Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Нагаев, Большие отклонения для сумм решетчатых случайных величин при выполнении условия Крамера, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 115–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:20:59

УДК 519.24

Большие отклонения для сумм решетчатых случайных величин при выполнении условия Крамера

© 1998 г. А. В. Нагаев

Рассматриваются суммы независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин. Предполагается, что одностороннее условие Крамера выполнено в некотором конечном интервале $[0, \lambda)$, то есть не существует крайнего правого сопряженного распределения. При дополнительных условиях регулярности, налагаемых на правый хвост исходного распределения, доказываются интегральная и локальная предельные теоремы о больших отклонениях любого порядка.

1. Введение и основные результаты

В настоящее время теория больших отклонений довольно развита и находит применение во многих разделах теории вероятностей. Классическая ее часть имеет дело с вероятностями больших отклонений сумм независимых случайных величин. В последующем она охватила гораздо более общие схемы. В наши планы не входит обзор этой теории. Желаящие получить о ней более полное представление могут обратиться к [1–6].

Целью данной работы является решение одной задачи, связанной с классическим результатом Крамера [7].

Пусть случайные величины $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют общее распределение $F(x)$. Положим

$$\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

и

$$F_n(x) = \mathbf{P}(\zeta_n < x), \quad P_n(x) = \mathbf{P}(\zeta_n \geq x).$$

Предположим, что выполнено одностороннее условие Крамера, то есть

$$0 = \inf(s: \mathbf{E}e^{s\xi} < \infty) < \sup(s: \mathbf{E}e^{s\xi} < \infty) = \lambda < \infty. \quad (1)$$

Условие (1) означает, что $P_1(x)$, правый хвост исходного распределения $F(x)$, показательно быстро убывает при $x \rightarrow \infty$. Через $f(s)$ обозначим производящую

функцию ξ , то есть $f(s) = \mathbf{E}e^{s\xi}$. Согласно (1) $f(s) < \infty$, по меньшей мере, для $s \in (0, \lambda)$. Положим

$$M(s) = f'(s)/f(s), \quad M = \lim_{s \rightarrow \lambda} M(s). \quad (2)$$

Поскольку

$$M'(s) = (f(s))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(s))^2 e^{sx} dF(x) > 0,$$

уравнение $x = M(s)$ имеет единственный корень при $M(0) < x < M$. Следует заметить, что $M(0)$ или конечно, или равно $-\infty$.

Определим функцию уклонений

$$\rho(x) = \inf_{0 \leq s < \lambda} f(s)e^{-sx}.$$

Легко видеть, что при $M(0) < x < M$

$$\rho(x) = f(s(x)) \exp(-xs(x)). \quad (3)$$

Далее положим

$$M_\delta = \begin{cases} M - \delta, & \text{если } M < \infty, \\ 1/\delta, & \text{если } M = \infty \end{cases} \quad (4)$$

и

$$m_\delta = \begin{cases} M(0) + \delta, & \text{если } M(0) \text{ конечно,} \\ -1/\delta, & \text{если } M(0) = -\infty. \end{cases} \quad (5)$$

С этого момента δ служит символом произвольно малого числа. Так что вовсе необязательно, что в (4) и (5) δ одно и то же.

Следующая теорема хорошо известна (см., например, VIII. 4.2 в [8]).

Теорема 1. Пусть выполнено (1). Если ξ принимает значения $a + kh$, $k \in \mathbf{Z}^1$, где h — максимальный шаг распределения, то

$$\mathbf{P}(\zeta_N = x) = B_1(x/n)n^{-1/2}\rho^n(x/n)(1 + o(1)), \quad (6)$$

тогда как

$$P_n(x) = B_2(x/n)n^{-1/2}\rho^n(x/n)(1 + o(1)) \quad (7)$$

равномерно по x , $x = na + kh$, $m_\delta \leq x/n \leq M_\delta$, где

$$B_1(x) = h(2\pi M'(s(x)))^{-1/2}, \quad B_2(x) = (2\pi M'(s(x)))^{-1/2} \frac{h}{1 - e^{-s(x)h}},$$

а $s(x)$ — корень уравнения $M(s) = x$ или, иначе, $s(x) = M^{-1}(x)$.

В связи с теоремой возникает ряд вопросов. В частности, насколько можно расширить область отклонений, сохраняя (6) и (7); какая асимптотика возникает, когда $x/n < m_\delta$ или $x/n > M_\delta$, а (6) и (7) не выполняются; какая асимптотика ожидается при $\lambda = \infty$?

Случай $x/n < m_\delta$ изучался в [9] и [10]. В данной работе нас интересует случай $x/n > M_\delta$.

