Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, A -замкнутые классы многозначной логики, содержащие константы, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 10–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:04:00

A-замкнутые классы многозначной логики, содержащие константы

© 1998 г. С. С. Марченков

A-замыкание на множестве P_k функций k -значной логики определяется как замыкание относительно операций суперпозиции и перехода к двойственным функциям для четных подстановок на множестве $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. При любом k , $k \geq 4$, описываются все A-замкнутые классы из P_k , содержащие константы. В качестве следствия получается описание всех A-замкнутых классов, содержащихся в классе Слупецкого, а также A-классификация симметрической полугруппы отображений множества E_k в себя.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00089.

1. Введение

В вопросах классификации функций многозначной логики наибольшее развитие получило направление, в котором классификации проводятся на основе операции суперпозиции и некоторых других близких операций. Ярким достижением этого направления явилась счетная классификация булевых функций, выполненная Постом [1–3] в 1921–1941 гг. Вместе с тем, как обнаружили Ю. И. Янов и А. А. Мучник [4], непосредственное обобщение результатов Поста на функции k -значной логики ($k \geq 3$) невозможно: оно приводит к неэффективным непрерывным классификациям.

В конце 70-х–начале 80-х годов появились результаты [5–9], которые дали основание предполагать, что эффективные (быть может, даже конечные) и нетривиальные классификации множеств P_k функций k -значной логики можно получить, если наряду с операцией суперпозиции рассматривать операции перехода к двойственным функциям для подстановок из достаточно большой группы G (G -классификации). Эта идея для полной симметрической группы S_k была детально проработана Нгуен Ван Хоа [10–12] и автором [13–16]. Соответствующая классификация в [13, 14] была названа S -классификацией.

Оказалось, что S -классификация множества P_k при любом k , $k \geq 3$, является конечной классификацией, число S -замкнутых классов в которой зависит от k сверхэкспоненциальным образом. Каждый S -замкнутый класс имеет конечный базис по суперпозиции и (при наличии в нем селекторных функций) может быть определен как класс сохранения конечного набора отношений.

Дальнейшие исследования [15, 17, 18] по G -классификациям установили принципиальную возможность построения подобных конечных классификаций для менее широких групп G , которые удовлетворяют некоторым ограничениям на степень транзитивности. Вместе с тем опыт построения S -классификации показал, что в силу значительности объема сопутствующих построению определений, выкладок и доказательств провести в полной мере G -классификацию множеств P_k возможно еще, по-видимому, только для знакопеременных подгрупп A_k групп S_k . G -классификацию множества P_k при $G = A_k$ мы называем A -классификацией.

Из [19] следует, что A -классификация множества P_3 континуальна. В [15, 18] доказано, что при любом k , $k \geq 5$, единственными A -предполными классами в P_k являются класс I_k идемпотентных функций и класс SLP_k Слупецкого. При $k = 4$ к этим двум классам необходимо добавить класс K_4 функций, самодвойственных относительно подстановок из четверной группы Клейна, и класс L_4 линейных функций (обычно [20] этот класс называют классом квазилинейных функций, однако для нас в данной работе более важным будет другое понятие квазилинейности [21]). Кроме того, в [15] установлено, что класс K_4 имеет ровно два A -предполных класса, $K_4 \cap I_4$ и $K_4 \cap L_4$.

Таким образом, дальнейшее построение A -классификации множеств P_k , $k \geq 4$, можно разбить на три части: описание A -замкнутых классов из I_k , из SLP_k и из L_4 . Аналогичные исследования, проведенные для S -классификации, позволяют высказать предположение, что наиболее простой должна быть третья часть построения, а наиболее сложной, как в идейном, так и в техническом плане, первая.

Цель настоящей работы — дать описание всех A -замкнутых классов, содержащих константы. По аналогии с S -классификацией эти классы должны составлять наиболее массивное (по числу элементов) множество в A -классификации. Кроме того, привлечение небольших дополнительных сведений из теории групп позволяет получить описание всех A -замкнутых классов, лежащих в SLP_k , а также дать A -классификацию симметрической полугруппы отображений k -элементного множества в себя. Тем самым будет построена “половина” A -классификации множеств P_k .

2. Основные понятия

Пусть $k \geq 3$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k — множество всех функций k -значной логики, т.е. функций, отображающих декартовы степени множества E_k в множество E_k . На множестве P_k обычным образом определяется операция суперпозиции [22, 23]. Если $M \subseteq P_k$, то через $[M]$ обозначается замыкание множества M относительно операции суперпозиции. Множества вида $[M]$ называются замкнутыми классами.

Через S_k обозначаем полную симметрическую группу подстановок на E_k , а через A_k , e_k и V_4 — соответственно знакопеременную и единичную подгруппы в S_k и четверную группу Клейна. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и $\pi \in S_k$, то функцию $\pi^{-1}(f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)))$ называем двойственной к функции f и обозначаем через f^π . Если $M \subseteq P_k$ и G — подгруппа группы S_k , то G -замыканием множества M (обозначение $[M]_G$) называем замыкание множества M относительно операций суперпозиции и перехода к двойственным функциям для подстановок из группы G . Если $G = S_k$, то G -замыкание называем также S -замыканием, а если $G = A_k$, то A -замыканием.

Если $f \in P_k$, то через $\text{Im } f$ обозначаем область значений функции f . Пусть

$M \subseteq P_k$, n — натуральное число и $1 \leq m \leq k$. Через M^n обозначаем множество всех n -местных функций из M , а через $M^{(m)}$ множество всех функций f из M , для которых $|\text{Im } f| \leq m$, где $|N|$ — число элементов множества N . Пусть $M^{n(m)} = M^n \cap M^{(m)}$. В частности, $P_k^{(k)} = P_k$ и $P_k^{1(k)}$ есть множество всех одноместных функций из P_k . Множество $P_k^{1(k)}$, рассматриваемое вместе с бинарной операцией композиции (суперпозиции), носит название симметрической полугруппы отображений на E_k .

Пусть $1 \leq m \leq k$. Подполугруппа F полугруппы $P_k^{1(k)}$ называется m -транзитивной, если для любых m попарно различных элементов $a_1, \dots, a_m$ из E_k и любых m (не обязательно различных) элементов $b_1, \dots, b_m$ из E_k в полугруппе F найдется такая функция f , что $f(a_i) = b_i$ для всех i , $1 \leq i \leq m$.

