриц A и B , будем называть возмущенной, а матрицу B возмущающей матрицей.

Радиусом сильной устойчивости задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, назовем число

$$\rho^n(A) = \begin{cases} \sup \Omega(A), & \text{если } \Omega(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Omega(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Omega(A) = \{\varepsilon > 0 : \forall B \in R(\varepsilon) L^n(A) \cap L^n(A+B) \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, что, если $T = L^n(A)$, то радиус сильной устойчивости $\rho^n(A)$ равен бесконечности. Задачу, для которой

$$\bar{L}^n(A) = T \setminus L^n(A) \neq \emptyset,$$

будем называть нетривиальной. Для таких задач очевидны следующие два свойства.

Свойство 3. Пусть $\varphi > 0$. Если

$$L^n(A) \cap L^n(A+B) \neq \emptyset \quad \forall B \in R(\varphi),$$

то

$$\rho^n(A) \geq \varphi.$$

Свойство 4. Пусть $\varphi \geq 0$. Если для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существует такая возмущающая матрица $B \in R(\varepsilon)$, что

$$L^n(A) \cap L^n(A + B) = \emptyset,$$

то

$$\rho^n(A) \leq \varphi.$$

Для двух различных траекторий t и t' введем число

$$\Delta_i(t, t') = \begin{cases} |t| + |t'| - 2|t \cap t'|, & \text{если } i \in I_{\text{sum}}, \\ 2, & \text{если } i \notin I_{\text{sum}}. \end{cases}$$

Очевидно, что для любого индекса $i \in N_n$

$$\Delta_i(t, t') > 0, \quad t \neq t'.$$

В дальнейшем для любого подмножества $t \subseteq E$ будем пользоваться обозначением

$$N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}.$$

Лемма 1. Пусть t и t' — две различные траектории, $i \in N_n$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\tau_i(t, t', A + B) > 0 \quad \forall B \in R(\varepsilon),$$

если

$$\tau_i(t, t', A) \geq \varepsilon \Delta_i(t, t'). \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

В первом случае функция $f_i(t, A)$ линейна. Тогда, используя неравенства (4) и $\|B\| < \varepsilon$, получаем, что

$$\begin{aligned} \tau_i(t, t', A + B) &= f_i(t, A + B) - f_i(t', A + B) \\ &> f_i(t, A) - \varepsilon|t \setminus t'| - (f_i(t', A) + \varepsilon|t' \setminus t|) \\ &= \tau_i(t, t', A) - \varepsilon \Delta_i(t, t') \geq 0 \end{aligned}$$

для всех $B \in R(\varepsilon)$.

Во втором случае $f_i(t, A)$ имеет вид (2). Тогда

$$\begin{aligned} \tau_i(t, t', A + B) &= f_i(t, A + B) - f_i(t', A + B) \\ &= \max\{(a_{ij} + b_{ij}) : j \in N(t)\} - \max\{(a_{ij} + b_{ij}) : j \in N(t')\} \\ &> f_i(t, A) - \varepsilon - (f_i(t', A) + \varepsilon) \\ &= \tau_i(t, t', A) - 2\varepsilon \geq 0 \end{aligned}$$

для всех $B \in R(\varepsilon)$.

В третьем случае, когда функция $f_i(t, A)$ имеет вид (3), доказательство проводится аналогично второму случаю. Лемма доказана.

Пусть

$$\varphi^n(A) = \max_{i \in N_n} \min_{t \in L^n(A)} \max_{t' \in L^n(A)} \frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta_i(t, t')}.$$

Очевидно, что $\varphi^n(A) \geq 0$.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathbf{R}^{nm}$. Для радиуса сильной устойчивости нетривиальной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, с любой комбинацией частных критериев (1)–(3) справедлива оценка

$$\rho^n(A) \geq \varphi^n(A), \quad (5)$$

причем

$$\rho^n(A) = \varphi^n(A), \quad (6)$$

если $I_{\text{SUM}} = N_n$.

Доказательство. Неравенство (5) очевидно, если $\varphi^n(A) = 0$.

Пусть $\varphi = \varphi^n(A) > 0$. Тогда $R(\varphi) \neq \emptyset$, и по определению числа φ существует такой индекс $i \in N_n$, что для любой траектории $t \in \bar{L}^n(A)$ найдется лексикографически оптимальная траектория t' задачи $Z^n(A)$, для которой

$$\tau_i(t, t', A) \geq \varphi \Delta_i(t, t').$$

Тогда, пользуясь леммой, получаем, что

$$\tau_i(t, t', A + B) > 0 \quad \forall B \in R(\varphi).$$

Отсюда, учитывая свойство 1, находим, что

$$L^n(A) \cap L^n(A + B) \neq \emptyset \quad \forall B \in R(\varphi).$$

Следовательно, на основании свойства 3, выводим (5).

Для доказательства равенства (6) достаточно показать, что $\rho^n(A) \leq \varphi$, если $I_{\text{SUM}} = N_n$.