Легко предвидеть, что ширина области больших отклонений, допускающей кримеровскую асимптотику, зависит от регулярности изменения $P_1(x)$. Для абсолютно непрерывных распределений эта область оказывается неограниченной сверху при условии, что исходная плотность достаточно правильно ведет себя при $x \rightarrow \infty$. Некоторые условия регулярности такого рода были предложены в [11]. Что же касается решетчатых распределений, то ситуация тут совсем иная. Например, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln P_1(x)}{x^2} > 0,$$

то область отклонений в (6) и (7) не может быть расширена (см., например, [12]). Заметим, что три только что процитированные работы посвящены случаю $\lambda = \infty$.

Когда $\lambda < \infty$, приходится различать случаи $f(\lambda) < \infty$ и $f(\lambda) = \infty$. В данной работе наше внимание сосредоточено на втором из этих случаев.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi(s), \xi_1(s), \xi_2(s) \dots$ с общей функцией распределения

$$F_s(x) = P(\xi(s) < x) = (f(s))^{-1} \int_{-\infty}^x e^{su} dF(u), \quad 0 < s < \lambda. \quad (8)$$

Это распределение называется сопряженным к $F(x)$. Согласно (2)

$$E\xi(s) = M(s), \quad D\xi(s) = M'(s). \quad (9)$$

Если $f(\lambda) = \infty$, то не существует крайнего правого сопряженного распределения $F_\lambda(x)$. Однако при определенной правильности изменения $P_1(x)$ можно выбрать $a(s)$ и $b(s)$ таким образом, чтобы для $F_s(xb(s) + a(s))$ при $s \rightarrow \lambda$ существовало предельное распределение.

Определение 1. Скажем, что функция $h(x)$ принадлежит классу $\mathcal{S}$, если

$$h(x) > 0 \text{ для } x \geq x_0 > 0 \text{ и } h(\infty) = 0;$$

$$h''(x) \downarrow 0 \text{ и } xh(x) \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$\text{для } x \geq x_0$$

$$0 \leq -\frac{h''(x)}{h'(x)} \leq \frac{2}{x}, \quad (10)$$

где x_0 — некоторая положительная постоянная.

Легко видеть, что этот класс довольно широк. Например, он содержит функции вида $x^\alpha m(x)$, $-1 \leq \alpha < 0$, где $m(x)$ медленно изменяется и является достаточно гладкой.

Обозначим

$$p(x) = P(\xi = x), \quad x \in \mathbf{Z}^1.$$

Определение 2. Скажем, что исходное распределение удовлетворяет условию (S), если при $x \rightarrow \infty$

$$p(x) = \exp \left(-\lambda x + \int_{x_0}^x h(u) du \right) (1 + o(1)),$$

где $h(x) \in \mathcal{S}$.

Определение 3. Скажем, что исходное распределение удовлетворяет условию (R), если при $x \geq x_0$

$$p(x) = x^\alpha m(x) e^{-\lambda x},$$

где $\alpha > -1$, $m(x)$ медленно изменяется при $x \rightarrow \infty$ и x_0 — положительная постоянная.

Условия (S) и (R), в частности, означают, что

$$\sup(s: f(s) < \infty) = \lambda, \quad \lim_{s \rightarrow \lambda} f(s) = \infty. \quad (11)$$

При этом классы, определяемые этими условиями, по существу, включают в себя все распределения, имеющие правильно изменяющиеся хвосты, совместимые с (11).

Следующая теорема содержит основной результат данной работы.

Теорема 2. Если выполнено одно из условий (S) или (R), то утверждение теоремы 1 справедливо равномерно по x , $x = na + kh$, $k \in \mathbb{Z}^1$, $x \geq n m_\delta$.

Стоит заметить, что аналогичное утверждение остается справедливым, когда исходное распределение абсолютно непрерывно с плотностью $p(x)$, удовлетворяющей либо (S), либо (R).

В дальнейшем c означает любую положительную постоянную, конкретное значение которой не имеет значения. В частности, это означает, что $c + c = c$, $c^2 = c$ и т. д. Через $\omega(t)$ мы обозначаем любую неотрицательную функцию со свойством $\omega(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$, а через θ любую величину, изменяющуюся в $[-1, 1]$.

2. Основная лемма и доказательство теоремы 2

Обозначим

$$p_s(x) = e^{sx} p(x) / f(s), \quad 0 \leq s \leq \lambda, \quad (12)$$

и пусть $p_{ns}(x)$ является n -й сверткой $p_s(x)$. Следующая лемма играет главную роль в доказательстве теоремы 2.

Основная лемма. Если выполнено одно из условий (S) или (R), то при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_x |\sqrt{n M'(s)} p_{ns}(x) - \varphi((x - M(s)) / \sqrt{n M'(s)})| = o(1)$$

равномерно по s , $0 < \delta \leq s \leq \lambda$.

Здесь и далее $\varphi(u)$ обозначает плотность стандартного нормального распределения.

Доказательство этой леммы будет проведено позднее. Здесь мы покажем как из нее следует утверждение теоремы 2.