Пусть $k_1, k_2, \dots, k_r$ — такие натуральные числа, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$ и $k = k_1 + \dots + k_r$. Следуя [11], называем набор $(k_1, \dots, k_r)$ разбиением числа k , а число r рангом разбиения. На множестве всех разбиений числа k вводим отношение $\preceq$ частичного порядка: для любых двух разбиений

$$\lambda_1(k) = (k_1^1, \dots, k_r^1), \quad \lambda_2(k) = (k_1^2, \dots, k_s^2)$$

отношение $\lambda_1(k) \preceq \lambda_2(k)$ выполняется тогда и только тогда, когда существует разбиение $(N_1, \dots, N_r)$ множества $\{1, 2, \dots, s\}$ на непустые попарно не пересекающиеся подмножества такое, что при $1 \leq i \leq r$

$$k_i^1 = \sum_{j \in N_i} k_j^2.$$

Пусть $f \in P_k^{1(k)}$ и $\text{Im } f = \{b_1, \dots, b_m\}$, где $|f^{-1}(b_1)| \geq \dots \geq |f^{-1}(b_m)|$. Набор $(|f^{-1}(b_1)|, \dots, |f^{-1}(b_m)|)$ является разбиением числа k и обозначается через $\lambda^f(k)$. Множества $f^{-1}(b_1), \dots, f^{-1}(b_m)$ называются блоками функции f . Разбиение называется единичным, если каждый блок состоит из одного элемента. В дальнейшем рассматриваются только неединичные разбиения.

Для произвольного разбиения $\lambda(k)$ пусть $H(\lambda(k))$ (соответственно $H_0(\lambda(k))$) обозначает множество всех таких функций f из $P_k^{1(k)}$, что $\lambda^f(k) = \lambda(k)$ (соответственно $\lambda^f(k) = \lambda(k)$ и $f(b) = b$ для любого b из $\text{Im } f$).

Если $\lambda(k)$ — разбиение числа k , то пусть

$$F\langle \lambda(k) \rangle = \{f: \lambda^f(k) \preceq \lambda(k)\}.$$

Если $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ — разбиения числа k , то полагаем

$$F\langle \lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k) \rangle = F\langle \lambda_1(k) \rangle \cup \dots \cup F\langle \lambda_s(k) \rangle.$$

Если $f \in H(\lambda(k))$ и $g \in P_k^1$, то $\lambda^{gf}(k) \preceq \lambda^f(k)$ и потому $gf \in F\langle \lambda(k) \rangle$. Кроме того, множество $F\langle \lambda(k) \rangle$ очевидным образом замкнуто относительно перехода к двойственным функциям. Отсюда следует, что для любых разбиений $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ множество $F\langle \lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k) \rangle$ является S - и A -замкнутым.

3. A -классификация симметрической полугруппы $P_k^{1(k)}$

Лемма 1. Пусть $k \geq 3$, $f_1, f_2 \in P_k^{1(k-1)}$, $\lambda^{f_1}(k) = \lambda^{f_2}(k)$ и для любого a из $\text{Im } f_i$ выполняется равенство $f_i(a) = a$, $i = 1, 2$. Тогда $[\{f_1\}]_A = [\{f_2\}]_A$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} \text{Im } f_1 &= \{a_1, \dots, a_p\}, & \text{Im } f_2 &= \{b_1, \dots, b_p\}, \\ M_j &= f_1^{-1}(a_j), & N_j &= f_2^{-1}(b_j), & 1 \leq j \leq p, \\ |M_1| &\geq \dots \geq |M_p|, & |N_1| &\geq \dots \geq |N_p|. \end{aligned}$$

Определим подстановку π из S_k условиями

$$\pi(N_j) = M_j, \quad \pi(b_j) = a_j, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Тогда $f_2 = f_1^\pi$. Поэтому если подстановка π четна, то $f_2 \in \{f_1\}_A$.

Предположим, что π нечетна. Если $|N_1| \geq 3$, то выберем в множестве N_1 элементы c, d , отличные от b_1 , и заменим нечетную подстановку π четной подстановкой π_1 , где

$$\pi_1(c) = \pi(d), \quad \pi_1(d) = \pi(c), \quad \pi_1(b) = \pi(b), \quad b \in E_k \setminus \{c, d\}.$$

Для подстановки π_1 также будет иметь место равенство $f_2 = f_1^{\pi_1}$.

Если π нечетна и $|N_{p-1}| = |N_p| = 1$, то π можно заменить четной подстановкой π_2 , где

$$\pi_2(b_{p-1}) = a_p, \quad \pi_2(b_p) = a_{p-1}, \quad \pi_2(b) = b, \quad b \in E_k \setminus \{b_{p-1}, b_p\}.$$

Вновь будем иметь $f_2 = f_1^{\pi_2}$.

Пусть π нечетна, $|N_1| = \dots = |N_{p-1}| = 2$ и $p \geq 3$. Если $N_1 = \{b_1, c_1\}$, то рассмотрим такую четную подстановку π_3 , что

$$\pi_3(b_1) = \pi(c_1), \quad \pi_3(c_1) = \pi(b_1), \quad \pi_3(b) = \pi(b), \quad b \in E_k \setminus \{b_1, c_1\},$$

и положим $f_3 = f_1^{\pi_3}$. Функция f_3 отличается от функции f_1^π только тем, что на множестве N_1 принимает значение c_1 , а не значение b_1 . Определим далее четную подстановку π_4 с цикловым разложением $(b_1 c_1)(b_2 b_3)$ (остальные циклы разложения одноэлементны). Тогда будем иметь $f_2 = f_3^{\pi_4} f_3$.

Остается рассмотреть случай, когда $k = 4$ и $|N_1| = |N_2| = 2$. Пусть для определенности $a_1 = 0, a_2 = 2, M_1 = \{0, 1\}, M_2 = \{2, 3\}$. Обозначим через g_1, g_2 функции, двойственные к f_1 относительно четных подстановок $(0)(123)$ и $(012)(3)$ (см. рис. 1). Положим $g_3 = g_2 g_1 f_1$ и $f_4 = g_3 f_1 g_3$. Замечаем, что $f_4 = f_1^{\pi_5}$, где π_5 — транспозиция элементов 0, 1. Поэтому если π — нечетная подстановка, то функцию f_1^π можно получить в виде f_4^σ , где σ — такая четная подстановка, что $\pi = \pi_5 \sigma$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $k \geq 3$, $\lambda(k)$ — неединичное разбиение числа k . Тогда

$$[H(\lambda(k))] = [H_0(\lambda(k))].$$

Доказательство. Включение $[H_0(\lambda(k))] \subseteq [H(\lambda(k))]$ выполняется по определению. Установим обратное включение. Пусть

$$f \in H(\lambda(k)), \quad \text{Im } f = \{a_1, \dots, a_p\}, \quad M_i = f^{-1}(a_i), \quad i = 1, \dots, p.$$

Выберем в множестве $H_0(\lambda(k))$ такую функцию g , что она принимает p значений и постоянна на каждом из множеств $M_1, \dots, M_p$. Пусть $b_1 = g(M_1), \dots, b_p = g(M_p)$. Считая, что $g \neq f$, предположим по индукции, что

$$b_1 = a_1, \dots, b_j = a_j, b_{j+1} \neq a_{j+1}, \quad 0 \leq j < p.$$

Рис. 1.

Далее рассмотрим две возможности.

