Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Козлов, О больших отклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 2, 29–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:55:59

УДК 519.2

О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков

© 2006 г. М. В. Козлов

Рассматривается ветвящийся процесс Z_n с геометрическим распределением числа непосредственных потомков в случайной среде, представляющей собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (модель Смита–Вилкинсона). Найдена асимптотика вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n > \theta n)$, $\theta > 0$, в предположении, что шаг сопровождающего случайного блуждания S_n удовлетворяет условию Крамера. Эта асимптотика следует за асимптотикой вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(S_n > \theta n)$ в случаях надкритического, критического, умеренно и промежуточно докритического процессов. В строго докритическом случае для θ , больших некоторого θ^* , сохраняется та же асимптотика (при $\theta \leq \theta^*$ вероятности больших уклонений имеют другую асимптотику).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00700, и поддержке DFG, проект 436 RUS 113/722.

1. Введение

Рассмотрим марковскую цепь Z_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, $Z_0 = 1$, с целыми неотрицательными состояниями и вероятностями перехода

$$P_{ij} = \int P_{ij}(y) Q(dy), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

представляющими собой смесь вероятностей перехода $P_{ij}(y)$, соответствующих при каждом фиксированном $y \in \mathcal{Y}$ некоторому ветвящемуся процессу Гальтона–Ватсона с дробно-линейной производящей функцией. Именно,

$$f_y(s) = 1 - \left(\frac{1}{a(y)(1-s)} + \frac{b(y)}{2a(y)^2} \right)^{-1}, \quad a(y), b(y) \geq 0, \\ \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(y) s^j = f_y(s)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad |s| \leq 1. \quad (2)$$

Предполагается, что

$$a(y) = f'_y(1), \quad b(y) = f''_y(1)$$

— измеримые функции на некотором измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$, Q — вероятностная мера на нем, Q -мера множества тех y , для которых $a(y) = 0$, равна нулю.

Марковскую цепь Z_n , как и обычный ветвящийся процесс, полезно определить в терминах случайных величин. Введем две системы случайных элементов, последовательность $\eta_n = (\eta_0 = \eta, \eta_1, \eta_2, \dots)$ независимых одинаково распределенных случайных элементов пространства $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ с распределением вероятностей Q , называемую случайной средой, и матрицу ζ_{in} , $i \geq 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, случайных величин построчно независимых, а в пределах строки условно независимых относительно случайной среды η с общей (не зависящей от i) условной производящей функцией

$$\mathbf{E}(s^{\zeta_{in}} | \eta_n) = f_{\eta_n}(s) \text{ п.н., } |s| \leq 1.$$

Нетрудно видеть, что рекуррентное соотношение

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \zeta_{in}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad Z_0 = 1,$$

(где сумма по пустому множеству индексов полагается равной нулю) задает марковскую цепь с вероятностями перехода (1). Процесс (Z_n) называют ветвящимся процессом в случайной среде.

Благодаря тому, что класс дробно-линейных преобразований замкнут относительно суперпозиции, справедлива следующая формула (см. [1]):

$$1 - f_{y_0}(f_{y_1}(\dots f_{y_m}(s) \dots)) = \left(\left((1-s) \prod_{i=0}^m a(y_i) \right)^{-1} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{b(y_j)}{2a(y_j)^2} \left(\prod_{i=0}^{j-1} a(y_i) \right)^{-1} \right)^{-1}.$$

Полагая

$$X_i = \ln f'_{\eta_{i-1}}(1), \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad i, n = 1, 2, \dots, \quad S_0 = 0, \quad (3)$$

$$U_j = e^{-S_j}, \quad V_m = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{b(\eta_j)}{2a(\eta_j)^2} U_j, \quad j \geq 0, \quad m \geq 1, \quad (4)$$

получаем, что

$$\mathbf{E}(s^{Z_n} | \eta_n) = 1 - \{(1-s)^{-1} U_n + V_n\}^{-1} \text{ п.н.} \quad (5)$$

Всюду далее предполагается, что случайная величина $X = \ln f'_\eta(1)$ не вырождается в постоянную. Элементарные выкладки приводят к формуле

$$\mathbf{P}(Z_n > k) = \mathbf{E}\{(V_n + U_n)^{-1} (1 + V_n^{-1} U_n)^{-k}\}. \quad (6)$$

Случайное блуждание (S_n) называется сопровождающим для ветвящегося процесса в случайной среде (Z_n) , оно входит явным образом в точные формулы (5), (6) для условной производящей функции случайной величины Z_n и для хвостов распределения вероятностей Z_n . Оно, однако, имеет принципиальное значение и в случае произвольных

