Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Матвеев, Структура оптимальных траекторий дискретной детерминированной схемы с дисконтированием, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 100–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:59:36

Структура оптимальных траекторий дискретной детерминированной схемы с дисконтированием

© 1998 г. В. Д. Матвееenko

Исследуется семейство задач нахождения

$$\max_{i_1, \dots, i_{T-1}} \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k u(i_k, i_{k+1})$$

при $i_0 = j_0$, $i_T = j_T$, где β — дисконтирующий множитель ($\beta > 0$, $\beta \neq 1$); i_k , $k = 0, 1, \dots, T$, — элементы заданного конечного множества; u — функция, принимающая значения в пространстве $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Число шагов T и краевые состояния j_0, j_T рассматриваются как параметры. Дано описание структуры оптимальных траекторий при достаточно большом числе шагов T . Доказана теорема о представлении функции-значения. Указано достаточное условие, при выполнении которого данный контур не входит в состав никакой оптимальной траектории, независимо от величины β .

1. Введение

Статья посвящена изучению структуры оптимальных траекторий детерминированной управляемой системы с дискретным множеством состояний с дисконтированием. Подобные задачи без дисконтирования рассматривались, например, в [1–6]. В частности, было показано (см. [5]), что при определенных условиях, близких по смыслу к неразложимости и примитивности матрицы, всякая достаточно длинная T -шаговая оптимальная траектория с фиксированными концами состоит из трех последовательных участков: первый участок зависит лишь от начального состояния (не зависит от финального состояния и от длины траектории) и совпадает с соответствующим участком бесконечной оптимальной траектории; на втором участке траектория проходит по асимптотически устойчивому магистральному множеству; третий участок зависит лишь от финального состояния и совпадает с соответствующим участком оптимальной обратной траектории. Аналогичная структура оптимальных траекторий была обнаружена и для некоторых других управляемых систем (см. [7, 8]). Однако следующий естественный шаг, рассмотрение дискретной системы при наличии дисконтирующего множителя, сделан не был. Ликвидировать отчасти этот пробел и составляет цель статьи.

Пусть задано конечное множество M , состоящее из n элементов. В дальнейшем будем называть его множеством вершин. Задана также функция

$$u: M \times M \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}.$$

Значение $u(i, j)$ будем называть полезностью или длиной дуги (i, j) . Будем считать, что граф G , составленный из дуг (i, j) , для которых $u(i, j) > -\infty$, вполне связан. Задано также число $\beta > 0$, называемое дисконтирующим множителем или дисконтом. Наконец, фиксированы две вершины j_0, j_T и натуральное число T . Требуется максимизировать функцию

$$\sum_{k=0}^{T-1} \beta^k u(i_k, i_{k+1})$$

на множестве всевозможных наборов вершин (T -шаговых траекторий)

$$\{i_0 = j_0, i_1, i_2, \dots, i_T = j_T\}.$$

Указанную задачу будем обозначать символом $S_\beta(j_0, j_T, T)$. При изучении структуры решений будем рассматривать семейство задач $S_\beta(j_0, j_T, T)$ при различных значениях параметров j_0, j_T, T .

При $0 < \beta < 1$ с задачами $S_\beta(j_0, j_T, T)$ тесно связано другое семейство задач, в которых фиксирована начальная вершина и требуется найти бесконечную последовательность вершин (бесконечную траекторию)

$$\{i_0 = j_0, i_1, i_2, \dots\},$$

максимизирующую функцию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k u(i_k, i_{k+1}).$$

Такие задачи будут обозначаться как $S_\beta^\infty(j_0)$.

Семейство задач $S_\beta(j_0, j_T, T)$ имеет непосредственные приложения в исследовании операций (например, выбор последовательности работ). Кроме того, эти задачи состоят в естественном родстве с аналогичными задачами с непрерывным пространством состояний, которые имеют многочисленные приложения в математической экономике. Среди этих приложений широко известная модель Рамсея в ее вариантах с дискретным и с непрерывным временем (см., например, [9, 10]) и ее n -мерные аналоги (см. [11, 12]). Задачи, родственные $S_\beta^\infty(j_0)$ изучались также в контексте управляемых стохастических процессов (см., например, [13]) и динамических игр (например, [14]). Хотя в настоящей работе рассматривается дискретное множество состояний, ее результаты могут оказаться полезными и при изучении систем с непрерывным пространством состояний. Во-первых, все три класса моделей (с дискретным множеством состояний, с непрерывным множеством состояний и дискретным временем, с непрерывным множеством состояний и непрерывным временем) связаны идейно и часто дают параллельные результаты. Во-вторых, модели одного класса могут применяться как математический аппарат для исследования моделей другого класса. Например, система с непрерывным пространством состояний и дискретным временем может быть аппроксимирована системой с дискретным пространством состояний (см., например, [15]).

Полученные в этой статье результаты напоминают результаты для случая отсутствия дисконтирования ($\beta = 1$). В то же время имеются существенные отличия.