Пусть ξ целочисленна. По определению

$$\mathbf{P}(\zeta_n = x) = f^n(s) e^{-sx} p_{ns}(x), \quad (13)$$

тогда как

$$\mathbf{P}(\zeta_n \geq x) = f^n(s) \sum_{k \geq x} e^{-sk} p_{ns}(k). \quad (14)$$

Положим $x = nM(s)$. Локальная часть теоремы немедленно следует из Основной леммы и (13). Чтобы доказать интегральную, запишем для произвольного $K > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{x \leq k \leq K} e^{-sx} p_{ns}(k) &= \frac{1}{\sqrt{nM'(s)}} \sum_{x \leq k \leq K} e^{-sk} \varphi((k - nM(s))/\sqrt{nM'(s)}) + o\left(\frac{e^{-sx}}{\sqrt{nM'(s)}}\right) \\ &= \frac{e^{-sx}}{\sqrt{2\pi nM'(s)}} \frac{1 - e^{-s(K+1)}}{1 - e^{-s}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{nM'(s)}}\right). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\sum_{k \geq x+K} e^{-sx} p_{ns}(k) \leq \frac{c}{\sqrt{nM'(s)}} \sum_{k \geq x+K} e^{-sk} = \frac{c}{\sqrt{nM'(s)}} e^{-s(x+K)}.$$

Поскольку K произвольно, получаем, что

$$\sum_{k \geq x} e^{-sx} p_{ns}(k) = \frac{e^{-sx}}{\sqrt{2\pi nM'(s)}} \frac{1}{1 - e^{-s}} (1 + o(1)). \quad (15)$$

Теорема теперь следует из (14) и (15).

Если ξ принимает значения $a + kh$, $0 < a < h$, $k \in \mathbb{Z}^1$, то утверждение Основной леммы приобретает вид

$$\sup_x |\sqrt{nM'(s)} p_{ns}(x) - h \varphi((x - M(s))/\sqrt{nM'(s)})| = o(1),$$

а в (15) вместо $1/(1 - e^{-s})$ имеем $h/(1 - e^{-sh})$.

3. Предварительные замечания по поводу доказательства Основной леммы

Обозначим

$$\varphi_s(t) = \mathbf{E} e^{it\xi(s)} = \frac{f(s+it)}{f(s)},$$

$$\bar{\varphi}_s(t) = \exp(-itM(s)/\sqrt{M'(s)}) \varphi_s(t/M'(s)), \quad 0 < s < \lambda.$$

По формуле обращения

$$p_{ns}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} \varphi_s^n(t) dt. \quad (16)$$

Предположим, что выполнены следующие условия: при $n \rightarrow \infty$

$$(\bar{\varphi}_s(tn^{-1/2}))^n = e^{-t^2/2} + o(1) \quad (17)$$

равномерно по t , $|t| < T$; для любого $0 < \delta < \lambda$ существует $\eta = \eta(\delta) > 0$ и $c = c(\delta) > 0$ такие, что

$$\sup_{\delta \leq s \leq \lambda} |\bar{\varphi}_s(t)| \leq e^{-t^2/2}, \quad |t| < \eta, \quad (18)$$

и

$$\sup_{\delta \leq s \leq \lambda} \sup_{\eta \leq |t| \leq \pi \sqrt{M'(s)}} |\bar{\varphi}_s(t)| < 1, \quad (19)$$

а для некоторого $n_0 \geq 2$

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \int_{-\pi \sqrt{M'(s)}}^{\pi \sqrt{M'(s)}} |\bar{\varphi}_s(t)|^{n_0} dt < \infty. \quad (20)$$

При выполнении этих условий можно применить к (16) стандартную технику (см., например, локальную предельную теорему в [13]), непосредственно ведущую к утверждению Основной леммы.

4. Доказательство Основной леммы при выполнении условия (S)

Положим

$$h(\tau, x) = \int_{x_0}^x h(u) du - \tau x. \quad (21)$$

Через $m(\tau)$ обозначим функцию обратную к $h(x)$. Пусть далее

$$\sigma^2(\tau) = -m'(\tau).$$

Лемма 1. Если $h(x) \in \mathcal{S}$, то для всех достаточно малых τ и $|u| \leq m(\tau)/(6\sigma(\tau))$

$$h(\tau, m(\tau) + u\sigma(\tau)) = h(\tau, m(\tau)) - u^2/2 + \varepsilon(\tau, u)u^3,$$

где

$$|\varepsilon(\tau, u)| \leq \varepsilon(\tau) = 5\sigma(\tau)/(6m(\tau)).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $-u^2 h'(u)$. Используя (10), получаем, что

$$(-u^2 h'(u))' = -u^2 h'(u)(2/u + h''(u)/h'(u)) \geq 0,$$

то есть $-u^2 h'(u)$ не убывает. Поскольку $uh(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$, то $-u^2 h'(u) \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\sigma(\tau)/m(\tau) = (m^2(\tau)h'(m(\tau)))^{-1/2} \rightarrow 0.$$