(а не только дробно-линейных) производящих функций $f_y(s)$. Заметим, что при $Z_n \gg 1$ справедливо приближенное равенство

$$\frac{Z_{n+1}}{Z_n} = Z_n^{-1} \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{in} \cong f'_{\eta_n}(1),$$

соответствующее условному закону больших чисел. В результате

$$\ln Z_{n+1} \cong \ln Z_n + X_{n+1}, \quad Z_n \gg 1,$$

а приближенное равенство тем точнее, чем больше Z_n . Указанное соображение служит ключом к многим результатам теории ветвящихся процессов в случайной среде (см., например, [2–7] и приведенную там библиографию). В настоящей работе мы показываем, что при определенных условиях большие отклонения процесса $\ln Z_n$ в частном случае (20) следуют за большими отклонениями сопровождающего блуждания S_n , если шаг этого блуждания подчиняется условию Крамера.

2. Сведения из теории суммирования независимых случайных величин

Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с невырожденной функцией распределения $F(x)$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_0 = 0.$$

Введем ряд обозначений, полагая, что соответствующие величины определены равенствами

$$\begin{aligned} R(h) &= \mathbf{E} e^{hX} = \int e^{hx} dF(x), & \mu &= \mathbf{E} X, & \sigma^2 &= \mathbf{D} X, \\ \rho &= \mathbf{E} (X - \mu)^3 \sigma^{-3}, & \rho^* &= \mathbf{E} |X - \mu|^3 \sigma^{-3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем говорить, что случайная величина X и ее функция распределения F_X удовлетворяют (двустороннему) условию Крамера, если $R(h) < \infty$ в некоторой окрестности точки $h = 0$. Если $R(h) < \infty$ в правой полукрестности точки $h = 0$, то говорим, что выполнено правостороннее условие Крамера.

В предположении, что выполнено правостороннее условие Крамера и μ конечно, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} h^+ &= \sup\{h: R(h) < \infty\}, & m(h) &= R'(h)/R(h), \\ \sigma^2(h) &= m'(h) (> 0), & \theta^+ &= \lim_{h \rightarrow h^+} m(h), \\ h(\theta) &\text{— корень уравнения } m(h) = \theta & \text{при } \mu < \theta < \theta^+, \\ \Lambda(\theta) &= h(\theta)\theta - \ln R(h(\theta)), & S_n^{(h)} &= \sum_{i=1}^n X_i^{(h)}, \\ F^{(h)}(x) &= R(h)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{hy} dF(y), & 0 < h < h^+, \end{aligned} \quad (8)$$

где $X^{(h)}, X_1^{(h)}, X_2^{(h)}, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F^{(h)}$.

Отметим, что $\mathbf{E}X^{(h)} = m(h)$, $\mathbf{D}X^{(h)} = \sigma^2(h)$. В случае необходимости в обозначениях (7), (8) будет вводиться нижний индекс, указывающий, о какой случайной величине идет речь: $R_X(h)$, $m_X(h)$, h_X^+ и т. д.

Имеет место следующая асимптотика вероятностей больших уклонений для сумм S_n [8]: если $n \rightarrow \infty$, то равномерно по θ из любого компакта, содержащегося в (μ, θ^+) ,

$$\mathbf{P}(S_n > \theta n) \sim (\sqrt{2\pi n h(\theta) \sigma(h(\theta))})^{-1} \exp\{-\Lambda(\theta)n\}, \quad (9)$$

если функция распределения F нерешетчатая; в решетчатом случае в правую часть (9) следует добавить множитель

$$d(1 - \exp\{-dh(\theta)\}), \quad (10)$$

где d — максимальный шаг решетки. Здесь и далее $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$ означает, что $a_n/b_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Отметим еще неравенства

$$\mathbf{P}(S_n > x) = \mathbf{P}(e^{hS_n} > e^{hx}) \leq e^{-hx} R(h)^n, \quad h > 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(S_n > \theta n) \leq e^{-h(\theta)\theta n} R(h(\theta))^n = \exp\{-\Lambda(\theta)n\}. \quad (12)$$

Имеет место следующее неравенство для уклонения распределения вероятностей случайной величины S_n от нормальной функции распределения $\Phi(x)$ [9]:

$$\left| \mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{\mathcal{A}\rho^*}{\sqrt{n}(1 + |x|^3)}, \quad (13)$$

где $\mathcal{A}$ — универсальная постоянная. В частности, отбрасывая в (13) множитель, зависящий от x , получаем неравенство Берри-Эссеена.