При $\beta = 1$ задача $S_1^\infty(j_0)$, вообще говоря, не имеет решения. Вводят модифицированную функцию полезности

$$\bar{v}(i, j) = v(i, j) - \lambda, \quad i, j \in M.$$

Здесь λ — максимальная средняя длина дуги, найденная по всевозможным контурам графа G (максимальная характеристика, в терминологии [1, 5]), она играет роль, аналогичную собственному числу матрицы (см., [5]). С этой новой функцией полезности естественным образом определены задачи $\bar{S}_1(j_0, j_T, T)$ и $\bar{S}_1^\infty(j_0)$. Оказывается (см., например, [5]), что решения задач $S_1(j_0, j_T, T)$ и $\bar{S}_1(j_0, j_T, T)$ совпадают, а задача $\bar{S}_1^\infty(j_0)$ имеет решение. Пусть $V_1(i, j, T)$ и $V_1(i)$ — функции-значения, соответственно, задач $S_1(i, j, T)$ и $\bar{S}_1^\infty(i)$. Как показано в [5], при определенных условиях существует также функция $W_1(i)$ такая, что

$$V_1(j_0, j_T, T) = \lambda T + V_1(j_0) + W_1(j_T), \quad j_0, j_T \in M,$$

при достаточно больших T .

В настоящей статье при $\beta < 1$ исследование также основано на сравнении средних (теперь средних взвешенных) длин дуг контуров. Принципиальное отличие при $\beta < 1$ состоит в том, что средняя длина дуги зависит от того, относительно какой вершины контура она определена. При этом отсутствует единая максимальная характеристика λ . С другой стороны, при $\beta < 1$ задачи $S_\beta^\infty(i)$, $i \in M$, имеют решение, таким образом, по ним непосредственно определена функция-значение $V_\beta(i)$.

В параграфе 2 при $\beta < 1$ исследуются оптимальные контуры и структура траекторий-решений задачи $S_\beta^\infty(j_0)$. В параграфе 3 изучается структура траекторий-решений задачи $S_\beta(j_0, j_T, T)$. В частности, мы показываем, что при определенных условиях, существует такая функция $W_\beta(i)$, что, при достаточно больших T ,

$$V_\beta(j_0, j_T, T) = V_\beta(j_0) + \beta^T W_\beta(j_T), \quad j_0, j_T \in M. \quad (1)$$

В параграфе 4 приводится численный пример. В параграфе 5 показано, каким образом случай $\beta > 1$ может быть сведен к случаю $\beta < 1$.

2. Бесконечные оптимальные траектории

Пусть $V_\beta(i)$ — значения задач $S_\beta^\infty(i)$, $i \in M$; $V_\beta(i, j, T)$ — значения задач $S_\beta(i, j, T)$, $i, j \in M$, $T = 1, 2, \dots$, при фиксированном $\beta \in (0, 1)$. Из принципа оптимальности Беллмана следует, что эти функции удовлетворяют, соответственно, уравнениям Беллмана

$$\begin{aligned} V_\beta(i) &= \max_{j \in M} \{u(i, j) + \beta V_\beta(j)\}, \\ V_\beta(i, j, T) &= \max_{\gamma \in M} \{u(i, \gamma) + \beta V_\beta(\gamma, j, T - 1)\}, \quad T > 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Бесконечная траектория $\{i_0, i_1, \dots\}$ называется пошагово оптимальной, если

$$V_\beta(i_t) = u(i_t, i_{t+1}) + \beta V_\beta(i_{t+1}), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

т. е.

$$i_{t+1} \in \operatorname{Arg} \max_{j \in M} \{u(i_t, j) + \beta V_\beta(j)\}.$$

Известно следующее свойство (см. [16]), справедливое как для дискретного, так и для непрерывного множества состояний.

Теорема 1. *Бесконечная траектория $\{i_0, i_1, \dots\}$ оптимальна (является решением задачи $S_\beta^\infty(i_0)$) тогда и только тогда, когда она пошагово оптимальна.*

Замечание 1. При малых положительных дисконтах β оптимальные траектории можно охарактеризовать непосредственно. Назовем лексикографически максимальной (л. м.) такую траекторию $\{j_0, j_1, \dots\}$, что для любой траектории $\{i_0 = j_0, i_1, \dots\}$ выполняется следующее: если $u(i_t, i_{t+1}) > u(j_t, j_{t+1})$ для некоторого индекса t , то найдется индекс $k < t$, для которого $u(i_k, i_{k+1}) < u(j_k, j_{k+1})$. Нетрудно показать, что существует такое значение $\bar{\beta}$, что при всех дисконтах $\beta \in (0, \bar{\beta})$ оптимальными являются л. м. траектории и только они. Имеется простой алгоритм построения л. м. траекторий, на котором мы здесь не останавливаемся. Отметим лишь, что всякая л. м. траектория $\{j_t\}$ является пошагово оптимальной при $\beta = 0$, т. е.

$$j_{t+1} \in \operatorname{Arg} \max_{i \in M} u(j_t, i), \quad t = 0, 1, \dots$$

Обратное верно, если множества $\operatorname{Arg} \max_{i \in M} u(j, i)$, $j \in M$, одноэлементные.

Замечание 2. Можно показать, что существует такое число $\tilde{\beta} < 1$, что при всех дисконтах $\beta \in (\tilde{\beta}, 1)$ всякая траектория, являющаяся решением задачи $S_\beta^\infty(j_0)$, является одновременно и решением задачи $S_1^\infty(j_0)$ (см. параграф 1). Обратное, вообще говоря, неверно.

По поводу влияния величины дисконта на асимптотику оптимальных траекторий в моделях с непрерывным пространством состояний см. [17, 18].

