Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Кошелев, С. И. Стасевич, Комбинаторика взаимодействия на плоских решетках, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 73–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:29:15

Комбинаторика взаимодействия на плоских решетках

© 1998 г. В. Н. Кошелев, С. И. Стасевич

Рассматривается задача перечисления событий, возникающих на ребрах регулярных плоских решеток при заданном взаимодействии в узлах. Рассматривается простейший случай, когда взаимодействие описывается $(0, 1)$ -матрицей размера 4×4 . Изучается асимптотика числа событий при растущих линейных размерах решетки и выписываются оценки экспоненциальной скорости роста как функции от матрицы взаимодействия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00627, и INTAS, проект 94-0469.

1. Введение

Вопросы, связанные с изучением поведения больших систем, то есть систем, состоящих из большого числа элементов, определенным образом взаимодействующих между собой, образуют область, лежащую на пересечении статистической механики и теории информации, и в наиболее общей своей постановке требуют теоретико-вероятностного рассмотрения. В то же время чисто комбинаторный подход, хотя и несколько упрощает возникающие здесь постановки задач, зато позволяет находить довольно простые решения в терминах дискретной математики. Одной из таких упрощенных постановок является задача перечисления событий, возникающих на ребрах регулярных решеток при заданном взаимодействии в узлах. При этом рассматриваются детерминистские формы взаимодействия, когда все локальные конфигурации в узле делятся на разрешенные и запрещенные. Это существенно упрощает задачу глобального перечисления и позволяет выписывать для числа разрешенных событий довольно естественные матричные выражения. Рассматриваются двумерные регулярные решетки трех модификаций: плоская прямоугольная решетка, прямоугольная диагонально ориентированная решетка на цилиндре и сотовая (шестиугольная) решетка на цилиндре. Изучается асимптотика числа событий при растущих линейных размерах решетки и выписываются оценки экспоненциальной скорости роста, измеряемой в битах на ребро. Вводится определение изотропного взаимодействия и приводятся его примеры, в том числе взаимодействие, порождающего контурные изображения на решетке.

2. Плоская решетка

Основные определения и обозначения, вводимые ниже для плоской решетки будут использоваться и в остальных модификациях. Плоская $L \times M$ решетка образуется на плоскости пересечением L вертикалей длины $M + 1$ с M горизонталями длины $L + 1$. Она содержит LM целочисленных узлов

$$(l, m), \quad l = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M, \quad (1)$$

каждому из которых соответствует четверка ребер, именно, (l, m) соответствуют ребра

$$u_{ml}, v_{lm}, u_{ml+1}, v_{lm+1}, \quad (2)$$

для которых узел (1) является общим. Ребра u_{ml}, u_{ml+1} лежат на m -й горизонтали, а ребра v_{lm}, v_{lm+1} на l -й вертикали. Элементы четверки (2) суть двоичные величины; пара u_{ml}, v_{lm} образует вход, а пара u_{ml+1}, v_{lm+1} выход узла (1). Взаимодействие между входом и выходом определяется $(0, 1)$ -матрицей размера 4×4

$$B = (b_{i_1 i_2 i_3 i_4}), \quad i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, \quad (3)$$

где

$$b_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \chi\{u_{ml} = i_1; v_{lm} = i_2; u_{ml+1} = i_3; v_{lm+1} = i_4\},$$

а $\chi\{\cdot\}$ — индикаторная функция. Если $\Delta \subseteq \{0, 1\}^4$ — список разрешенных двоичных конфигураций, то

$$b_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 1 \iff (i_1, i_2, i_3, i_4) \in \Delta,$$

то есть элементы матрицы взаимодействия, соответствующие запрещенным конфигурациям, равны 0. Состояние решетки, в котором каждая четверка (2) имеет разрешенное значение, называется реализацией решетки или событием. Множество всех событий, следуя определениям, принятым в статистической механике, будем называть полем и обозначать

$$\Phi(L, M, B). \quad (4)$$

Задачей перечисления будем называть нахождение мощности поля

$$|\Phi(L, M, B)| \quad (5)$$

как функции от размеров решетки L, M и матрицы B взаимодействия в узле.