Интегрируя в (10) по $(x/(1+\delta), x)$, получаем, что

$$0 \leq \ln \frac{h'(x/(1+\delta))}{h'(x)} \leq 2 \ln(1+\delta)$$

или

$$1 \leq \frac{h'(x/(1+\delta))}{h'(x)} \leq 1 + 3\delta$$

при условии, что $0 < \delta \leq 1$, $x > 2x_0$. Поскольку $-h'(u)$ не возрастает,

$$-h'(x/(1+\delta)) \geq -h'(x(1-\delta/2)).$$

Поэтому

$$1 \leq \frac{h'(x(1-\delta))}{h'(x)} \leq 1 + 6\delta$$

при условии, что $0 < \delta \leq 1/2$, $x > 2x_0$. Подобным образом для $0 < \delta \leq 1/2$

$$1 - 2\delta \leq \frac{h'(x(1+\delta))}{h'(x)} \leq 1.$$

Итак,

$$|h'(x(1-\delta))/h'(x) - 1| \leq 6\delta,$$

при условии, что $|\delta| \leq 1/6$. С учетом (10) имеем

$$|h''(x + x\delta)/h'(x)| \leq 5/x, \quad |\delta| \leq 1/6.$$

В частности,

$$|h''(m(\tau) + \theta u \sigma(\tau))/h'(m(\tau))| \leq 5/m(\tau)$$

при условии, что $|u| \leq m(\tau)/(6\sigma(\tau))$.

Стоит напомнить, что $\sigma(\tau) = (h'(m(\tau)))^{-1/2}$. Следовательно,

$$h(\tau, m(\tau) + u\sigma(\tau)) = h(\tau, m(\tau)) - u^2/2 + \frac{h''(m(\tau) + \theta u \sigma(\tau))}{6(h'(m(\tau)))^{3/2}} u^3.$$

Поскольку

$$\frac{h''(m(\tau) + \theta u \sigma(\tau))}{6(h'(m(\tau)))^{3/2}} = \theta(5\sigma(\tau))/(6m(\tau)),$$

лемма доказана.

Не теряя в общности, предположим, что ξ и, следовательно, $\xi(s)$ целочисленны.

Лемма 2. Положим $\tau = \lambda - s$ и пусть $\tau \rightarrow 0$. Тогда для любого фиксированного $\nu > 0$

$$\int |x - m(\tau)|^\nu e^{sx} dF(x) = \sqrt{2\pi} b_\nu (\sigma(\tau))^{\nu+1} e^{h(\tau, m(\tau))} (1 + o(1)), \quad (22)$$

и для любого целого фиксированного $\nu > 0$

$$\int (x - m(\tau))^{2\nu+1} e^{sx} dF(x) = o((\sigma(\tau))^{2\nu+2} e^{h(\tau, m(\tau))}), \quad (23)$$

где

$$b_\nu = \int |x|^\nu \varphi(x) dx, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Пусть $g_\nu(x)$ обозначает либо $|x|^\nu$, либо $x^{2\nu+1}$. Выберем X настолько большим, что для $x > X$

$$p(x) \leq 2 \exp \left(-\lambda x + \int_{x_0}^x h(u) du \right). \quad (24)$$

Запишем представление

$$\int g_\nu((x - m)/\sigma) e^{sx} dF(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \int_{-\infty}^X g_\nu((x - m)/\sigma) e^{sx} dF(x), \\ \Sigma_2 &= \int_X^{m-l\sigma} g_\nu((x - m)/\sigma) e^{sx} dF(x), \\ \Sigma_3 &= \int_{m-l\sigma}^{m+l\sigma} g_\nu((x - m)/\sigma) e^{sx} dF(x), \\ \Sigma_4 &= \int_{m+l\sigma}^{\infty} g_\nu((x - m)/\sigma) e^{sx} dF(x). \end{aligned}$$

Здесь для краткости $m = m(\tau)$, $\sigma = \sigma(\tau)$, а

$$l = (\varepsilon(\tau))^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1/3,$$

с тем же $\varepsilon(\tau)$, что и в лемме 1. Последняя вместе с (21) приводят к соотношению

$$\begin{aligned} &e^{-h(\tau, m(\tau))} \Sigma_3 \\ &= \sum_{|k-m| \leq l\sigma} g_\nu((k - m)/\sigma) \exp(-(1/2)((k - m)/\sigma)^2 + \theta \varepsilon(\tau)((k - m)/\sigma)^3)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Принимая во внимание выбор l , продолжаем

$$\Sigma_3 = e^{h(\tau, m(\tau))} \sum_{|k-m| \leq l\sigma} g_\nu((k - m)/\sigma) \exp(-(1/2)((k - m)/\sigma)^2)(1 + o(1)),$$