В силу конечности множества M , очевидно, что всякая достаточно длинная (и, тем более, бесконечная) траектория содержит контуры. Нам понадобятся некоторые свойства суммарных дисконтированных полезностей, рассчитанных по контуру. Пусть $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_{|\sigma|}, i_1\}$ — контур, состоящий из $|\sigma|$ дуг. Фиксирован дисконт $0 < \beta < 1$. Дисконтированной полезностью контура σ относительно вершины i_s назовем число

$$\chi_{\sigma, i_s} = \sum_{h=s}^{s+|\sigma|-1} \beta^{h-s} u(i_h, i_{h+1}),$$

где $i_{|\sigma|+k} = i_k$. Заметим, что

$$\chi_{\sigma, i_s} = u(i_s, i_{s+1})(1 - \beta^{|\sigma|}) + \beta \chi_{\sigma, i_{s+1}};$$

при $\beta = 1$ эта формула дала бы $\chi_{\sigma, i_s} = \chi_{\sigma, i_{s+1}}$. Средней длиной дуги контура σ относительно вершины i_s естественно назвать число c_{σ, i_s} такое, что

$$(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{|\sigma|-1}) c_{\sigma, i_s} = \chi_{\sigma, i_s}.$$

Отсюда

$$c_{\sigma, i_s} = \chi_{\sigma, i_s} \frac{1 - \beta}{1 - \beta^{|\sigma|}}. \quad (4)$$

Легко найти и дисконтированную полезность, получаемую при бесконечных обходах контура σ , начиная с вершины i_s :

$$v_{\sigma, i_s} = \chi_{\sigma, i_s} (1 + \beta^{|\sigma|} + \beta^{2|\sigma|} + \dots) = \frac{\chi_{\sigma, i_s}}{1 - \beta^{|\sigma|}}.$$

В силу (4)

$$v_{\sigma, i_s} = \frac{c_{\sigma, i_s}}{1 - \beta}. \quad (5)$$

Смысл этого равенства в том, что бесконечные обходы контура σ можно было бы заменить бесконечными обходами петли с полезностью c_{σ, i_s} (если бы такая петля существовала).

Контур σ называется оптимальным относительно вершины $j_0 \in M$, если существует бесконечная оптимальная траектория с началом j_0 (решение задачи $S_\beta^\infty(j_0)$), включающая хотя бы один обход контура σ .

Лемма 1. Если i — вершина контура σ и

$$V_\beta(i) = \frac{C_{\sigma, i}}{1 - \beta},$$

то контур σ оптимален относительно i .

Доказательство. Правая часть равенства представляет собой полезность траектории τ с началом i , состоящей из бесконечного обхода контура σ . Равенство означает, что траектория τ оптимальна, т. е. контур σ оптимален относительно i .

Лемма доказана.

Обратное лемме 1 утверждение составляет часть следующего предложения.

Предложение 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) контур σ оптимален относительно некоторой вершины $j_0 \in M$;
- (2) контур σ оптимален относительно каждой своей вершины j ;
- (3) существует оптимальная траектория τ^* с началом j_0 , заканчивающаяся бесконечным обходом контура σ ;
- (4) $V(j) = C_{\sigma, j} / (1 - \beta)$ для любой вершины j контура σ ;
- (5) $V(j) = u(j, \bar{j}) + \beta V(\bar{j})$ для любой дуги $(j, \bar{j})$ контура σ .

Доказательство. Переходы $2 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 1$ тривиальны; из 4 следует 2 согласно лемме 1.

Докажем, что $1 \rightarrow 3$. В силу оптимальности σ , существует оптимальная траектория, состоящая из трех участков:

- (1) перехода из вершины j_0 в вершину $i \in \sigma$; пусть эта конечная траектория имеет полезность $s(j_0, i)$ и состоит из $|s(j_0, i)|$ дуг;
- (2) одного обхода контура σ ;

(3) бесконечной оптимальной траектории с началом i .

Соответственно,

$$V_{\beta}(j_0) = s(j_0, i) + \beta^{|s(j_0, i)|} \chi_{\sigma, i} + \beta^{|s(j_0, i)|} V_{\beta}(i). \quad (6)$$

С другой стороны, в силу принципа оптимальности,

$$V_{\beta}(j_0) = s(j_0, i) + \beta^{|s(j_0, i)|} V_{\beta}(i). \quad (7)$$

Из (6), (7) вытекает, что

$$V_{\beta}(i) = \chi_{\sigma, i} + \beta^{|\sigma|} V_{\beta}(i).$$

Следовательно, с учетом (4),

$$V_{\beta}(i) = \frac{\chi_{\sigma, i}}{1 - \beta^{|\sigma|}} = \frac{c_{\sigma, i}}{1 - \beta}. \quad (8)$$

Правая часть равенства (8) представляет собой полезность траектории $\bar{\tau}$ с началом i , состоящей из бесконечного обхода контура σ . Заменяя $V_{\beta}(i)$ в (7), приходим к выводу, что траектория τ^* , составленная из первого из трех указанных выше участков и $\bar{\tau}$, оптимальна.

Переход $1 \rightarrow 5$ следует из оптимальности траектории $\bar{\tau}$.

Докажем, что $5 \rightarrow 4$. Для контура σ , домножая равенства

$$V_{\beta}(i_t) = u(i_t, i_{t+1}) + \beta V_{\beta}(i_{t+1}), \quad t = 1, 2, \dots, |\sigma|,$$

соответственно, на β^t и суммируя, получим, с учетом (4), что

$$V_{\beta}(i_1) = \frac{c_{\sigma, i_1}}{1 - \beta}.$$

Предложение доказано.