Для начала рассмотрим аналогичную задачу в одномерном случае. Опуская M , обозначим $\Phi(L, A)$ множество событий на одномерной L -решетке, состоящей из L узлов $l = 1, \dots, L$ и $L + 1$ ребер

$$u^L = (u_1, u_2, \dots, u_{L+1}) \in \{0, 1\}^{L+1}, \quad (6)$$

причем ребро u_l взаимодействует с ребром u_{l+1} через узел l в соответствии с некоторой $(0, 1)$ -матрицей A размера 2×2 . Так как последовательность (6) образует $(L + 1)$ -звенную цепь Маркова,

$$|\Phi(L, A)| = \|A^L\|, \quad (7)$$

где $\|C\|$ означает норму неотрицательной матрицы C , равную сумме всех ее элементов. Дальнейшее изучение величины (7) следует стандартным рассуждениям, основанным на теореме Перрона–Фробениуса.

Простота решения задачи перечисления в данном случае объясняется тем, что операция матричного умножения (строка первого сомножителя на столбец второго) по определению согласована с топологией одномерной решетки (выход предыдущего узла является входом последующего). В двумерном случае аппарат перечисления существенно усложняется, поскольку помимо матрицы узлового взаимодействия в него требуется ввести матричную запись топологии рассматриваемой решетки; заметим, что в одномерном случае между каждыми двумя сомножителями A формально присутствует сомножитель

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Именно эта топологическая сторона дела и является спецификой рассматриваемой ниже задачи: будет показано, что каждая из модификаций, плоская и цилиндрическая, имеют свое матричное описание топологии.

Перейдем к нахождению величины (5). Из определения (3) матрицы взаимодействия следует, что $|\Phi(1, 1, B)| = \|B\|$. Чтобы найти мощность плоского $L \times M$ поля для произвольных целых $L, M \geq 1$, введем в рассмотрение блочное представление матрицы взаимодействия

$$B = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где B_{ij} означает 2×2 матрицу взаимодействия вертикальных ребер узла при условии, что горизонтальные ребра приняли фиксированное значение i, j .

Теорема 1. Пусть задана матрица взаимодействия B с блочным представлением (8). Тогда мощность порождаемого ею плоского $L \times M$ поля равна

$$|\Phi(L, M, B)| = \|C_L^M\|, \quad (9)$$

где

$$C_L = C_L(B) = \sum_{\{i_1, \dots, i_{L+1}\}} \bigotimes_{l=1}^L B_{i_l i_{l+1}}, \quad (10)$$

$a \otimes$ — операция кронекеровского умножения.

Доказательство. Для доказательства заметим, что при фиксированных значениях горизонтальных ребер поле (4) обращается в $(M+1)$ -звенную цепь Маркова. Действительно, введем следующие обозначения. Пусть

$$u_m^{L+1} = (u_{ml}, l = 1, \dots, L+1)$$

— последовательность горизонтальных ребер m -й горизонтали,

$$v_m^{L+1} = (v_{lm}, l = 1, \dots, L+1) \quad (11)$$

— последовательность вертикальных ребер, входящих в узлы m -й горизонтали,

$$u_m^{L+1} = i_m^{L+1} \in \{0, 1\}^{L+1} \quad (12)$$

— фиксированное значение m -й горизонтали, и, наконец,

$$i^{M \times (L+1)} = \begin{pmatrix} i_M^{L+1} \\ \vdots \\ i_1^{L+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

— $(0, 1)$ -матрица размера $M \times (L+1)$, состоящая из фиксированных значений всех $M(L+1)$ горизонтальных ребер.

Положим также

$$i^{L+1} = \{i_1, \dots, i_{L+1}\}.$$

Как следует из (8), при $(u_{ml}, u_{ml+1}) = i_{ml} i_{ml+1}$ пара (v_{lm}, v_{lm+1}) взаимодействует согласно матрице $B_{i_{ml} i_{ml+1}}$. Следовательно, при условии (12) пара (v_m^L, v_{m+1}^L) взаимодействует согласно матрице $\bigotimes_{l=1}^L B_{i_{ml} i_{ml+1}}$. Если фиксированы все M горизонталей, то переменные (11) образуют условную $(M+1)$ -звенную цепь Маркова

$$v_1^L, v_2^L, \dots, v_{M+1}^L. \quad (14)$$

Обозначая $\Phi(L, M, B \mid i^{M \times (L+1)})$ множество событий в (14), находим, что

$$|\Phi(L, M, B \mid i^{M \times (L+1)})| = \left\| \prod_{m=1}^M \bigotimes_{l=1}^L B_{i_{ml} i_{ml+1}} \right\|. \quad (15)$$