откуда

$$\Sigma_3 = \sigma \sqrt{2\pi} e^{h(\tau, m(\tau))} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_{\nu}(u) du + o(1) \right). \quad (26)$$

Здесь существенно то, что $\sigma = \sigma(\tau) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Суммы Σ_2 и Σ_4 оцениваются одинаково. Оценим, например, Σ_4 . Поскольку $h(\cdot, x)$ выпукла, для $x \geq m + l\sigma$

$$h(\tau, x) \leq h(\tau, m) + \frac{h(\tau, m + l\sigma) - h(\tau, m)}{l\sigma} (x - m).$$

Применение леммы 1 дает оценку

$$h(\tau, x) \leq h(\tau, m) - \frac{l}{4\sigma} (x - m)$$

при условии, что τ достаточно мало.

Принимая во внимание (24), продолжаем

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &\leq 2e^{h(\tau, m(\tau))} \sum_{k > m + l\sigma} g_{\nu}((k - m)/\sigma) \exp(-(l/4)((k - m)/\sigma)) \\ &\leq ce^{h(\tau, m(\tau))} \sum_{k > m + l\sigma} \exp(-(l/8)((k - m)/\sigma)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_4 = o\left(\sigma e^{h(\tau, m(\tau))}\right). \quad (27)$$

Подобным же образом убеждаемся, что

$$\Sigma_2 = o\left(\sigma e^{h(\tau, m(\tau))}\right). \quad (28)$$

Очевидно, что

$$\Sigma_1 = O(m^{\nu_0}),$$

где

$$\nu_0 = \begin{cases} \nu, & \text{если } g_{\nu}(x) = |x|^{\nu}, \\ 2\nu + 1, & \text{если } g_{\nu}(x) = x^{2\nu+1}. \end{cases}$$

С помощью правила Лопиталья находим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln m(\tau)}{h(\tau, m(\tau))} = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m'(\tau)}{m^2(\tau)} = 0.$$

Это означает, что для любого N

$$m^N = o(e^{h(\tau, m(\tau))}).$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = o(e^{h(\tau, m(\tau))}). \quad (29)$$

Объединяя (25)–(29), приходим к желаемому результату. Лемма доказана.

Полагая в (22) $\nu = 0$, получаем, что

$$f(s) = f(\lambda - \tau) = \sqrt{2\pi}\sigma(\tau)e^{h(\tau, m(\tau))}(1 + o(1)). \quad (30)$$

Если же в (23) $\nu = 0$, то ввиду (2), (10) и (30)

$$\mathbf{E}\xi(s) = M(s) = m(\tau) + o(\sigma(\tau)). \quad (31)$$

Наконец, полагая в (22) $\nu = 2, 3$, находим, что

$$\mathbf{D}\xi(s) = M'(s) = \sigma^2(\tau)(1 + o(1)) \quad (32)$$

и

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \mathbf{E}|\xi(s) - \mathbf{E}\xi(s)|^3 (\mathbf{D}\xi(s))^{-3/2} < \infty. \quad (33)$$

Пусть

$$\Delta_s(x) = |\sqrt{M'(s)}p_s(x) - \varphi((x - M(s))/\sqrt{M'(s)})|.$$

Лемма 3. Если условие (S) выполнено, то при $s \rightarrow \lambda$

$$\sup_x \Delta_s(x) = o(1).$$

Доказательство. Будем писать для краткости M , M_1 , m и σ вместо, соответственно, $M(s)$, $\sqrt{M'(s)}$, $m(\tau)$ и $\sigma(\tau)$. Если $|x - M|/M_1 < X$, то ввиду (31) и (32) для всех достаточно малых τ , по меньшей мере, выполнено неравенство $|x - m| < 2\sigma X$. Из (31), (32) и леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} h(\tau, x) &= h(\tau, m) - (1/2)((x - m)/\sigma)^2 + o(1) \\ &= h(\tau, m) - (1/2)((x - M)/M_1)^2 + o(1) \end{aligned}$$

равномерно по x , $|x - M|/M_1 < X$. Из (12) и условия (S) следует, что

$$\sup_{|x - M|/M_1 < X} \Delta_s(x) = o(1). \quad (34)$$

Поскольку $h(\cdot, x)$ при $x > m$ убывает, то принимая во внимание (24), получаем оценку

$$\sup_{x \geq M + XM_1} \Delta_s(x) \leq \varphi(X) + 2(M_1/f(s))e^{h(\tau, M + XM_1)}$$

при условии, что τ достаточно мало. Используя (30), (32) и (34), находим, что

$$\sup_{x \geq M + XM_1} \Delta_s(x) \leq 4\varphi(X).$$

Подобным же образом находим, что

$$\sup_{X \leq x \leq M - XM_1} \Delta_s(x) \leq 4\varphi(X).$$

Очевидно, что

$$\sup_{x \leq X} \Delta_s(x) \leq cM_1 e^{\lambda X} / f(s) = \omega(1/\tau).$$

Остается объединить полученные оценки. Лемма доказана.