Пусть $a_{j+1} \notin \text{Im } g$. Пользуясь тем, что $p < k$, найдем в множестве $H_0(\lambda(k))$ такую функцию h , что $h(b_{j+1}) = h(a_{j+1}) = a_{j+1}$ и $h(b_l) = b_l$ для всех $l, l \neq j+1$. Полагая $g_1 = hg$, получаем, что $g_1(M_l) = f(M_l)$ при $1 \leq l \leq j+1$ и $g_1(M_l) = g(M_l)$ при $j+1 < l \leq p$. Таким образом, функция g_1 совпадает с функцией f на множествах $M_1, \dots, M_{j+1}$.

Предположим, что $a_{j+1} \in \text{Im } g$ и, например, $b_p = g(M_p) = a_{j+1}$. Обозначим через c какой-либо элемент из $E_k \setminus \text{Im } g$. Выберем в множестве $H_0(\lambda(k))$ такую функцию h , что $h(b_p) = h(c) = c$ и $h(b_l) = b_l$ при $1 \leq l < p$. Тогда функция hg возвращает нас к рассмотренной первой возможности. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $k \geq 3$, $\lambda(k)$, $\lambda'(k)$ — такие неединичные разбиения числа k , что $\lambda'(k) \preceq \lambda(k)$. Тогда

$$H(\lambda'(k)) \subseteq [H(\lambda(k))]_A.$$

Доказательство. Пусть

$$f \in H(\lambda(k)), \quad \text{Im } f = \{a_1, \dots, a_p\}, \quad p \geq 2, \quad M_i = f^{-1}(a_i), \quad i = 1, \dots, p.$$

Покажем, как из функции f получить некоторую функцию g , у которой блоками являются, например, множества $M_1 \cup M_2, M_3, \dots, M_p$. С этой целью выберем в множестве $H(\lambda(k))$ такую функцию f_1 , что $f_1(a_1) = a_2$ и $f_1(a_i) = a_i$ при $2 \leq i \leq p$. Это сделать можно, поскольку $p < k$. Полагаем $g = f_1 f$. Далее применяем леммы 1 и 2. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $k \geq 3$, $f \in P_k^{1(k-1)}$. Тогда

$$[\{f\}]_A = \{g: g \in P_k^{1(k-1)}, \lambda^g(k) \preceq \lambda^f(k)\}.$$

Доказательство. Следует воспользоваться леммами 1–3 и заметить, что в $[\{f\}]_A$ входят лишь такие функции g , для которых $\lambda^g(k) \preceq \lambda^f(k)$.

Из леммы 4 и А-замкнутости классов вида $F\langle\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)\rangle$ вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. При любом k , $k \geq 3$, любой А-замкнутый класс функций из $P_k^{1(k-1)}$ можно представить в виде $F\langle\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)\rangle$, где разбиения $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ попарно не сравнимы в смысле отношения $\preceq$; указанное представление единственно с точностью до перестановки разбиений в последовательности $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$.

Известно (см., например, [24]), что уравнение $G^{A_k} = G$, где G — подгруппа группы S_k , имеет лишь решения e_k , A_k , S_k и (при $k = 4$) V_4 . Иными словами, всякий А-замкнутый класс функций из S_k совпадает с одним из классов e_k , A_k , S_k или V_4 . Кроме того, если $f \in P_k^{1(k-1)}$ и $g \in S_k$, то $\lambda^{fg}(k) = \lambda^g f(k) = \lambda^f(k)$. Поэтому, используя теорему 1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2 (А-классификация симметрической полугруппы $P_k^{1(k)}$). При любом k , $k \geq 3$, любой А-замкнутый класс функций из $P_k^{1(k)}$ либо совпадает с одной из групп e_k , A_k , S_k или V_4 , либо представим в виде $F\langle\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)\rangle \cup G$, где разбиения $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ попарно не сравнимы в смысле отношения $\preceq$ и $G \in \{\emptyset, e_k, A_k, S_k, V_4\}$.

4. Класс Слупецкого

Лемма 5. Пусть $k \geq 3$, $f \in P_k^{1(k-1)}$ и $|\text{Im } f| \geq 2$. Тогда $[\{f\}]_A$ содержит 2-транзитивную подполугруппу полугруппы $P_k^{1(2)}$.

Доказательство. Положим $g_1(x) = f(x, \dots, x)$. Так как $g_1 \in P_k^{1(k-1)}$, согласно лемме 4 множество $[\{g_1\}]_A$ содержит все функции h , для которых $\lambda^h(k) \preceq \lambda^{g_1}(k)$. В частности, множеству $[\{g_1\}]_A$ принадлежат все функции-константы.

Из условия $|\text{Im } f| \geq 2$ следует, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит по крайней мере от одной переменной. Пусть это будет, например, переменная x_1 . Тогда можно выбрать такие константы $c_2, \dots, c_n$, что функция $g_2(x) = f(x, c_2, \dots, c_n)$ принимает не менее двух значений (в случае $n = 1$ полагаем $g_2(x) = f(x)$). В силу леммы 4 множеству $[\{g_2\}]_A$ принадлежат все функции h такие, что $\lambda^h(k) \preceq \lambda^{g_2}(k)$. В частности, так как $|\text{Im } g_2| \geq 2$, все указанные функции h , принимающие не более двух значений, образуют 2-транзитивную подполугруппу полугруппы $P_k^{1(2)}$. Лемма доказана.

Назовем функцию существенной, если она существенно зависит по крайней мере от двух переменных.

Лемма 6. Пусть $3 \leq l \leq k - 1$, $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная функция из $P_k^{1(k-1)}$, принимающая l значений. Тогда $[\{f\}]_A = P_k^{1(l)}$.

Доказательство. Докажем вначале по индукции, что $[\{f\}]_A$ содержит l -транзитивную подполугруппу полугруппы $P_k^{1(l)}$. Возьмем в качестве базиса индукции утверждение леммы 5 и предположим, что уже установлена принадлежность множеству $[\{f\}]_A$ некоторой m -транзитивной подполугруппы F полугруппы $P_k^{1(m)}$, где

$2 \leq m < l$. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_1 . Согласно известной лемме о существенной функции (см. [23], лемма 4 из §4) найдутся такие $m + 1$ наборов $(a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1), (a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2), (a_1^3, a_2^3, \dots, a_n^3), (a_1^4, a_2^4, \dots, a_n^4), \dots, (a_1^{m+1}, a_2^{m+1}, \dots, a_n^{m+1})$, что функция f принимает на них $m + 1$ значений. Так как последовательность $(a_1^1, a_2^1, a_1^1, a_1^4, \dots, a_1^{m+1})$ содержит не более m различных значений, согласно лемме 4 в множество $[F]_A$ входит такая функция $f_1(x)$, которая при $x = 0, 1, \dots, m$ принимает соответственно значения $a_1^1, a_2^1, a_1^1, a_1^4, \dots, a_1^{m+1}$. Аналогичным образом устанавливаем, что в $[F]_A$ имеются такие функции $f_2, \dots, f_n$, которые в точках $0, 1, \dots, m$ принимают соответствующие значения из последовательностей $(a_2^1, a_2^2, a_2^3, \dots, a_2^{m+1}), \dots, (a_n^1, a_n^2, a_n^3, \dots, a_n^{m+1})$. Следовательно, если определить $g(x) = f(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, то функция g на множестве $\{0, 1, \dots, m\}$ примет $m + 1$ значений. Так как $g \in P_k^{1(k-1)}$, в силу леммы 4 множество $\{[g]\}_A$ будет содержать некоторую $(m + 1)$ -транзитивную подполугруппу полугруппы $P_k^{1(m+1)}$.