Два события на решетке различны, если они различаются значением хотя бы одного ребра, поэтому

$$\Phi(L, M, B \mid i^{M \times (L+1)}) \cap \Phi(L, M, B \mid \tilde{i}^{M \times (L+1)}) = \emptyset$$

для всех $i^{M \times (L+1)} \neq \tilde{i}^{M \times (L+1)}$, и суммируя (15) по переменному (13) находим, что

$$\begin{aligned} |\Phi(L, M, B)| &= \sum_{i^{M \times (L+1)}} |\Phi(L, M, B \mid i^{M \times (L+1)})| \\ &= \sum_{i^{M \times (L+1)}} \left\| \prod_{m=1}^M \bigotimes_{l=1}^L B_{i_{ml} i_{ml+1}} \right\| \\ &= \left\| \prod_{m=1}^M \sum_{i_m^{L+1}} \bigotimes_{l=1}^L B_{i_{ml} i_{ml+1}} \right\| = \left\| \left(\sum_{i^{L+1}} \bigotimes_{l=1}^L B_{i_l i_{l+1}} \right)^M \right\|, \end{aligned} \quad (16)$$

что совпадает с выражением (9).

Если во втором выражении в правой части равенства (16) поменять местами марковское и кронекеровское произведения согласно правилу

$$(\alpha \otimes \beta)(\gamma \otimes \delta) = (\alpha\gamma) \otimes (\beta\delta),$$

то после очевидных преобразований приходим к выражению

$$|\Phi(L, M, B)| = \|F_M^L\|, \quad (17)$$

где

$$F_M = F_M(B) = (\|B_{i^M j^M}\|) \quad (18)$$

и

$$B_{i^M j^M} = \prod_{m=1}^M B_{i_m j_m}, \quad i^M, j^M \in \{0, 1\}^M. \quad (19)$$

Сравнение (17) с (9) показывает, что при одном и том же взаимодействии число событий в $L \times M$ поле, вообще говоря, не совпадает с числом событий в $M \times L$ поле. Мы вернемся к этому замечанию ниже после введения понятия изотропности.

3. Цилиндрическая решетка

Описанная выше схема перечисления на двумерной решетке является естественным обобщением одномерной: сначала строится схема перечисления по горизонтали длины L , а затем полученная конструкция поднимается вверх по вертикали на высоту M . Хотя схема перечисления событий на решетке цилиндрической модификации строится аналогичным образом, матричные выражения получаются существенно отличными от случая плоской модификации.

Цилиндрическая $L \times M$ решетка — это плоская $L \times M$ решетка, нанесенная на поверхность цилиндра. Схема перечисления существенно упрощается, если решетке придать диагональную ориентацию, то есть расположить так, чтобы ее вертикали и горизонталы были навиты на цилиндр под углом в 45° к его центральной оси. При этом узлы образуют L круговых ярусов по M узлов в каждом. Спроектируем цилиндр на плоскость, параллельную его оси, то есть сплющим его, объединив переднюю и заднюю его стенки. При этом каждый узел передней (задней) стенки должен попасть в центр квадратной ячейки задней (передней) стенки. В полученной проекции рассмотрим два яруса, l -й и $(l+1)$ -й, и в каждом из них занумеруем узлы слева направо. Тогда левое выходное ребро узла (l, m) , $2 \leq m \leq M-1$, $M \geq 3$, является правым входным ребром узла $(l+1, m-1)$, а правое выходное ребро узла (l, m) является левым входным ребром узла $(l+1, m+1)$. При $m=1$ левое выходное ребро узла $(l, 1)$ остается левым входным ребром узла $(l+1, 1)$, а правое выходное ребро узла $(l, 1)$ является левым входным ребром узла $(l+1, 2)$. Для $m=M$ картина зеркально симметрична к $m=1$. (Описание решетки для $M=1, 2$ следует отсюда очевидным образом). Указанная топология на цилиндрической решетке описывается с помощью $2^M \times 2^M$ матрицы G_M , задающей перестановку, переводящую выход l -го яруса во вход $(l+1)$ -го. Эта матрица имеет вид

$$G_M = I_2 \otimes D^{[M-1]} \otimes I_2, \quad (20)$$

где I_2 — единичная 2×2 матрица и

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\Psi(L, M, B) \quad (21)$$

— двоичное поле, порождаемое взаимодействием B на ребрах цилиндрической $L \times M$ решетки.