Введем обозначение

$$\Psi_r^{(n)}(x) = \Phi(x) + \frac{r}{6\sqrt{n}}(x^2 - 1)\varphi(x), \quad \varphi(x) = \Phi'(x), \quad r > 0. \quad (14)$$

Если $\rho^* < \infty$, то в случае нерешетчатой функции распределения F при $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Psi_r^{(n)}(x) + o(1/\sqrt{n}), \quad (15)$$

равномерно по x , в решетчатом случае (15) справедливо в средних точках решетки с шагом $d_n = d/(\sigma\sqrt{n})$ (см. [10]). Положим при $r > 0$

$$\psi_r^{(n)}(x) = \frac{d\Psi_r^{(n)}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1 + \frac{r}{6\sqrt{\pi}}(x^3 - 3x)\right). \quad (16)$$

Заметим, что при всех x, n

$$|\psi_r^{(n)}(x)| \leq \mathcal{A}_r e^{-x^2/4}, \quad (17)$$

4. Доказательство теоремы 1

В предположении (20) вероятность (21) может быть представлена в виде (см. (6))

$$\mathbf{E}\{V_{n+1}^{-1}(1 + V_n^{-1}U_n)^{-k_n}\}, \quad U_j = e^{-S_j}, \quad V_j = \sum_{i=0}^{j-1} U_i, \quad (24)$$

где k_n обозначает целую часть числа $e^{\theta n}$. Возьмем χ из условия $\theta/2 < \chi < \theta$ и представим (24) в виде суммы

$$E_1^{(n)} + E_2^{(n)}, \quad E_1^{(n)} = \mathbf{E}\{\dots; S_n \geq \chi n\}, \quad E_2^{(n)} = \mathbf{E}\{\dots; S_n < \chi n\}, \quad (25)$$

где многоточие заменяет выражение, стоящее под знаком математического ожидания в (24). Слагаемое $E_2^{(n)}$ оценивается достаточно просто и при $n \rightarrow \infty$ оказывается величиной бесконечно малой по сравнению с $E_1^{(n)}$ (см. лемму 12). Вывод асимптотики слагаемого $E_1^{(n)}$ содержится в леммах 1–11.

Представим $E_1^{(n)}$ в интегральной форме:

$$\int_{s_n \geq \chi n} \dots \int \left(\sum_{j=0}^n e^{-s_j} \right)^{-1} \left(1 + \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{-s_j} \right)^{-1} e^{-s_n} \right)^{-k_n} \prod_{i=1}^n dF(x_i), \quad (26)$$

где $s_j = x_1 + \dots + x_j$. Фиксируем θ и введем упрощенный вариант обозначений (7), (8), полагая

$$\begin{aligned} \bar{h} &= h(\theta), \quad \bar{\sigma}^2 = \sigma(\bar{h})^2, \quad \bar{F} = F(\bar{h}), \quad \bar{X} = X(\bar{h}), \quad \bar{\rho} = \rho_{\bar{X}}, \\ \bar{\rho}^* &= \rho_{\bar{X}}^*, \quad \bar{S}_j = S_j^{(\bar{h})}, \quad \bar{V}_n = \sum_{j \leq n-1} e^{-\bar{S}_j}, \quad \bar{V}_\infty = \bar{V}. \end{aligned} \quad (27)$$

Проведем в интеграле (26) замену меры по формуле (преобразование Крамера)

$$\prod_{i=1}^n dF(x_i) = R(\bar{h})^n e^{-\bar{h}s_n} \prod_{i=1}^n d\bar{F}(x_i).$$

Вынесем за знак интеграла множитель $R(\bar{h})^n e^{-\bar{h}\theta n}$, так что остающийся интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{s_n \geq \chi n} \dots \int e^{-\bar{h}(\bar{S}_n - \theta n)} \left(\sum_{j=0}^n e^{-s_j} \right)^{-1} \left(1 + \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{-s_j} \right)^{-1} e^{-s_n} \right)^{-k_n} \prod_{i=1}^n d\bar{F}(x_i) \\ = \mathbf{E}\{e^{-\bar{h}(\bar{S}_n - \theta n)} \bar{V}_{n+1}^{-1} (1 + \bar{V}_n^{-1} e^{-\bar{S}_n})^{-k_n}; \bar{S}_n \geq \chi n\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметив, что $\mathbf{E}\bar{X}_i = \theta$, положим

$$\hat{X}_i = \bar{X}_i - \theta, \quad \hat{S}_n = \bar{S}_n - \theta n, \quad (29)$$

$$g_n(u, v) = (v + e^{-\theta n - u})^{-1} (1 + v^{-1} e^{-\theta n - u})^{-k_n}, \quad v \geq 1, \quad (30)$$

$$I_n(A \times B) = \int_A \int_B e^{-\bar{h}u} g_n(u, v) \mathbf{P}(\hat{S}_n \in du, \bar{V}_n \in dv) \quad (31)$$