Аналогично доказывается, что набор чисел $V(i)$, $i \in M$, единственный, удовлетворяющий равенствам (2).

Лемма 2. Пусть контур σ оптимален относительно вершины $j_0 \in M$ и содержит вершину i . Тогда всякий контур σ^1 , оптимальный относительно i , является также оптимальным относительно j_0 .

Доказательство. Как показывает предложение 1, существует оптимальная траектория τ^* , начальный участок которой представляет собой путь из j_0 в i . Продолжим этот участок, дополнив его оптимальной траекторией с началом i , содержащей, по крайней мере, один обход контура σ^1 . Новая траектория с началом j_0 оптимальна (она имеет ту же полезность, что и τ^*). Следовательно, контур σ^1 оптимален относительно j_0 .

Лемма доказана.

Лемма 3. Всякий контур σ , составленный из дуг контуров, оптимальных относительно вершины $j_0 \in M$, сам является оптимальным относительно j_0 .

Доказательство. Согласно предложению 1 для каждой дуги (i, j) контура σ справедливо равенство

$$V(i) = u(i, j) + \beta V(j).$$

Из предложения 1 следует, что контур σ оптимален относительно каждой своей вершины, и из леммы 2 вытекает доказываемое утверждение.

Лемма доказана.

Рассмотрим подграф Γ , состоящий из дуг всевозможных оптимальных (относительно своих собственных вершин) контуров. В силу леммы 3 он распадается на (максимальные) вполне связные компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$, которые мы будем называть контурными компонентами. Если Γ вполне связан, то он сам составляет контурную компоненту.

Для контура σ обозначим через $M^-(\sigma)$ множество вершин, относительно которых контур σ оптимален. Доказанные утверждения показывают, что

для каждой вершины $j \in M$ найдется по крайней мере один контур σ такой, что $j \in M^-(\sigma)$;

если контур σ таков, что $M^-(\sigma) \neq \emptyset$, то $i \in M^-(\sigma)$ для каждой вершины $i \in \sigma$;

если σ_1, σ_2 — контуры, принадлежащие одной контурной компоненте Γ_k , то

$$M^-(\sigma_1) = M^-(\sigma_2).$$

Это значит, что все контуры, принадлежащие контурной компоненте Γ_k , являются оптимальными относительно одного и того же набора начальных вершин, который будем обозначать $M^-(\Gamma_k)$. Если всего имеется s контурных компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$, то

$$M^-(\Gamma_1) \cup \dots \cup M^-(\Gamma_s) = M.$$

Какова структура бесконечной оптимальной траектории τ с началом j_0 (решения задачи $S_\beta^\infty(j_0)$)? Возможно несколько случаев.

Если контурная компонента Γ_k , для которой $j_0 \in M^-(\Gamma_k)$, единственна, то траектория τ выходит на Γ_k и далее может двигаться произвольным образом по дугам этой контурной компоненты. Движение будет заведомо регулярным (нехаотичным), лишь если Γ_k представляет собой контур (в частности, петлю).

Если существует несколько контурных компонент Γ_k , для которых $j_0 \in M^-(\Gamma_k)$, то для каждой из них можно указать продолжающуюся в этой компоненте бесконечную оптимальную траекторию с началом j_0 .

Контурные компоненты могут следовать друг за другом. Пусть σ_1, σ_2 — два оптимальных (относительно своих вершин) контура. Если $i \in \sigma_1$ и $i \in M^-(\sigma_2)$, то будем говорить, что контур σ_2 следует за σ_1 и использовать обозначение $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$. Нетрудно установить следующие свойства.

Если $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$, то $M^-(\sigma_1) \subset M^-(\sigma_2)$.

Контуры σ_1, σ_2 принадлежат одной контурной компоненте тогда и только тогда, когда $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2, \sigma_2 \rightarrow \sigma_1$.

Если Γ_1, Γ_2 — контурные компоненты, и $\sigma_1 \in \Gamma_1, \sigma_2 \in \Gamma_2, \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$, то $\hat{\sigma}_1 \rightarrow \hat{\sigma}_2$ для любых контуров $\hat{\sigma}_1 \in \Gamma_1, \hat{\sigma}_2 \in \Gamma_2$. Будем говорить, что контурная компонента Γ_2 следует за Γ_1 и использовать обозначение $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$.

Если $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, то $M^-(\Gamma_1) \subset M^-(\Gamma_2)$. В этом случае оптимальная траектория может сколь угодно долго находиться в контурной компоненте Γ_1 , а затем перейти в Γ_2 .

В общем случае решение задачи $S_\beta^\infty(j_0)$ имеет нерегулярный характер. В конкретных задачах, однако, часто встречается простейший случай, когда граф Γ представляет собой петлю (см. далее пример в параграфе 4).

В приложениях часто бывает важно выделить стационарные состояния (неподвижные точки) динамической системы. В связи с этим интересен вопрос о достаточных условиях, при которых никакие иные контуры, кроме петель, невозможны на оптимальных траекториях. В [19] для некоторых моделей с непрерывным пространством состояний предложено условие, сходное с используемым ниже (9).