Теорема 2. Для любой $(0, 1)$ -матрицы B размера 4×4

$$|\Psi(L, M, B)| = \|W_M^L\|, \quad (22)$$

где

$$W_M = W_M(B) = B^{[M]} G_M, \quad (23)$$

а G_M — матрица, указанная выше.

Заметим, что существенное упрощение, упомянутое выше, состоит в том, что благодаря диагональной ориентации решетки, выражение (23) учитывает матрицу взаимодействия в ее полной форме, не прибегая к блочному представлению.

Доказательство. Доказательство, как и в предыдущем случае, основано на представлении поля (21) в виде $(L+1)$ -звенной цепи Маркова, l -е звено которой состоит из $2M$ входных ребер l -го яруса, $l = 1, \dots, L$, $(L+1)$ -е звено состоит из $2M$ выходных ребер L -го яруса, а матрицей взаимодействия между l -м и $(l+1)$ -м звеньями служит матрица (23). При этом сомножитель $B^{[M]}$ в матрице (23) определяет прямое (кронееровское) взаимодействие входных и выходных ребер l -го яруса, а сомножитель G_M есть перестановочная матрица, которая производит перевод выходных ребер l -го яруса во входные ребра $(l+1)$ -го яруса. Применяя к матрице (23) стандартную марковскую процедуру перечисления, приходим к (22).

4. Сотовая решетка на цилиндре

Как видно из доказательства теорем 1 и 2, центральным моментом в разработке матричного аппарата для двумерных решеток является матричное описание топологии решетки. Наиболее удобной в этом смысле представляется техника, указанная в теореме 2. Покажем, что она легко переносится на решетку с сотовой топологией, то есть на решетку, ячейки которой состоят из правильных шестиугольников. Чтобы получить такую решетку, надо в описанной выше цилиндрической решетке каждый узел заменить на пару узлов, соединенных вертикальным ребром, в результате чего все квадратные ячейки превращаются в шестигранные. Такую конструкцию будем называть сотовой $L \times M$ решеткой на цилиндре; она состоит из $2LM$ узлов и $(3L+1)M$ ребер. В каждом узле сотовой решетки сходятся три ребра; объявляя два из них входными, а третье выходным, будем описывать взаимодействие в узле $(0, 1)$ -матрицей размера 4×2

$$H = (h_{i_1 i_2 i_3}). \quad (24)$$

Пусть

$$\Theta(L, M, H) \quad (25)$$

— поле, порождаемое на сотовой цилиндрической $L \times M$ решетке с взаимодействием (24).

Теорема 3. Число событий в поле (25) равно

$$|\Theta(L, M, H)| = |\Psi(L, M, T)|,$$

где

$$T = HH^T, \quad (26)$$

а величина

$$|\Psi(L, M, T)| = \|(T^{[M]}G_M)^L\| \quad (27)$$

получается формальной заменой в правой части (23) матрицы B на матрицу (26).

Доказательство следует из того замечания, что в сотовой решетке два узла, имеющих общее выходное ребро, можно рассматривать как один узел прямоугольной решетки, две пары ребер которого взаимодействуют согласно матрице (26).

5. Экспоненциальные границы

Рассмотрим теперь вопрос о поведении выражений (9), (22) и (27) при растущих линейных размерах решетки L и M . Эта сторона проблемы перечисления представляет определенный интерес с точки зрения ее приложений к задачам статистической механики и информатики.

Если потребовать, чтобы взаимодействие в узле удовлетворяло некоторым условиям симметричности, то размерность указанных выражений можно понизить на единицу.

Будем обозначать $r(A)$ наибольшее собственное число неотрицательной матрицы A .

Начнем с плоской модификации. Из теоремы 1 вытекают два следствия.

Следствие 1. Если блочное представление (8) матрицы взаимодействия B таково, что

$$B_{ij} = B_{ij}^T, \quad (i, j) \in \{0, 1\}^2, \quad (28)$$

то

$$r^M(C_L) \leq |\Phi(L, M, B)| \leq 2^L r^M(C_L), \quad (29)$$

где $2^L \times 2^L$ матрица C_L определена формулой (10).