Если, как и выше, выбрать l наборов $(a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1), (a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2), (a_1^3, a_2^3, \dots, a_n^3), (a_1^4, a_2^4, \dots, a_n^4), \dots, (a_1^l, a_2^l, \dots, a_n^l)$, на которых функция f принимает l различных значений $b_1, \dots, b_l$, то можно применить теорему 4.4.1 из [25]. Согласно этой теореме множество $\{[f]\}_A$ будет содержать, в частности, все функции из P_k , принимающие значения в множестве $\{b_1, \dots, b_l\}$. Поскольку множество $\{[f]\}_A$ содержит также l -транзитивную подполугруппу полугруппы $P_k^{1(l)}$, приходим к соотношению $P_k^{(l)} \subseteq \{[f]\}_A$. Вместе с тем очевидно, что $\{[f]\}_A \subseteq P_k^{(l)}$. Лемма доказана.

Пусть $n \geq 2$. Квадратом называется любая четверка наборов вида

$$\begin{aligned} &(a_1, \dots, a_{i-1}, b_1, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, c_1, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ &(a_1, \dots, a_{i-1}, b_1, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, c_2, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ &(a_1, \dots, a_{i-1}, b_2, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, c_1, a_{j+1}, \dots, a_n), \\ &(a_1, \dots, a_{i-1}, b_2, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, c_2, a_{j+1}, \dots, a_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где $b_1 \neq b_2, c_1 \neq c_2$.

Лемма 7. Пусть $k \geq 3$, $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная функция из P_k , принимающая два значения, и существует квадрат, на котором функция f принимает оба значения, причем одно из них в одной точке. Тогда $\{[f]\}_A = P_k^{(2)}$.

Доказательство. По леммам 4 и 5 множество $\{[f]\}_A$ содержит все константы. Считая, что квадрат из условия леммы имеет вид (1), подставим в функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ на места переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ соответственно константы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$. Полученную функцию обозначим через $f_1(x_i, x_j)$. Функция f_1 принимает на квадрате $\{b_1, b_2\} \times \{c_1, c_2\}$ два значения, причем одно из них в одной точке. Поскольку в силу леммы 5 в $\{[f]\}_A$ содержится 2-транзитивная подполугруппа F полугруппы $P_k^{1(2)}$, можно считать, что

$$\text{Im } f = \{b_1, b_2\} = \{c_1, c_2\} = \{0, 1\}, \quad f_1(0, 0) = 1, \quad f_1(0, 1) = f_1(1, 0) = f_1(1, 1) = 0.$$

Тогда ограничение функции f_1 на множество $\{0, 1\}$ совпадает с функцией $\bar{x}_i \bar{x}_j$, которая является шэфферовой функцией в P_2 .

Покажем, что в $\{\{f\}\}_A$ входят все функции g_a из $P_k^{1(2)}$ такие, что $g_a(a) = 1$ и $g_a(x) = 0$ при $x \neq a$, $a = 0, 1, \dots, k-1$. Зафиксируем значение a и, пользуясь 2-транзитивностью полугруппы F , выберем в ней такую функцию h , что $h(a) = 1$ и $\text{Im } h = \{0, 1\}$. Если $h(x) = 0$ для всех $x, x \neq a$, то $g_a = h$. В противном случае пусть b, c — такие элементы из E_k , что $b \neq a$, $h(b) = 1$ и $h(c) = 0$. Обозначим через h_1 функцию, двойственную к h относительно четной подстановки $\pi = (abc)$ (остальные циклы в цикловом разложении подстановки π одноэлементны). Если $d = \pi^{-1}(1)$, $e = \pi^{-1}(0)$, то $h_1(a) = h_1(c) = d$ и $h_1(b) = e$. Поскольку мы имеем в распоряжении 2-транзитивную полугруппу F , можно считать, что $d = 1$ и $e = 0$. Пользуясь шефферовостью ограничения f_1 на множество $\{0, 1\}$, выберем в множестве $\{\{f_1\}\}$ такую функцию $f_2(x, y)$, чтобы ее ограничение на множество $\{0, 1\}$ совпадало с булевой функцией xy . Полагая $h_2(x) = f_2(h(x), h_1(x))$, видим, что $h_2(a) = 1$, $h_2(b) = h_2(c) = 0$ и $h_2(x) \leq h(x)$ при $x \notin \{a, b, c\}$. Таким образом, $h_2(a) = 1$ и множество $h_2^{-1}(1)$ содержит по крайней мере на один элемент меньше, чем множество $h^{-1}(1)$. Если $h_2 \neq g_a$, то продолжим этот процесс далее. В итоге получим функцию g_a .

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что всякую функцию $g(x_1, \dots, x_m)$ из $P_k^{(2)}$, отличную от константы 0 и принимающую значения 0, 1, можно представить в виде аналога совершенной дизъюнктивной нормальной формы,

$$g(x_1, \dots, x_m) = \bigvee g_{a_1}(x_1) \& \dots \& g_{a_m}(x_m),$$

где через $\bigvee$ и $\&$ обозначены подходящие функции из $\{\{f_1\}\}$, ограничения которых на $\{0, 1\}$ являются соответствующими булевыми функциями дизъюнкции и конъюнкции.

Следуя [21], назовем функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k квазилинейной, если для всякого i , $1 \leq i \leq n$, и любых двух элементов a, b из E_k выполняется одно из двух условий: либо для любых $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ из E_k

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

либо для любых $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ из E_k

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Множество всех квазилинейных функций из P_k обозначим через QL_k , а множество $QL_k \cap P_k^{(2)}$ — через $QL_k^{(2)}$. Пользуясь определениями, убеждаемся в том, что множества QL_k и $QL_k^{(2)}$ являются *A-замкнутыми классами*.

Как установлено в [21], всякую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из QL_k можно представить в виде

$$f_0(f_1(x_1) \oplus \dots \oplus f_n(x_n)), \quad (2)$$

где $f_0, f_1, \dots, f_n \in P_k^1$, а $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2. Из представления (2) следует, что при $n \geq 2$ для функций $f_1, \dots, f_n$ можно считать выполненными равенства $\text{Im } f_1 = \dots = \text{Im } f_n = \{0, 1\}$. Отсюда легко выводится, что

$$QL_k^{(2)} = [P_k^{1(2)} \cup \{f_1(x) \oplus f_2(y)\}],$$

где $\text{Im } f_1 = \text{Im } f_2 = \{0, 1\}$ и ограничения функций f_1, f_2 на множество $\{0, 1\}$ являются тождественными функциями.