Теорема 2. Пусть для контура

$$\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_{|\sigma|}, i_{|\sigma|+1} = i_1\}$$

с числом вершин $|\sigma| > 1$ выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^{|\sigma|} u(i_s, i_s) > \sum_{s=1}^{|\sigma|} u(i_s, i_{s+1}). \quad (9)$$

Тогда при любом фиксированном $\beta \in (0, 1)$ найдется такая вершина $i_s \in \sigma$, что

$$c_{\sigma, i_s} < u(i_s, i_s). \quad (10)$$

Доказательство. Предположим противное: пусть для некоторого $\beta \in (0, 1)$ выполняется неравенство $c_{\sigma, i_s} \geq u(i_s, i_s)$ при всех $i_s \in \sigma$, или, в силу (4),

$$\frac{1 - \beta}{1 - \beta^{|\sigma|}} \chi_{\sigma, i_s} \geq u(i_s, i_s), \quad i_s \in \sigma. \quad (11)$$

Суммируя неравенства (11) по $s = 1, \dots, |\sigma|$ и используя определение числа χ_{σ, i_s} , получаем неравенство

$$\sum_{s=1}^{|\sigma|} u(i_s, i_{s+1}) \geq \sum_{s=1}^{|\sigma|} u(i_s, i_s),$$

что противоречит (9). Теорема доказана.

Следствие 1. Если контур σ удовлетворяет неравенству (9), то он не является оптимальным ни для какой задачи $S_\beta^\infty(j_0)$, $0 < \beta < 1$.

Доказательство легко проводится на основе утверждения 2 предложения 1.

Следствие 2. Если (9) выполняется для любого контура σ с числом дуг $|\sigma| > 1$, то для любого $\beta \in (0, 1)$ любой оптимальный контур является петлей.

В определенном смысле обратным теореме 2 является следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть при некотором $\beta \in (0, 1)$ для некоторого контура σ выполняются неравенства (10) при всех $s = 1, \dots, |\sigma|$. Тогда контур σ удовлетворяет неравенству (9).

3. Конечные оптимальные траектории

Переходим к задачам $S_\beta(j_0, j_T, T)$. В отличие от задач $S_\beta^\infty(j_0)$ одной только полной связности графа G недостаточно для существования решения при любом T . Может просто не оказаться ни одного пути длины T с началом j_0 . Возможно также, что оптимальные T -шаговые траектории ведут себя по-разному, в зависимости от кратности T . Чтобы снять эту проблему, примем следующее предположение, которое, как отмечалось в [5], означает примитивность матрицы, соответствующей подграфу Γ , составленному из дуг оптимальных контуров.

Скажем, что выполнено условие экстремальной примитивности, если для каждой из контурных компонент Γ_k наибольший общий делитель количества дуг в контурах, образующих Γ_k , равен 1.

Условие выполняется, если контурная компонента Γ_k содержит хотя бы одну петлю или хотя бы одну пару контуров с взаимно простыми количествами дуг. Это условие гарантирует для любой пары вершин $j, \tilde{j} \in \Gamma_k$ при любом достаточно большом T наличие T -шагового пути из j в $\tilde{j}$, лежащего в Γ_k .

Лемма 4. Для $i, j \in M$, $0 < \beta < 1$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} V_\beta(i, j, T) = V_\beta(i).$$

Доказательство. Ясно, что

$$V_\beta(i) = \max_{j \in M} \{V_\beta(i, j, T) + \beta^T V_\beta(j)\}, \quad T \geq 1, \quad i \in M.$$

Следовательно,

$$V_\beta(i) \geq V_\beta(i, j, T) + \beta^T V_\beta(j), \quad T \geq 1, \quad i, j \in M. \quad (12)$$

С другой стороны, пусть Γ_k — контурная компонента, для которой $i \in M^-(\Gamma_k)$, $\tilde{j}$ — некоторая вершина, принадлежащая Γ_k , π — некоторый путь из $\tilde{j}$ в j , имеющий полезность $\bar{s}(\tilde{j}, j)$ и состоящий из $|\bar{s}(\tilde{j}, j)|$ дуг. При предположении экстремальной примитивности для любого достаточно большого T существует T -шаговая траектория с началом i и концом j , совпадающая в течении первых $T - |\bar{s}(\tilde{j}, j)|$ периодов с бесконечной оптимальной траекторией с началом i , а затем проходящая по пути π . Полезность этой T -шаговой траектории равна

$$s(i, j, T) = V_\beta(i) - \beta^{T - |\bar{s}(\tilde{j}, j)|} [V_\beta(j) - \bar{s}(\tilde{j}, j)]. \quad (13)$$

Поскольку $V_\beta(i, j, T)$ — максимальная полезность T -шаговой траектории, из (12) и (13) следует, что

$$V_\beta(i) - \beta^{T - |\bar{s}(\tilde{j}, j)|} (V_\beta(j) - \bar{s}(\tilde{j}, j)) \leq V_\beta(i, j, T) \leq V_\beta(i) - \beta^T V_\beta(j).$$

Отсюда при $T \rightarrow \infty$ по теореме о сжатой переменной вытекает доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Следствие 3. T -шаговая оптимальная траектория τ_T (являющаяся решением задачи $S_\beta(j_0, j_T, T)$) при достаточно большом T является пошагово оптимальной на начальном участке.

Доказательство. Пусть

$$\tau_T = \{j_0, j_1^T, \dots, j_{T-1}^T, j_T\},$$

тогда

$$j_1^T \in \operatorname{Arg} \max_j \{u(j_0, j) + \beta V_\beta(j, j_T, T-1)\}.$$

Следовательно, в силу леммы 4 при достаточно большом T

$$j_1^T \in \operatorname{Arg} \max_j \{u(j_0, j) + \beta V_\beta(j)\}.$$

Утверждение доказано.