Следствие 2. Если блочное представление (8) матрицы взаимодействия B таково, что

$$B_{ij} = B_{ji}, \quad (i, j) \in \{0, 1\}^2, \quad (30)$$

то

$$r^L(F_M) \leq |\Phi(L, M, B)| \leq 2^M r^L(F_M), \quad (31)$$

где $2^M \times 2^M$ матрица F_M определена формулой (18).

В (29) и (31) нижние границы следуют из общего замечания [4], что

$$r(A) \leq \|A\|, \quad A \geq 0. \quad (32)$$

Чтобы доказать справедливость верхних границ, заметим, что в силу условий (28) и (30) соответствующие матрицы C_L и F_M симметрические; их степени C_L^M и F_M^L — также симметрические матрицы, поэтому верхние границы в (29) и (31) следуют из того, что

$$\|Q\| \leq Nr(Q) \quad (33)$$

для всякой симметрической матрицы $Q \geq 0$ размера $N \times N$.

Перейдем к цилиндрической модификации и рассмотрим экспоненциальное поведение величины (22). В силу (32) ее нижней границей служит величина $r^L(W_M)$. Далее, так как матрица (23) в силу перестановки столбцов, производимой матрицей G_M в матрице $B^{[M]}$, оказывается, вообще говоря, несимметрической, мы не можем применять неравенство (33) для получения верхней границы. Поэтому наиболее общий результат, вытекающий из теоремы 2, можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Следствие 3. Если матрица взаимодействия B такова, что матрица (21) имеет положительное наибольшее собственное число

$$r(W_M) > 0, \quad (34)$$

которому соответствует положительный собственный вектор

$$Z(W_M) > 0, \quad (35)$$

то

$$r^L(W_M) \leq |\Psi(L, M, B)| \leq r^L(W_M) \zeta(W_M) 16^M, \quad (36)$$

где $\zeta(W_M)$ означает отношение максимальной компоненты вектора (35) к его минимальной компоненте.

Анализ условий, при которых требования (34) и (35) выполняются, сводится к представлению матрицы (23) в блочной ниже-треугольной форме [5] и требует отдельного рассмотрения; таким образом, вопрос об экспоненциальном поведении верхней границы в (36) остается открытым.

Следствие 4. Если матрица взаимодействия B симметрическая, то

$$|\Psi(L, M, B)| \leq 4^M r^{ML}(B). \quad (37)$$

Доказательство. Доказательство основано на следующем замечании. Хотя симметричность матрицы B в общем случае не обеспечивает симметричности матрицы (23), последнюю легко дополнить до симметрической матрицы, домножив ее слева на G_M , что не меняет норму матрицы; тогда применяя неравенство (33), находим, что

$$\begin{aligned} |\Psi(L, M, B)| &= \|(B^{[M]} G_M)^L\| = \|G_M (B^{[M]} G_M)^L\| \\ &\leq 4^M r^{L+1}(G_M) r^L(B^{[M]}) = 4^M r^L(B^{[M]}) = 4^M r^{ML}(B). \end{aligned}$$

Отметим класс взаимодействий, для которых удастся найти точное выражение мощности цилиндрического поля. Будем называть $(0, 1)$ -матрицу B β -равновесной и обозначать ее B_β , если все ее строчные суммы равны β , $\beta = 1, 2, 3, 4$.

Следствие 5. Для всякой β -равновесной матрицы взаимодействия B_β

$$|\Psi(L, M, B_\beta)| = 2^M \beta^{LM}. \quad (38)$$

Действительно, в этом случае матрица (23) является β^M -равновесной, поэтому ее можно представить в виде

$$W_M = \beta^M P_M, \quad (39)$$

где P_M — стохастическая $2^M \times 2^M$ матрица. Подставляя (39) в (22), получаем (38).

Определим величину

$$R(B) = \liminf_{L, M \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \Psi(L, M, B)}{2(L+1)M}$$

как информационную скорость (в битах на ребро) двоичного цилиндрического поля, порождаемого взаимодействием B . (В статистической механике эта величина определяется как свободная энергия поля). Тогда из (37) следует, что для всякой симметрической матрицы B

$$R(B) \leq \frac{1}{2} \log_2 r(B), \quad (40)$$

а из (38) следует, что для всякой β -равновесной матрицы B_β

$$R(B_\beta) = \frac{1}{2} \log_2 \beta. \quad (41)$$

Аналогичные результаты можно получить и для сотового поля (25), определив его информационную скорость как

$$R(H) = \liminf_{L, M \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \Psi(L, M, T)}{3(L+1)M},$$

где матрица T указана в (26). Заметим, что матрица T симметрическая, поэтому из (41) следует, что

$$R(H) \leq \frac{1}{3} \log_2 r(T) \quad (42)$$

для всякой $(0, 1)$ -матрицы размера 4×2 .