В частности, из леммы 3 следует, что при $s \rightarrow \lambda$

$$\sup_x |F_s(u\sqrt{M'(s)} + M(s)) - \Phi(u)| = o(1). \quad (35)$$

Из (33) немедленно следуют соотношения (17) и (18). Остается установить (19) и (20). Второе из этих соотношений прямо следует из леммы 3, если заметить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_s(t)|^2 dt = \sum_x p_s^2(x) \leq \sup_x p_s(x).$$

Для того чтобы установить (19), достаточно доказать, что

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \sup_{\eta \leq |t| \leq \pi\sqrt{M'(s)}} |\varphi_s(t/\sqrt{M'(s)})| < 1.$$

Из (35) следует, что для любого фиксированного $T > 0$

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \sup_{\eta \leq |t| \leq T} |\varphi_s(t/\sqrt{M'(s)})| = e^{-\eta^2/2}.$$

Покажем, что

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \sup_{T \leq |t| \leq \pi\sqrt{M'(s)}} |\varphi_s(t/\sqrt{M'(s)})| < 1.$$

Очевидно, что

$$1 - |\varphi_s(t)|^2 = 2 \sum_x \sin^2(tx/2) \mathbf{P}(\xi(s) - \xi_1(s) = x).$$

Напомним, что $\xi(s)$ и $\xi_1(s)$ независимы и имеют общее распределение (8).

Пусть

$$X_t = (x: |x| < \sqrt{M'(s)}, \min_{k \in \mathbb{Z}^1} |tx - 2\pi k| \geq \pi/4).$$

Тогда

$$1 - |\varphi_s(t)|^2 \geq 2 \sin^2(\pi/8) \sum_{x \in X_t} \mathbf{P}(\xi(s) - \xi_1(s) = x).$$

Далее,

$$\sum_{x \in X_t} \mathbf{P}(\xi(s) - \xi_1(s) = x) \geq |(x: x \in X_t)| \min_{|x| \leq \sqrt{M'(s)}} \mathbf{P}(\xi(s) - \xi_1(s) = x).$$

Из леммы 3 следует, что

$$\min_{|x| \leq \sqrt{M'(s)}} \mathbf{P}(\xi(s) - \xi_1(s) = x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-1/4} + o(1).$$

При этом

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \frac{|(x: x \in X_t)|}{\sqrt{M'(s)}} > 0$$

равномерно по t , $|t| \geq T/\sqrt{M'(s)}$. Тем самым, (19) установлено и, следовательно, Теорема 2 доказана.

5. Доказательство Основной леммы при выполнении условия (R)

Пусть $l(x)$ обозначает любую функцию со свойством

$$\lim_{x \rightarrow \infty} l(x)/m(x) = 1.$$

Следующая лемма является аналогом леммы 2.

Лемма 4. Если условие (R) выполнено, то для любого фиксированного $\nu \geq 0$ при $s \rightarrow \lambda$

$$\sum_x x^\nu e^{sx} p(x) = \Gamma(\nu + \alpha + 1) \tau^{-(\nu + \alpha + 1)} l(1/\tau), \quad \tau = \lambda - s.$$

Доказательство. Запишем для $\varepsilon > 0$, $X > 0$

$$\sum_x x^\nu e^{sx} p(x) = \Sigma_5 + \Sigma_6 + \Sigma_7 + \Sigma_8, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_5 &= \sum_{x \leq X} x^\nu e^{sx} p(x), \\ \Sigma_6 &= \sum_{X < x < \varepsilon/\tau} x^\nu e^{sx} p(x), \\ \Sigma_7 &= \sum_{\varepsilon/\tau \leq 1/(\varepsilon\tau)} x^\nu e^{sx} p(x), \\ \Sigma_8 &= \sum_{x > 1/(\varepsilon\tau)} x^\nu e^{sx} p(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим хорошо известное представление Караматы (см., например, VIII.9 в [14])

$$m(x) = a(x) \exp \left(\int_1^x u^{-1} \omega(u) du \right),$$

где $a(x) \rightarrow a \neq 0$ при $x \rightarrow \infty$. Из этого представления следует, что для любого $\delta > 0$ найдется $X > 0$ такое, что

$$\frac{1}{2} \min((x/y)^\delta, (y/x)^\delta) \leq m(x)/m(y) \leq 2 \max((x/y)^\delta, (y/x)^\delta) \quad (37)$$

при условии, что $\min(x, y) \geq X$. Не теряя в общности, можно считать X целым.