Следствие 4. Для любого натурального числа T_0 существует натуральное число $\tilde{T}$ такое, что всякая T -шаговая оптимальная траектория τ_T , где $T > \tilde{T}$, на начальном участке (при $t = 0, 1, \dots, T_0$) совпадает с некоторой бесконечной оптимальной траекторией с тем же начальным состоянием.

В дальнейшем, помимо экстремальной примитивности, будем всюду предполагать, что контурная компонента Γ_k , для которой $j_0 \in M^-(\Gamma_k)$, единственна.

Если T достаточно велико, то, как показывает следствие 4, T -шаговая оптимальная траектория τ_T состоит из трех участков:

- (1) переход по пути, не принадлежащему контурной компоненте Γ_k , из j_0 в некоторую вершину $i \in \Gamma_k$ (в силу следствий 3, 4 этот участок совпадает с соответствующим участком бесконечной оптимальной траектории и потому представляет собой ациклический пошагово оптимальный путь; этот участок отсутствует, если $j_0 \in \Gamma_k$);
- (2) конечная траектория, соединяющая вершину $i \in \Gamma_k$ с некоторой вершиной $j \in \Gamma_k$ и целиком лежащая в контурной компоненте Γ_k ;
- (3) переход по пути, не принадлежащему контурной компоненте Γ_k , из $j \in \Gamma_k$ в j_T (этот участок отсутствует, если $j_T \in \Gamma_k$).

Можно убедиться в невозможности выхода с последующим возвратом в Γ_k и в отсутствии контуров на участке 3.

Таким образом, достаточно длинная T -шаговая оптимальная траектория представляет собой урезанную бесконечную оптимальную траекторию с началом j_0 , дополненную переходом τ из некоторой вершины $j \in \Gamma_k$ в j_T . Пусть $s(j, j_T)$ — полезность пути τ , $|s(j, j_T)|$ — число дуг. Значение задачи $S_\beta(j_0, j_T, T)$ равно

$$V_\beta(j_0, j_T, T) = \max_{j \in \Gamma_k; \tau} \{V_\beta(j_0) - \beta^{T-|s(j, j_T)|} V_\beta(j) - \beta^{T-|s(j, j_T)|} s(j, j_T)\}.$$

С учетом постоянных, путь оптимального перехода из Γ_k в j_T является решением задачи

$$\max_{j \in \Gamma_k; \tau} \{-\beta^{-|s(j, j_T)|} (V_\beta(j) - s(j, j_T))\}. \quad (14)$$

Таким образом, при достаточно большом T финальный участок траектории-решения задачи $S_\beta(j_0, j_T, T)$ не зависит ни от j_0 ни от T .

Покажем, что любая вершина j контурной компоненты Γ_k может быть решением задачи (14), т. е. все вершины контурной компоненты Γ_k эквивалентны для решения задач $S_\beta(j_0, j_T, T)$, $j_0 \in M^-(\Gamma_k)$, при достаточно больших T . Определим функцию

$$\lambda(i) = \max_{\tau} \{-\beta^{-|s(i, j_T)|} (V_\beta(i) - s(i, j_T))\}, \quad (15)$$

где максимум определяется по всевозможным путям τ из i в j_T .

Предложение 3. Если $i_1 \in \Gamma_k$, $i_2 \in \Gamma_k$, то $\lambda(i_1) = \lambda(i_2)$.

Доказательство. Пусть $\nu(i, j_T)$, $|\nu(i, j_T)|$ — соответственно, полезность и число дуг для пути τ , на котором достигается максимум в (15). Для произвольного пути из i_1 в i_2 , лежащего в Γ_k , имеющего полезность $s(i_1, i_2)$ и число дуг $|s(i_1, i_2)|$, выполняется равенство

$$V_\beta(i_1) = s(i_1, i_2) + \beta^{|s(i_1, i_2)|} V_\beta(i_2). \quad (16)$$

С другой стороны, сравнивая пути с полезностями $\nu(i_1, j_T)$ и $s(i_1, i_2) + \beta^{|s(i_1, i_2)|} + |\nu(i_2, j_T)|$, приходим к неравенству

$$\lambda(i_1) \geq -\beta^{-|s(i_1, i_2)| + |\nu(i_2, j_T)|} (V_\beta(i_1) - s(i_1, i_2) - \beta^{|s(i_1, i_2)|} \nu(i_2, j_T)).$$

Отсюда, после подстановки (16), следует, что $\lambda(i_1) \geq \lambda(i_2)$. Поскольку порядок i_1, i_2 был произволен, верно и обратное неравенство.

Предложение доказано.

Отсюда следует, что при достаточно больших T существуют траектории-решения задачи $S_\beta(j_0, j_T, T)$, проходящие через любые вершины контурной компоненты Γ_k .

Общее для всех вершин i контурной компоненты Γ_k значение $\lambda(i)$ при фиксированном j_T обозначим $W_\beta(j_T)$. Функция $W_\beta(j)$, $j \in M$, выражает максимальную прибыль, получаемую при сходе с контурной компоненты Γ_k в вершину j :

$$W_\beta(j) = \beta^{-|\nu(i, j)|} (-V_\beta(i) + \nu(i, j)).$$

Заметим, что множитель $\beta^{-|\nu(i, j)|}$ приводит полезность к моменту времени, следующему за моментом прихода траектории в вершину j .