6. Изотропные модели, примеры

Будем называть матрицу взаимодействия (3) изотропной, если

$$b_{i_1 i_2 i_3 i_4} = b_{i_4 i_1 i_2 i_3}, \quad (i_1, i_2, i_3, i_4) \in \{0, 1\}^4. \quad (43)$$

Циклический сдвиг индексов в (43) порождает в $\{0, \dots, 15\}$ перестановку, распадающуюся на 6 циклов. Так как все элементы (43), принадлежащие одному циклу, равны между собой, всякая изотропная матрица B_{is} имеет вид

$$B_{is} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \gamma & \mu \\ \beta & \gamma & \delta & \mu \\ \gamma & \mu & \mu & \nu \end{pmatrix}, \quad \alpha, \dots, \nu \in \{0, 1\}.$$

Таким образом, существует всего 2^6 изотропных $(0, 1)$ -матриц размера 4×4 ; три из них пользуются особой популярностью в задачах статистической физики и информатики [1, 2, 3, 7]:

в димерной модели параметры матрицы $B_{is} = B_D$ принимают значения $\alpha = \gamma = \delta = \mu = \nu = 0, \beta = 1$,

в модели Изинга параметры матрицы $B_{is} = B_I$ принимают значения $\beta = \mu = 0, \alpha = \delta = \gamma = \nu = 1$,

в модели Поттса параметры матрицы $B_{is} = B_P$ принимают значения $\beta = 0, \alpha = \gamma = \delta = \mu = \nu = 1$.

В [3] доказано, что $R(B_D) = 0,2103$. Так как матрица B_I является 2-равновесной, из (41) следует, что $R(B_I) = 1/2$. Для модели Поттса из (40) находим верхнюю границу

$$R(B_P) \leq \frac{1}{2} \log_2 r(B_P) = \frac{1}{2} \log_2 3,1700 = 0,8322.$$

Модель Поттса порождает поле, реализации которого имеют вид контурных изображений, нанесенных на прямоугольную решетку. Для этой модели в [6] развит аппарат, основанный на теории чисел Фибоначчи, и получена нижняя граница

$$R(B_P) \geq 0,694. \quad (44)$$

Легко убедиться, что на сотовой решетке существует 2^4 изотропных полей; в частности, поле контурных изображений, аналогичное поттсовскому, возникает при

$$H = H_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, согласно (26)

$$T_P = H_P H_P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Подставляя (45) в (42), находим, что информационная скорость контурного поля на сотовой решетке

$$R(H_P) \leq \frac{1}{3} \log_2 r(T_P) = \frac{1}{3} \log_2 3,5468 = 0,6088. \quad (46)$$

Сравнивая верхнюю границу (46) с нижней границей (44), заключаем, что сотовая решетка, как носитель контурных изображений, более избыточна, чем прямоугольная.

В заключение среди открытых вопросов отметим вопрос, связанный с инвариантностью величины (9) (или (17)) по отношению к перестановке параметров L и M , упомянутый в конце параграфа 2. Очевидно, что для выполнения равенства

$$|\Phi(L, M, B)| = |\Phi(M, L, B)|$$

достаточно потребовать, чтобы взаимодействие B было изотропным. Доказательство необходимости этого условия представляется более трудной задачей.

Список литературы

1. Монтролл Е. В. Статистика решеток. В кн.: *Прикладная комбинаторная математика*. Мир, Москва, 1968, с. 9–60.
2. Montroll E. W., Potts R. B. Effect of defects on lattice vibrations. *Phys. Rev.* (1955) **100**, 525–543.
3. Минк Х. *Перманенты*. Мир, Москва, 1982.
4. Ланкастер Р. *Теория матриц*. Наука, Москва, 1978.
5. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Наука, Москва, 1967.
6. Стасевич С. И. Число форм для двумерных изображений, *Пробл. передачи информ.*, (1994) **30**, №4, 90–94.
7. Харари Ф., Палмер Э. *Перечисление графов*. Мир, Москва, 1977.

Статья поступила 20.12.1996.