Дадим еще одно определение квазилинейной функции. Покажем, что QL_k совпадает с множеством T всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$ таких, что либо $n = 1$, либо $n \geq 2$ и функция f на любом квадрате принимает не более двух значений, причем в случае двух значений каждое из них принимается в двух точках. Включение $QL_k \subseteq T$ легко устанавливается, если воспользоваться представлением (2) для функций из класса QL_k . Обратно, пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in T$ и пусть функция f не удовлетворяет исходному определению квазилинейной функции. Полагая в нем для упрощения обозначений $i = 1$, находим, что существуют такие элементы a, b и наборы $(a_2, \dots, a_n), (b_2, \dots, b_n)$, что

$$f(a, a_2, \dots, a_n) \neq f(b, a_2, \dots, a_n), \quad f(a, b_2, \dots, b_n) = f(b, b_2, \dots, b_n).$$

Из этих соотношений следует, что наборы $(a_2, \dots, a_n), (b_2, \dots, b_n)$ различны. Пусть, например, $a_j = b_j$ при $j < m$ и $a_j \neq b_j$ при $m \leq j \leq n$. Рассматривая квадрат

$$\begin{array}{ll} (a, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, b_{m+1}, \dots, b_n), & (b, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, b_{m+1}, \dots, b_n), \\ (a, a_2, \dots, a_{m-1}, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n), & (b, a_2, \dots, a_{m-1}, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n) \end{array}$$

и используя равенство

$$f(a, a_2, \dots, a_{m-1}, b_m, \dots, b_n) = f(b, a_2, \dots, a_{m-1}, b_m, \dots, b_n),$$

закключаем, что должно выполняться также равенство

$$f(a, a_2, \dots, a_m, b_{m+1}, \dots, b_n) = f(b, a_2, \dots, a_m, b_{m+1}, \dots, b_n).$$

Далее аналогичным образом рассматриваем квадрат

$$\begin{array}{ll} (a, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n), & (b, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n), \\ (a, a_2, \dots, a_m, b_{m+1}, \dots, b_n), & (b, a_2, \dots, a_m, b_{m+1}, \dots, b_n) \end{array}$$

и получаем, что

$$f(a, a_2, \dots, a_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n) = f(b, a_2, \dots, a_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n).$$

В итоге приходим к противоречию:

$$f(a, a_2, \dots, a_n) = f(b, a_2, \dots, a_n).$$

Лемма 8. Пусть $k \geq 3$, $f(x_1, \dots, x_n)$ — квазилинейная существенная функция вида (2), причем для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, в разбиении $\lambda^{f_i}(k) = (k_1, k_2)$ числа k хотя бы одно из чисел k_1, k_2 нечетно. Тогда $[\{f\}]_A = QL_k^{(2)}$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменных x_1, x_2 и $\lambda^{f_i}(k) = (k_1, k_2)$, где одно из чисел k_1, k_2 нечетно. Согласно лемме 5 множество $[\{f\}]_A$ содержит 2-транзитивную подполугруппу T полугруппы $P_k^{(2)}$. Выберем в T такие функции h_0, h_1, h_2 , чтобы функция $h_0(f(h_1(x_1), h_2(x_2), 0, \dots, 0))$ имела представление вида $f'_1(x_1) \oplus f'_2(x_2)$,

где $\text{Im } f'_1 = \text{Im } f'_2 = \{0, 1\}$ и ограничения функций f'_1, f'_2 на множество $\{0, 1\}$ являлись тождественными функциями. Тогда, как отмечалось выше, для доказательства леммы достаточно лишь установить, что $P_k^{1(2)} \subseteq \{\{f\}\}_A$.

Положим $h_3(x) = f(x, 0, \dots, 0)$. Так как $h_3(x) = f_0(f_1(x) \oplus c)$, где $c = f_2(0) \oplus \dots \oplus f_n(0)$, то $\lambda^{h_3}(k) = (k_1, k_2)$. Имея в распоряжении полугруппу T , можно предполагать, что $\text{Im } h_3 = \{0, 1\}$. Пусть, например, $h_3^{-1}(1) = \{a_1, \dots, a_{k_1}\}$, $h_3^{-1}(0) = \{b_1, \dots, b_{k_2}\}$, где $k_1 + k_2 = k$ и k_1 нечетно. Покажем, как из функции h_3 получить такую функцию g , что $\text{Im } g = \{0, 1\}$ и g принимает значение 1 только в одной точке.

Если $k_1 = 1$, то в качестве g можно взять h_3 . Пусть $k_1 \geq 3$. Согласно лемме 4 в множество $\{\{h_3\}\}_A$ входит такая функция h_4 , что

$$\text{Im } h_4 = \{0, 1\}, \quad h_4^{-1}(1) = \{a_2, \dots, a_{k_1}, b_1\}, \quad h_4^{-1}(0) = \{a_1, b_2, \dots, b_{k_2}\}.$$

Положим $h_5(x) = f'_1(h_3(x)) \oplus f'_2(h_4(x))$. Тогда

$$\text{Im } h_5 = \{0, 1\}, \quad h_5^{-1}(1) = \{a_1, b_1\}, \quad h_5^{-1}(0) = \{a_2, \dots, a_{k_1}, b_2, \dots, b_{k_2}\}.$$

Выберем согласно лемме 4 в множестве $\{\{h_5\}\}_A$ такую функцию h_6 , что

$$\text{Im } h_6 = \{0, 1\}, \quad h_6^{-1}(1) = \{a_{k_1-1}, a_{k_1}\}, \quad h_6^{-1}(0) = \{a_1, \dots, a_{k_1-2}, b_1, \dots, b_{k_2}\}.$$

Определяя далее $h_7(x) = f'_1(h_3(x)) \oplus f'_2(h_6(x))$, видим, что функция h_7 принимает значение 1 только в точках $a_1, \dots, a_{k_1-2}$. Если $k_1 \neq 3$, то описанный процесс следует продолжить. В итоге получим функцию g .

В силу леммы 4 множество $\{\{g\}\}_A$ содержит функции $g_0, g_1, \dots, g_{k-1}$, такие, что $g_j(j) = 1$ и $g_j(x) = 0$ при $x \neq j$, $j = 0, 1, \dots, k-1$. Пусть теперь h — функция из $P_k^{1(2)}$, принимающая лишь значения 0, 1 и отличная от константы 0. Пусть $h^{-1}(1) = \{a_1, \dots, a_s\}$. Тогда

$$h(x) = g_{a_1}(x) \oplus \dots \oplus g_{a_s}(x).$$

Так как функции $g_0, \dots, g_{k-1}$ принимают лишь значения 0, 1, в качестве функции $\oplus$ в приведенном равенстве можно использовать функцию $f'_1(x) \oplus f'_2(y)$. Для завершения доказательства леммы остается еще раз обратиться к лемме 4.