Пусть j_1, j_2 — последовательные вершины некоторой T -шаговой оптимальной траектории после схода с контурной компоненты Γ_k . Тогда

$$W_\beta(j_2) = \beta^{-1} (W_\beta(j_1) + u(j_1, j_2)).$$

Пусть другой путь с полезностью $\eta(i, \bar{j}_1)$ составляет часть некоторой $\bar{T}$ -шаговой оптимальной траектории после схода с Γ_k . Конечная траектория, составленная из указанного пути и дуги $(\bar{j}_1, j_2)$, не обязательно оптимальна, поэтому

$$\beta^{-|\eta(i, \bar{j}_1)|-1} (-V_\beta(i) + \eta(i, \bar{j}_1) + \beta^{|\eta(i, \bar{j}_1)|} u(j_1, j_2)) \leq W_\beta(i_2),$$

т. е.

$$W_\beta(i_2) \geq \beta^{-1} (W_\beta(\bar{j}_1) + u(\bar{j}_1, j_2)).$$

Таким образом, функция $W_\beta(j)$ удовлетворяет следующему уравнению Беллмана:

$$W_\beta(j) = \beta^{-1} \max_{i \in M} \{u(i, j) + W_\beta(i)\}. \quad (17)$$

На контурном графе Γ выполняются равенства

$$W_\beta(i) = -V_\beta(i), \quad i \in \Gamma.$$

Теорема 3 (о представлении функции-значения). *При достаточно большом T имеет место представление (1) для любых $j_0, j_T \in M$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную вершину $i \in \Gamma$. Тогда

$$\begin{aligned} V_\beta(j_0) + \beta^T W_\beta(j_T) &= s(j_0, i) + (\beta^{|s(j_0, i)|} - \beta^{T-|\nu(i, j_T)|}) V_\beta(i) + \beta^{T-|\nu(i, j_T)|} \nu(i, j_T) \\ &= s(j_0, i) + \beta^{|s(j_0, i)|} c_{\sigma, i} (1 + \beta + \dots + \beta^{T-|s(j_0, i)|-|\nu(i, j_T)|-1}) \\ &\quad + \beta^{T-|\nu(i, j_T)|} \nu(i, j_T) = V_\beta(j_0, j_T, T). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Как показывает теорема, последовательность $V_\beta(j_0, j_T, T)$ не стабилизируется при конечных значениях T . В терминах [6] оператор не является нильпотентным. Тем не менее, можно вычислить приближенно значения $V_\beta(i)$, $W_\beta(i)$, $i \in M$, и использовать их для точного построения T -шаговых оптимальных траекторий при достаточно больших T . Это иллюстрирует следующий пример.

4. Численный пример

Пусть $\beta = 0,7$, $n = 4$, и длины дуг $u(i, j)$ определяются матрицей

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим последовательность степеней U^t , $t = 1, 2, \dots$, матрицы U , где $U_{ij}^t = V_\beta(i, j, T)$. Согласно теореме 3, при достаточно больших t

$$U_{ij}^t = V_\beta(i) + \beta^t W_\beta(j). \quad (18)$$

Отсюда при $t \rightarrow \infty$ следует сходимость

$$U_{ij}^t \rightarrow V_\beta(i). \quad (19)$$

Эти свойства позволяют легко найти с любой степенью точности значения $V_\beta(i)$, $W_\beta(i)$, $i \in M$. Так, вычисляем рекуррентно степени U^t и находим два значения t , для которых с достаточной точностью выполняются (18) и (19). В нашем примере это будут, например, $t = 9$ и $t = 49$.

Из U^{49} , используя (19), находим, что

$$V_\beta(1) \approx 14,1233, \quad V_\beta(2) \approx 14,3333, \quad V_\beta(3) \approx 13,3333, \quad V_\beta(4) \approx 13,0333.$$

Находим также, что

$$\beta V_\beta(1) \approx 9,8860, \quad \beta V_\beta(2) \approx 10,0333, \quad \beta V_\beta(3) \approx 9,3333, \quad \beta V_\beta(4) \approx 9,1233.$$

Видим, что равенства в (2) достигаются на дугах (1, 4), (2, 3), (3, 3), (4, 2). Это означает, что имеется единственная контурная компонента Γ , представляющая собой петлю (3, 3), а пошагово оптимальные (они же оптимальные) траектории выходят на Γ по пути {1, 4, 2, 3}.

Теперь из U^9 , используя найденные $V_\beta(i)$, по равенствам (18), находим, что

$$W_\beta(1) = W_\beta(2) \approx -14,7619, \quad W_\beta(3) \approx -13,3333, \quad W_\beta(4) \approx -13,9456;$$

$$\beta W_\beta(1) = \beta W_\beta(2) \approx -10,3333, \quad \beta W_\beta(3) \approx -9,3333, \quad \beta W_\beta(4) \approx -9,7619.$$

Видим, что равенства в (17) достигаются на дугах (3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 4). Это означает, что сход достаточно длинных T -шаговых траекторий с контурной компоненты Γ происходит по путям {3, 1, 4} и {3, 2}.

Получено полное описание любой T -шаговой оптимальной траектории при достаточно большом T . Например, траектория-решение задачи $S_\beta(1, 4, T)$ имеет следующую структуру: выход на контурную компоненту по пути {1, 4, 2, 3}; обход оптимального контура (петли (3, 3)) $T - 5$ раз; переход в вершину 4 по пути {3, 1, 4}.