Очевидно,

$$\Sigma_5 \leq X^\nu e^{\lambda X}. \quad (38)$$

Согласно условию (R)

$$\begin{aligned}\Sigma_7 &= \sum_{\varepsilon \leq x\tau \leq 1/\varepsilon} x^{\nu+\alpha} e^{-\tau x} m(x) \\ &= m(1/\tau) \sum_{\varepsilon \leq x\tau \leq 1/\varepsilon} x^{\nu+\alpha} e^{-\tau x} (1 + o(1)) \\ &= \tau^{-(\nu+\alpha+1)} m(1/\tau) \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} u^{\nu+\alpha} e^{-u} du (1 + o(1)).\end{aligned}\quad (39)$$

В силу выбора X

$$\Sigma_6 \leq 2m(1/\tau) \tau^{-\delta} \sum_{X < x < \varepsilon/\tau} x^{\nu+\alpha-\delta} e^{-x\tau}. \quad (40)$$

Если $-1 < \nu + \alpha - \delta \leq 0$, то

$$\sum_{X < x < \varepsilon/\tau} x^{\nu+\alpha-\delta} e^{-x\tau} \leq \int_{X-1}^{\varepsilon/\tau} u^{\nu+\alpha-\delta} e^{-\tau u} du.$$

Если $\nu + \alpha - \delta > 0$, то

$$\sum_{X < x < \varepsilon/\tau} x^{\nu+\alpha-\delta} e^{-x\tau} \leq \int_X^{\varepsilon/\tau+1} u^{\nu+\alpha-\delta} e^{-\tau u} du$$

при условии, что ε достаточно мало. Так что

$$\sum_{X < x < \varepsilon/\tau} x^{\nu+\alpha-\delta} e^{-x\tau} \leq \tau^{-(\nu+\alpha-\delta+1)} \omega(1/\varepsilon). \quad (41)$$

Из (40) и (41) следует, что

$$\Sigma_6 = \theta m(1/\tau) \tau^{-(\nu+\alpha+1)} \omega(1/\varepsilon). \quad (42)$$

Далее,

$$\Sigma_8 \leq 2m(1/\tau) \tau^{\delta} \sum_{x\tau > 1/\varepsilon} x^{\nu+\alpha+\delta} e^{-x\tau}.$$

Повторяя рассуждения, приводящие к (42), получаем, что

$$\Sigma_8 = \theta m(1/\tau) \tau^{-(\nu+\alpha+1)} \omega(1/\varepsilon). \quad (43)$$

Остается собрать вместе (36), (38), (39), (42) и (43) и принять во внимание произвольность ε . Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что при $s \rightarrow \lambda$

$$\begin{aligned}f(s) &= \Gamma(\alpha + 1) \tau^{-(\alpha+1)} l(1/\tau), \\ \tau^{\nu} \mathbf{E} \xi^{\nu}(s) &= \frac{f^{(\nu)}(s)}{f(s)} = \frac{\Gamma(\nu + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} + o(1), \\ \mathbf{D} \xi(s) &= (\alpha + 1) \tau^{-2} (1 + o(1)), \\ \mathbf{E} |\xi(s)|^3 &= (\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1) \tau^{-3} (1 + o(1)).\end{aligned}\quad (44)$$

Из (44) немедленно получаем (33) и, следовательно, (17) и (18).

Более того, из (44) следует, что все моменты $\tau\xi(s)$ при $\tau \rightarrow 0$ сходятся к соответствующим моментам стандартного гамма-распределения с параметром формы $\alpha + 1$.

Пусть

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha e^{-x} / \Gamma(\alpha + 1), & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Лемма 5. Если условие (R) выполнено, то для любого фиксированного $\eta > 0$ при $\tau \rightarrow 0$

$$\sup_{x\tau \geq \eta} |\tau^{-1} p_s(x) - g_\alpha(x\tau)| = o(1).$$

Доказательство. Обозначим

$$\Delta_s(x) = |\tau^{-1} p_s(x) - g_\alpha(x\tau)|.$$

Из леммы 4 и условия (R) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{\eta \leq x\tau \leq 1/\varepsilon} \Delta_s(x) &= \sup_{\eta \leq x\tau \leq 1/\varepsilon} |\tau^{-1} e^{-\tau x} x^\alpha m(x)/f(s) - g_\alpha(x\tau)| \\ &= \sup_{\eta \leq x \leq 1/\varepsilon} g_\alpha(x) |\Gamma(\alpha + 1) \tau^{(\alpha+1)} m(x/\tau)/f(s) - 1| = o(1). \end{aligned}$$

Применение (37) и (44) приводит к оценке

$$\begin{aligned} \sup_{x\tau \geq 1/\varepsilon} \Delta_s(x) &\leq g_\alpha(1/\varepsilon) + (f(s))^{-1} \tau^{-1} \sup_{x\tau \geq 1/\varepsilon} e^{-\tau x} x^\alpha m(x) \\ &\leq g_\alpha(1/\varepsilon) + c \sup_{x \geq 1/\varepsilon} e^{-x} x^{\alpha+\delta} = \omega(1/\varepsilon). \end{aligned}$$

Поскольку ε произвольно, лемма доказана.