Пусть k четно. Обозначим через $P_k^{1(2)+}$ множество всех таких функций f из $P_k^{1(2)}$, что либо f — константа, либо $\lambda^f(k) = (k_1, k_2)$, где оба числа k_1, k_2 четны. Пусть $QL_k^{(2)+}$ — множество всех таких функций $f(x_1, \dots, x_n)$ из $QL_k^{(2)}$, у которых в представлении (2) все функции $f_1, \dots, f_n$ принадлежат множеству $P_k^{1(2)+}$.

Нетрудно убедиться в том, что класс $QL_k^{(2)+}$ является А-замкнутым.

Лемма 9. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная функция из множества $QL_k^{(2)+}$. Тогда $\{\{f\}\}_A = QL_k^{(2)+}$.

Доказательство. Из определения класса $QL_k^{(2)+}$ следует, что $QL_k^{(2)+}$ порождается множеством $P_k^{1(2)+}$ и любой функцией (из класса $QL_k^{(2)+}$) вида $f'_1(x) \oplus f'_2(y)$, где $\text{Im } f'_1 = \text{Im } f'_2 = \{0, 1\}$ и ограничения функций f'_1, f'_2 на множество $\{0, 1\}$ являются тождественными функциями. Как и в лемме 8, из функции f получаем функции $f'_1(x) \oplus f'_2(y)$ и h_5 , где $\text{Im } h_5 = \{0, 1\}$ и функция h_5 принимает значение 1 только в

двух точках. Далее замечаем, что всякую функцию из $P_k^{1(2)+}$, принимающую лишь значения 0,1, можно получить путем сложения по модулю 2 (т.е. с помощью функции $f'_1(x) \oplus f'_2(y)$) подходящих функций из $[\{h_5\}]_A$, которые принимают значение 1 в двух точках. Лемма доказана.

Из лемм 6–9 и определений квазилинейных функций вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $k \geq 3$, f — существенная функция из $P_k^{(k-1)}$. Тогда $[\{f\}]_A$ совпадает с одним из классов $P_k^{(k-1)}, \dots, P_k^{(2)}, QL_k^{(2)}$ или (при четном k) $QL_k^{(2)+}$.

Класс SLP_k Слупецкого состоит из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, и всех функций, принимающих не более $k - 1$ значений.

Теорема 4. При любом k , $k \geq 3$, любой A -замкнутый класс функций из SLP_k совпадает с одним из следующих классов:

- (1) e_k, A_k, S_k или V_4 ;
- (2) $F\langle \lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k) \rangle$;
- (3) $F\langle \lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k) \rangle \cup G$;
- (4) $P_k^{(k-1)}, \dots, P_k^{(2)}, QL_k^{(2)}, QL_k^{(2)+}$;
- (5) $P \cup G$;
- (6) $P \cup F\langle \lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k) \rangle$;
- (7) $P \cup F\langle \lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k) \rangle \cup G$,

где

$$G \in \{e_k, A_k, S_k, V_4\}, \quad P \in \{P_k^{(k-1)}, \dots, P_k^{(2)}, QL_k^{(2)}, QL_k^{(2)+}\}$$

и разбиения $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ попарно не сравнимы в смысле отношения $\preceq$. Кроме того, в пп. 6, 7 выполняются следующие дополнительные условия. Если $P = P_k^{(l)}$, $2 \leq l \leq k - 2$, то ранг каждого из разбиений $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ больше l ; если $P = QL_k^{(2)}$, то ранг каждого из разбиений $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ больше 2; если $P = QL_k^{(2)+}$, то ранг каждого из разбиений $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ больше 2 и каждый элемент любого разбиения четный.

Доказательство. Пусть R — произвольный A -замкнутый класс функций из SLP_k . Если R не содержит существенных функций, то его можно рассматривать как подмножество множества $P_k^{1(k)}$. Применяя теорему 2, приходим к первым трем пунктам теоремы 4. Предположим, что R содержит существенную функцию. Тогда в соответствии с теоремой 3 класс R содержит целиком один из классов $P_k^{(k-1)}, \dots, P_k^{(2)}, QL_k^{(2)}, QL_k^{(2)+}$. Имеют место строгие включения

$$P_k^{(k-1)} \supset \dots \supset P_k^{(2)} \supset QL_k^{(2)} \supset QL_k^{(2)+}$$

(последнее включение имеет место при четном k), поэтому пусть P — максимальный из классов $P_k^{(k-1)}, \dots, P_k^{(2)}, QL_k^{(2)}, QL_k^{(2)+}$, содержащихся в R . Если $R = P$,

Таблица 1.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Таблица 2.

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

то получаем п. 4 теоремы 4. Если же $R \neq P$, то множество $R \setminus P$ состоит только из функций, которые существенно зависят от одной переменной. В случае, когда все функции из $R \setminus P$ с точностью до несущественных переменных являются подстановками, мы с использованием теоремы 2 приходим к равенству $R = P \cup G$, где $G \in \{e_k, A_k, S_k, V_4\}$. Пусть, напротив, множество $R \setminus P$ не содержит ни одной подстановки. Тогда согласно теореме 2 множество всех одноместных функций из R можно представить в виде $F(\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k))$, где разбиения $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ попарно не сравнимы в смысле отношения $\preceq$. Если $P = P_k^{(l)}$, то $P_k^{1(l)} \subset R$ и потому из последовательности $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ можно удалить все разбиения, ранг которых не превосходит l . Аналогично поступаем при $P = QL_k^{(2)}$, поскольку в этом случае $P_k^{1(2)} \subset R$. Пусть k четно и $P = QL_k^{(2)+}$. Если для некоторого i , $1 \leq i \leq s$, один из элементов разбиения $\lambda_i(k)$ нечетен, то согласно рассуждениям из леммы 8 класс R будет содержать все множество $QL_k^{(2)}$, что невозможно в силу выбора класса P . Как и случае классов $P_k^{(l)}$, последовательность $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$ можно считать свободной от разбиений, ранг которых равен 2.

Если, наконец, множество $R \setminus P$ содержит элементы каждого из множеств S_k , $P_k^{(k-1)}$, то объединяем рассуждения, которые использовались при рассмотрении пп. 5, 6. Теорема доказана.

Замечание 1. Сравнение с [11] показывает, что совокупность A -замкнутых классов, лежащих в SLP_k , полностью совпадает с совокупностью S -замкнутых классов из SLP_k .

5. Класс L_4 линейных функций

Как отмечалось во введении, при $k \geq 5$ единственными A -предполными классами в P_k являются классы I_k и SLP_k . При $k = 4$ к этим классам добавляются классы K_4 и L_4 . Классы I_4 и K_4 не содержат констант. Поэтому при $k \geq 5$ множество всех A -замкнутых классов из P_k , содержащих константы, описывается пп. 2–7 теоремы 4. При $k = 4$ необходимо дополнительно исследовать A -замкнутые классы линейных функций, которые содержат константы и не входят в класс SLP_4 .