Согласно определению числа φ для любого индекса $i \in N_n$ найдется такая траектория $t \in \bar{L}^n(A)$, что

$$\tau_i(t, t', A) \leq \varphi \Delta_i(t, t') \quad \forall t' \in L^n(A). \quad (7)$$

Далее, если для любого числа $\varepsilon > \varphi$ в качестве возмущающей матрицы $B \in R(\varepsilon)$ взять матрицу с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} -b, & \text{если } i \in N_n, j \in N(t), \\ b, & \text{если } i \in N_n, j \notin N(t), \end{cases}$$

где $\varphi < b < \varepsilon$, то, пользуясь (7), получим, что для всех $t' \in L^n(A)$

$$\tau_i(t, t', A + B) = \tau_i(t, t', A) - b \Delta_i(t, t') < \tau_i(t, t', A) - \varphi \Delta_i(t, t') \leq 0.$$

Таким образом, на основании свойства 2

$$L^n(A) \cap L^n(A + B) = \emptyset.$$

Следовательно, в силу свойства 4

$$\rho^n(A) \leq \varphi.$$

Это неравенство, вместе с неравенством (5), доказывает теорему.

По аналогии с [3] радиусом устойчивости задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, называется число

$$\rho_0^n(A) = \begin{cases} \sup \Omega_0(A), & \text{если } \Omega_0(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Omega_0(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Omega_0(A) = \{\varepsilon > 0: L^n(A + B) \subseteq L^n(A) \forall B \in R(\varepsilon)\}.$$

В [2] выведена следующая формула радиуса устойчивости нетривиальной линейной ($I_{\text{SUM}} = N_n$) задачи $Z^n(A)$:

$$\rho_0^n(A) = \min_{i \in N_n} \min_{t \in \bar{L}^n(A)} \max_{t' \in L^n(A)} \frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta_i(t, t')}.$$

Очевидно, что

$$\rho^n(A) \geq \rho_0^n(A) \quad \forall n \geq 1, A \in \mathbf{R}^{nm}.$$

Из приведенной формулы радиуса устойчивости и из теоремы 1 вытекает следующий известный результат (см. [3]).

Следствие 1. Для всякой линейной однокритериальной траекторной задачи $Z^1(A)$ справедливо равенство

$$\rho_0^1(A) = \rho^1(A).$$

Задачу $Z^n(A)$ назовем сильно устойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in R(\varepsilon) (L^n(A) \cap L^n(A + B) \neq \emptyset).$$

Лексикографическое множество $L^n(A)$ нетривиальной задачи $Z^n(A)$ назовем сильным, если выполняется формула

$$\exists i \in N_n \quad \forall t \in \bar{L}^n(A) \quad \exists t' \in L^n(A) (\tau_i(t, t', A) > 0).$$

Следствие 2. Для того, чтобы нетривиальная траекторная задача $Z^n(A)$ при $n \geq 1$ с любой комбинацией частных критериев (1)–(3) была сильно устойчивой, достаточно, а в случае, когда $I_{\text{SUM}} = N_n$, и необходимо, чтобы лексикографическое множество $L^n(A)$ было сильным.

Отсюда следует известный результат [3]: всякая линейная задача $Z^1(A)$ сильно устойчива.

Следующий пример показывает, что в случае, когда $I_{\text{SUM}} \neq N_n$, достаточное условие следствия 2 не является необходимым и радиус сильной устойчивости $\rho^n(A)$ может быть больше числа $\varphi^n(A)$.

Пример 1. Пусть $n = 2$, $m = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}, \quad t_1 = \{e_1, e_2\}, \quad t_2 = \{e_2, e_3\}, \quad t_3 = \{e_3, e_4\},$$

$$f_1(t, A) = \max\{a_{1j}: j \in N(t)\} \rightarrow \min_T,$$

$$f_2(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{2j} \rightarrow \min_T.$$

Тогда $L^2(A) = \{t_1\}$.

Для любой возмущающей матрицы $B \in R(1/2)$ справедливы соотношения

$$\tau_1(t_1, t_2, A + B) = 0, \quad \tau_1(t_1, t_3, A + B) < 0, \quad \tau_2(t_1, t_2, A + B) < 0,$$

поэтому траектория t_1 является лексикографически оптимальной траекторией любой возмущенной задачи $Z^2(A + B)$, $B \in R(1/2)$. Следовательно, задача $Z^2(A)$ сильно устойчива и $\rho^2(A) > 0$.

В то же время справедливы равенства

$$\tau_1(t_1, t_2, A) = 0, \quad \tau_2(t_1, t_3, A) = 0,$$

которые указывают, что лексикографическое множество $L^2(A)$ не является сильным, и $\varphi^2(A) = 0$, то есть $\rho^2(A) > \varphi^2(A)$.

Список литературы

1. Бердышева Р. А., Емеличев В. А. Устойчивость линейных траекторных задач лексикографической оптимизации. *Кибернетика и системный анализ* (1997) №4, 83–88.
2. Емеличев В. А., Бердышева Р. А. О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации. *Дискретная математика* (1998) 10, №1, 20–27.
3. Леонтьев В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах. *Проблемы кибернетики*. (1979) 35, 169–184.
4. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач*. Наукова думка, Киев, 1995.
5. Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко И. В. Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ* (1993) №3, 78–93.
6. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization. *Discrete Applied Math.* (1995) 58, 169–190.

Статья поступила 11.03.1998.