С помощью леммы 5 получаем, что

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \sup_{\eta \leq |t| \leq T} |\varphi_s(t/\sqrt{M'(s)})| = |1 - i\eta/\sqrt{\alpha + 1}|^{-(\alpha+1)}.$$

При выполнении условия (R) (20) устанавливается так же, как это делалось при выполнении (S). Так что остается доказать (19). Если $\alpha \geq 0$, то рассуждения, использованные в предыдущем параграфе не требуют изменений. Однако в случае, когда $-1 < \alpha < 0$, их следует слегка изменить.

Лемма 6. Пусть в условии (R) $-1 < \alpha < 0$ и $1 < \gamma < -1/\alpha$. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \sum_x (p_s(x))^\gamma = 0.$$

Доказательство. Запишем

$$\sum_x (p_s(x))^\gamma = \Sigma_9 + \Sigma_{10} + \Sigma_{11},$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_9 &= \sum_{x \leq X} (p_s(x))^\gamma, \\ \Sigma_{10} &= \sum_{X < x < 1/\tau} (p_s(x))^\gamma, \\ \Sigma_{11} &= \sum_{x > 1/\tau} (p_s(x))^\gamma.\end{aligned}$$

Первое из соотношений (44) приводит к оценке

$$\Sigma_9 \leq (f(s))^{-\gamma} e^{\lambda \gamma X} \sum_{x \leq X} (p_s(x))^\gamma \leq c(\tau^{\alpha+1}/l(1/\tau))^\gamma.$$

Ввиду (37) и леммы 4

$$\begin{aligned}\Sigma_{10} &\leq 2(l(1/\tau)/f(s))^\gamma \sum_{X < x < 1/\tau} (x^\alpha (x\tau)^{-\eta})^\gamma \\ &\leq c\tau^{\gamma(\alpha+1-\eta)} \sum_{x \leq 1/\tau} x^{\gamma(\alpha-\eta)} \leq c\tau^{\gamma-1}\end{aligned}$$

при условии, что $0 < \eta < 1/\gamma + \alpha$. Наконец,

$$\Sigma_{11} \leq c\tau^{\gamma-1} \sum_{x\tau > 1} ((x\tau)^{\alpha+\eta} e^{-\tau x})^\gamma \leq c\tau^{\gamma-1}.$$

Объединяя оценки и принимая во внимание выбор γ , получаем, что

$$\sum_x (p_s(x))^\gamma \leq c\tau^{\gamma-1}.$$

Лемма доказана.

Приступим к доказательству (19). Ясно, что только случай $-1 < \alpha < 0$ заслуживает нашего внимания. Пусть как и в лемме 6 $1 < \gamma < -1/\alpha$. Удобно выбрать γ так, чтобы $n_0 = \gamma/(\gamma - 1)$ было целым. Тогда из теоремы Хаусдорфа-Юнга (см., например, гл. XII в [15]) получаем оценку

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_s(t)|^{n_0} dt \leq \left(\sum_x (p_s(x))^\gamma \right)^{n_0/\gamma}.$$

Теперь (19) непосредственно следует из леммы 6. Тем самым, теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent variables. *Ann. Prob.*(1979) **7**, 745–789.
2. Розовский Л. В. Вероятности больших отклонений. *Теория вероятн. и ее применения* (1993) **38**, 79–109.
3. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. *Труды Института математики СОРАН* (1992) **2**, 3–220.
4. Dembo A., Zeitouni O. *Large Deviations Techniques and Applications*. Jones and Bartlett, Boston, 1993.
5. Deuschel J. D., Strook D. W. *Large Deviations*. Academic Press, London, 1989.
6. Ellis R. S. *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*. Springer, Berlin, 1985.
7. Крамер Г. Об одной новой предельной теореме теории вероятностей. *Успехи матем. наук* (1944) **10**, 166–178.
8. Петров В. В. *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1965.
9. Золотарев В. М. Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие отклонения. *Труды 6-го Всесоюзного Совецания по теории вероятностей и матем. статистике*. Госиздат, Вильнюс, 1962, 43–47.
10. Ким Л. В., Нагаев А. В. О несимметричной проблеме больших отклонений. *Теория вероятн. и ее применения* (1975) **20**, 58–68.
11. Нагаев А. В. Большие отклонения для одного класса распределений. В кн.: *Предельные теоремы теории вероятностей*. Изд. АН УзССР, Ташкент, 1963, с.55–68.
12. Нагаев А. В., Локальные предельные теоремы с учетом больших отклонений. В кн.: *Предельные теоремы и вероятностные процессы*. ФАН, Ташкент, 1967, с.71–88.
13. Гнеденко Б. В. *Введение в теорию вероятностей*. Наука, Москва, 1965.
14. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее применения*. Том 2. Мир, Москва, 1984.
15. Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*. Том 2. Мир, Москва, 1965.

Статья поступила 18.03.1998.