Класс L_4 можно определить [20] как класс всех функций из P_4 , которые сохраняют отношение $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, где $+$ обозначает сложение в поле Галуа $GF(4)$ и задается табл. 1. Несложные рассуждения показывают, что произвольную функцию из класса L_4 от n переменных можно представить в виде

$$a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + \dots + a_n x_n^2 + b_n x_n + c, \quad (3)$$

где $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, c \in E_4$, а умножение в поле Галуа $GF(4)$ определяется табл. 2. Положим

$$\begin{aligned} L_4 A_4 &= \{b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c : b_1, \dots, b_n, c \in E_4\}, \\ L_4 V_4 &= \{b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c : b_1, \dots, b_n \in E_2, c \in E_4\}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} V_4 &= \{x + c : c \in E_4\}, \quad A_4 = \{bx + c : b, c \in E_4, b \neq 0\}, \\ S_4 &= \{ax^2 + c, bx + c : a, b, c \in E_4, a \neq 0, b \neq 0\}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что классы $L_4 A_4, L_4 V_4$ являются A -замкнутыми. Отметим еще, что если $a \neq 0, b \neq 0$, то функция $ax^2 + bx + c$ принимает два значения, причем каждое значение в двух точках.

Лемма 10. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная функция из L_4 , принимающая 4 значения. Тогда $\{0, f\}_A$ совпадает с одним из классов $L_4, L_4 A_4, L_4 V_4$.

Доказательство. Будем предполагать, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представлена в виде (3), причем все переменные $x_1, \dots, x_n$ являются существенными. Это означает, что $n \geq 2$ и в каждой паре (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, n$, хотя бы один из коэффициентов отличен от 0.

Пусть сначала $a_1 \neq 0$ и $b_1 = 0$. Подставляя в функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ константу 0 вместо переменных $x_3, \dots, x_n$, получаем функцию

$$f_1(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c.$$

Так как $f_1(x_1, 0)$ есть нечетная подстановка $a_1 x_1^2 + c$, то

$$\{f_1(x_1, 0)\}_A = S_4.$$

Если $a_2 b_2 = 0$ (то есть функция $a_2 x_2^2 + b_2 x_2$ также является подстановкой), то выберем в S_4 подстановки h_1, h_2 , обратные к подстановкам $a_1 x_1^2$ и $a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c$. Тогда

$$f_1(h_1(x_1), h_2(x_2)) = x_1 + x_2.$$

Очевидно, что функция $x_1 + x_2$ вместе с множеством S_4 образует полную в L_4 систему.

Допустим, что $a_2 b_2 \neq 0$. Тогда функция $a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c$ принимает ровно 2 значения, причем каждое значение в двух точках. Выберем в группе S_4 такие подстановки h_2, h_3 , чтобы выполнялось равенство

$$h_3(a_2 h_2^2(x) + b_2 h_2(x) + c) = 2x^2 + 3x$$

(функция $2x^2 + 3x$ принимает значение 0 при $x = 0, 2$ и значение 1 при $x = 1, 3$). Так как группа A_4 2-транзитивна, подстановку h_3 можно считать четной. Иными словами, можно предполагать, что $h_3(x) = dx + e$, где $d \neq 0$. Найдем далее в группе S_4 такую подстановку h_1 , что выполняется равенство $da_1 h_1^2(x) = x$. Положим

$$f_2(x_1, x_2) = h_3(f_1(h_1(x_1), h_2(x_2))).$$

Тогда

$$f_2(x_1, x_2) = da_1 h_1^2(x_1) + d(a_2 h_2^2(x_2) + b_2 h_2(x_2) + c) + e = x_1 + 2x_2^2 + 3x_2.$$

Аналогичным образом получаем функцию

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^2 + 2x_2.$$

Теперь

$$f_2(f_3(x_1, x_2), x_2) = x_1 + x_2.$$

Предположим, что $a_1 = 0$ и $b_1 \neq 0$. Будем также считать, что для любого i , $2 \leq i \leq n$, либо $a_i = 0$, либо $a_i b_i \neq 0$. Рассмотрим сначала случай, когда для некоторого i , $2 \leq i \leq n$, выполняется неравенство $a_i b_i \neq 0$. Пусть, например, $i = 2$. Как и выше, из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой константы 0 образуем функцию

$$f_1(x_1, x_2) = b_1 x_1 + a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c.$$

Согласно лемме 4 множество $\{f_1(0, x_2)\}_A$ содержит все функции h такие, что $\lambda^h(4) = (2, 2)$. Выберем поэтому в $\{f_1(0, x_2)\}_A$ такую функцию $h_1(x) = dx^2 + ex$, $de \neq 0$, чтобы выполнялись соотношения

$$b_1 d + a_2 \neq 0, \quad b_1 e + b_2 = 0.$$

Тогда

$$f_1(h_1(x), x) = (b_1 d + a_2)x^2 + c.$$

Следовательно, функция $f_1(f_1(h_1(x_1), x_1), x_2)$ удовлетворяет условиям рассмотренного выше случая $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$.

Предположим, что $a_2 = \dots = a_n = 0$. Если $b_1 = \dots = b_n = 1$, то из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой константы 0 получаем функцию

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + c.$$

Так как по условию леммы мы располагаем всеми константами, подстановкой подходящей константы из функции $f_1(x_1, x_2)$ можно получить функцию $x_1 - c$. Функция

$$f_1(x_1, x_2) - c = x_1 + x_2$$

вместе с константами порождает класс $L_4 V_4$. Поскольку, очевидно, $f \in L_4 V_4$, в этом случае

$$\{0, f\}_A = L_4 V_4.$$

Допустим, что один из коэффициентов $b_1, \dots, b_n$, например b_1 , отличен от 1. Тогда

$$f(x_1, 0, \dots, 0) = b_1 x_1 + c$$

есть четная подстановка, не входящая в V_4 . Значит,

$$\{b_1 x_1 + c\}_A = A_4.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\{0, f\}_A = L_4 A_4.$$

Рис. 2.