5. Случай $\beta > 1$

К исследованию задачи $S_\beta(j_0, j_T, T)$ для случая $\beta > 1$ можно применить результаты, полученные выше для случая $\beta < 1$. Для этого введем понятие обратной траектории.

Последовательность

$$\tau = \{\dots, i_{k-t}, \dots, i_{k-2}, i_{k-1}, i_k\}$$

называется (бесконечной) обратной траекторией с началом i_k , если

$$u(i_{h-1}, i_h) > -\infty, \quad h = k, k-1, \dots$$

Конечный участок

$$\{i_{k-T}, i_{k-T+1}, \dots, i_{k-1}, i_k\}$$

называется T -шаговой обратной траекторией с началом i_k и концом i_{k-T} .

Положим

$$\delta = \beta^{-1}.$$

Очевидно, что $0 < \delta < 1$ при $\beta > 1$. Задача $S_\beta(j_0, j_T, T)$ эквивалентна задаче $\tilde{S}_\delta(j_0, j_T, T)$ нахождения T -шаговой обратной траектории с началом j_T и концом j_0 , максимизирующей функцию

$$\sum_{k=0}^{T-1} \delta^k u(i_{T-k-1}, i_{T-k}).$$

Пусть, как и раньше, $V_\beta(j_0, j_T, T)$ — значение задачи $S_\beta(j_0, j_T, T)$. Через $\tilde{V}_\delta(j_0, j_T, T)$ обозначим значение задачи $\tilde{S}_\delta(j_0, j_T, T)$. Нетрудно видеть, что

$$V_\beta(j_0, j_T, T) = \beta^{T-1} \tilde{V}_\delta(j_0, j_T, T).$$

Теорема 4. При $\beta > 1$ существуют такие наборы чисел $\mathcal{V}_\beta(i), \mathcal{W}_\beta(i), i \in M$, что

$$\mathcal{V}_\beta(i) = \max_{j \in M} \{u(i, j) + \beta \mathcal{V}_\beta(j)\},$$

$$\mathcal{W}_\beta(j) = \beta^{-1} \max_{i \in M} \{u(i, j) + \mathcal{W}_\beta(i)\},$$

и при достаточно больших T

$$V_\beta(j_0, j_T, T) = \mathcal{V}_\beta(j_0) + \beta^T \mathcal{W}_\beta(j_T), \quad j_0, j_T \in M.$$

Доказательство состоит в применении теоремы 3 к функции $\tilde{V}_\delta(j_0, j_T, T)$ и последующем переходе к $V_\beta(j_0, j_T, T)$.

Все, сказанное выше при $\beta < 1$ по поводу структуры оптимальных T -шаговых траекторий, переносится при $\beta > 1$ на обратные оптимальные T -шаговые траектории.

Список литературы

1. Романовский И. В. Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом. *Кибернетика* (1967) №2, 66–78.
2. Романовский И. В. *Алгоритмы решения экстремальных задач*. Наука, Москва, 1977.
3. Дудников П. И., Самборский С. Н. *Эндоморфизмы полумодуля над полукольцом с идемпотентной операцией*. Препринт. ИМ АН УССР, Киев, 1987.
4. Матвеев В. Д. Применение модели Неймана для исследования схемы динамического программирования. *Автоматика и телемеханика* (1988) №11, 62–70.
5. Матвеев В. Д. Оптимальные траектории схемы динамического программирования и экстремальные степени неотрицательных матриц. *Дискретная математика* (1990) 2, №1, 59–71.
6. Маслов В. П., Колокольцев В. Н. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении*. Физматлит, Москва, 1994.
7. Матвеев В. Д. *Плановые и рыночные механизмы управления в моделях экономической динамики*. Препринт. ИСЭП АН СССР, Ленинград, 1989.
8. Бельский В. З. Экономическая динамика: обобщающая бюджетная факторизация гейловской технологии. *Экономика и математические методы* (1990) 26, №1, 165–177.
9. Ашманов С. А. *Введение в математическую экономику*. Наука, Москва, 1984.
10. Takayama A. *Mathematical Economics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
11. McKenzie L. W. Optimal economic growth and Turnpike theorems. In: *Handbook of Mathematical Economics*. Vol. 3, North Holland, Amsterdam, 1986.
12. Boldrin M., Montrucchio L. Acyclicity and dynamic stability: generalizations and applications. *J. Economic Theory* (1995) 65, №2, 303–326.
13. Dutta P. K. What do discounted optima converge to? A theory of discount rate asymptotics in economic models. *J. Economic Theory* (1991) 55, №1, 64–94.
14. Fudenberg D., Maskin E. The folk theorem in repeated games with discounting and with incomplete information. *Econometrica* (1986) 54, 533–554.
15. Романовский И. В. Асимптотическое поведение дискретного детерминированного процесса с непрерывным множеством состояний. *Оптимальное планирование* (1967) №8, 171–193.

16. Stokey N. L., Lucas R. E. *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard Univ. Press, Cambridge, 1989.
17. Deneckere R., Pelican S. Competitive chaos. *J. Economic Theory* (1986) **40**, №1, 13–25.
18. Boldrin M., Montrucchio L. On the indeterminacy of capital accumulation paths. *J. Economic Theory* (1986) **40**, №1, 26–39.
19. Boldrin M., Montrucchio L. Acyclicity and stability for intertemporal optimization models. *International Economic Review* (1988) **29**, №1, 137–146.

Статья поступила 15.11.95.