Предположим, наконец, что $a_i b_i \neq 0$ для всех i , $1 \leq i \leq n$. Так как функция f принимает 4 значения, области значений функций $a_1 x_1^2 + b_1 x_1, \dots, a_n x_n^2 + b_n x_n$ не могут быть все одинаковыми. Пусть, например, $\text{Im}(a_1 x_1^2 + b_1 x_1) \neq \text{Im}(a_2 x_2^2 + b_2 x_2)$. Очевидно, что множество $\{[0, f]\}_A$ содержит все функции $h(x)$ такие, что $\lambda^h(4) = (2, 2)$. Выберем поэтому функцию $h_2(x_2)$ из $\{[0, f]\}_A$ с таким расчетом, чтобы функция $a_2 h_2^2(x_2) + b_2 h_2(x_2)$ имела два блока, не совпадающие с блоками функции $a_1 x_1^2 + b_1 x_1$. Можно проверить, что в этом случае $a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_2 h_2^2(x_2) + b_2 h_2(x_2)$ есть подстановка. Следовательно, при $n \geq 3$ согласно рассмотренным выше случаям мы получим $\{[0, f]\}_A = L_4$, если вместо функции f возьмем $f(x_2, h_2(x_2), x_3, \dots, x_n)$. Если же $n = 2$, то выберем в классе $\{[0, f]\}_A$ такую функцию $h(x)$, что ее блоки отличны от множеств $\text{Im}(a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c)$, $\text{Im}(a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c)$ и $\text{Im } h$ не совпадает с блоками функции $a_2 x_2^2 + b_2 x_2$. Тогда функция $f(x_1, h(f(x_2, x_3)))$ возвращает нас к случаю $n \geq 3$. Лемма доказана.

Из теоремы 4 и леммы 10 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $k \geq 4$. Всякий A -замкнутый класс функций из P_k , содержащий константы, совпадает с одним из классов, перечисленных в пп. 2–7 теоремы 4, либо (при $k = 4$) с одним из классов $L_4, L_4 A_4, L_4 V_4$.

Замечание 2. При $k \geq 4$ списки A -замкнутых и S -замкнутых классов функций из P_k , содержащих константы, совпадают (см. [11]).

Используя полученные выше утверждения об A -замкнутых классах линейных

функций, содержащих константы, приведем полный список этих классов. Для упрощения записи функции, составляющие А-замкнутые классы, указываем с точностью до несущественных переменных.

$$L_4^{(2)} S_4 = L_4 \cap SLP_4 = QL_4^{(2)+} \cup S_4 = \{a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + \dots + a_n x_n^2 + b_n x_n + c, \\ ax^2 + bx + c: n \geq 1, a_1 b_1 = \dots = a_n b_n \neq 0\};$$

$$L_4^{1(2)} S_4 = L_4 \cap P_4^1 = F\langle \lambda_1(4) \rangle \cup S_4 = \{ax^2 + bx + c\};$$

$$CS_4 = F\langle \lambda_2(4) \rangle \cup S_4 = \{ax^2 + c, ax + c\};$$

$$L_4^{(2)} A_4 = QL_4^{(2)+} \cup A_4 \\ = \{a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + \dots + a_n x_n^2 + b_n x_n + c, bx + c: n \geq 1, a_1 b_1 = \dots = a_n b_n \neq 0\};$$

$$L_4^{1(2)} A_4 = F\langle \lambda_1(4) \rangle \cup A_4 = \{ax^2 + bx + c, dx + c: ab \neq 0\};$$

$$CA_4 = F\langle \lambda_2(4) \rangle \cup A_4 = \{bx + c\};$$

$$L_4^{(2)} V_4 = QL_4^{(2)+} \cup V_4 \\ = \{a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + \dots + a_n x_n^2 + b_n x_n + c, x + c: n \geq 1, a_1 b_1 = \dots = a_n b_n \neq 0\};$$

$$L_4^{1(2)} V_4 = F\langle \lambda_1(4) \rangle \cup V_4 = \{ax^2 + bx + c, x + c: ab \neq 0\};$$

$$CV_4 = F\langle \lambda_2(4) \rangle \cup V_4 = \{x + c, c\};$$

$$L_4^{(2)} e_4 = QL_4^{(2)+} \cup e_4 \\ = \{a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + \dots + a_n x_n^2 + b_n x_n + c, x, c: n \geq 1, a_1 b_1 = \dots = a_n b_n \neq 0\};$$

$$L_4^{1(2)} e_4 = F\langle \lambda_1(4) \rangle \cup e_4 \\ = \{ax^2 + bx + c, x, c: ab \neq 0\};$$

$$Ce_4 = F\langle \lambda_2(4) \rangle \cup e_4 = \{x, c\};$$

$$L_4^{(2)} = QL_4^{(2)+} \\ = \{a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + \dots + a_n x_n^2 + b_n x_n + c, c: n \geq 1, a_1 b_1 = \dots = a_n b_n \neq 0\};$$

$$L_4^{1(2)} = F\langle \lambda_1(4) \rangle = \{ax^2 + bx + c, c: ab \neq 0\};$$

$$C = F\langle \lambda_2(4) \rangle = \{c\},$$

где $\lambda_1(4) = (2, 2)$, $\lambda_2(4) = (4)$.

Взаимное расположение перечисленных выше классов показано на рис. 2.

Список литературы

1. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.* (1921) **43**, 163–185.
2. Post E. L. *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
3. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
4. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *Докл. АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.

5. Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. *Проблемы кибернетики* (1979) **36**, 5–22.
6. Csákány B., Gavalcová T. Finite homogeneous algebras. I. *Acta Sci. Math.* (1980) **42**, №1–2, 57–65.
7. Марченков С. С. Об однородных алгебрах. *Докл. АН СССР* (1981) **256**, №4, 787–790.
8. Марченков С. С. Однородные алгебры. *Проблемы кибернетики* (1982) **39**, 85–106.
9. Марченков С. С. О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов. *Докл. АН СССР* (1982) **265**, №3, 533–536.
10. Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 . *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 82–95.
11. Нгуен Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 87–108.
12. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами k -значной логики. *Докл. АН Беларуси* (1994) **38**, №3, 16–19.
13. Марченков С. С. Основные отношения S -классификации функций многозначной логики. *Дискретная математика* (1996) **8**, №1, 99–128.
14. Марченков С. С. S -классификация идемпотентных алгебр с конечным носителем. *Докл. РАН* (1996) **348**, №5, 587–589.
15. Марченков С. С. G -предполные классы многозначной логики. *Дискретный анализ и исследование операций* (1996) **3**, №3, 47–70.
16. Марченков С. С. S -классификация функций многозначной логики. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 125–152.
17. Нгуен Ван Хоа. О структуре замкнутых классов k -значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп. *Докл. АН Беларуси* (1994) **38**, №6, 17–20.
18. Нгуен Ван Хоа. О замкнутых классах k -значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп. *Дискретная математика* (1996), **8**, №1, 129–156.
19. Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. II. *Проблемы кибернетики* (1983) **40**, 261–266.
20. Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. *Rozprawy Československe Akad. Věd. Řada Mat. Přírod. Věd.* (1970) **80**, 3–93.
21. Бурле Г. А. Классы k -значной логики, содержащие все функции одной переменной. *Дискретный анализ* (1967) **10**, 3–7.
22. Яблонский С. В. Введение в теорию функций k -значной логики. *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики*. Наука, Москва, 1974, 9–66.
23. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
24. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1972.
25. Мальцев А. И. *Итеративные алгебры Поста*. Изд. НГУ, Новосибирск, 1976.

Статья поступила 28.08.1997.

Переработанный вариант поступил 28.01.1998.