где постоянная $\mathcal{A}_r$ зависит от r . Из (15)–(17) легко следует, что при любом $\Delta > 0$ и всех a, b таких, что $b - a \geq \Delta$, выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(S_n \in (a, b]) \leq \mathcal{A}'(b - a)/(\sigma\sqrt{n}), \quad (18)$$

где постоянная $\mathcal{A}'$ зависит от F и Δ ; и равномерно по $a \leq b$ таким, что $a, b = o(\sqrt{n})$ (то есть для $|a|, |b| \leq \varepsilon_n \sqrt{n}$ и любой последовательности $\varepsilon_n > 0$, стремящейся к нулю при $n \rightarrow \infty$) справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(S_n - n\mu \in (a, b]) = (b - a)/(\sigma\sqrt{2\pi n}) + o(1/\sqrt{n}) \quad (19)$$

при $n \rightarrow \infty$.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Предположим, что условное распределение вероятностей числа непосредственных потомков частицы при условии среды является геометрическим (см. (2)),*

$$\frac{b(y)}{2a(y)^2} = 1, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad (20)$$

случайная величина $X = \ln f'_\eta(1)$ удовлетворяет правостороннему условию Крамера и $0 \leq \mu = \mathbf{E}X < \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно по θ из любого компакта, содержащегося в (μ, θ^+) , имеет место асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_n > \theta n) \sim I(\theta)\mathbf{P}(S_n > \theta n), \quad (21)$$

где

$$I(\theta) = \Gamma(h(\theta)) \int_1^\infty v^{h(\theta)-1} dG_\theta(v), \quad (22)$$

$$G_\theta(v) = \mathbf{P}\left(\sum_{j=0}^\infty \exp\{-S_j^{(h(\theta))}\} \leq v\right) \quad (23)$$

и $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Заметим, что для вероятностей $\mathbf{P}(S_n > \theta n)$ справедлива асимптотика (9).

Теорема 2. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 1, кроме условия $\mu \geq 0$, которое заменим на $\mu < 0$. Предположим, что*

$$h(0) < h^+, \quad m(h(0)) = 0 = R'(h(0)).$$

Тогда асимптотика (21) имеет место равномерно по θ из любого компакта, содержащегося в $(0, \theta^+)$, если $h(0) \leq 1$, и содержащегося в (θ^*, θ^+) , если $h(0) > 1$, и найдется такое (единственное) $h^* \in (1, h^+)$, что $R(h^*) = R(1)$, при этом θ^* определяется уравнением $m(\theta^*) = h^*$.

при $A \subseteq (-\infty, \infty)$, $B \subseteq [1, \infty)$. В этих обозначениях математическое ожидание (28) есть $I_n([-(\theta - \kappa)n, \infty) \times [1, \infty))$. Далее мы рассматриваем только нерешетчатый случай, для решетчатой функции распределения F видоизменения в рассуждениях не представляют труда. Мы покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$I_n([-(\theta - \kappa)n, \infty) \times [1, \infty)) \sim I(\theta)(\sqrt{2\pi n \bar{h} \bar{\sigma}})^{-1}, \quad (32)$$

откуда следует (см. (8), (9), что при $n \rightarrow \infty$

$$E_1^{(n)} = R(\bar{h})^n e^{-\bar{h}\theta n} I_n([-(\theta - \kappa)n, \infty) \times [1, \infty)) \sim I(\theta) \mathbf{P}(S_n > \theta n). \quad (33)$$

Перейдем к выводу основного предельного соотношения (32). Отметим, что некоторые из нижеследующих лемм устанавливаются при более широких предположениях, чем это требуется для доказательства (32).

Лемма 1 ([11]). Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность (невыврождающихся в постоянную) независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих правостороннему условию Крамера. Пусть

$$\mu_\xi = \mathbf{E}\xi < 0, \quad q = \sup\{h: R_\xi(h) \leq 1\}, \quad \eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad \eta_0 = 0, \quad \bar{\eta}_n = \max_{0 \leq k \leq n} \eta_k.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\bar{\eta}_n \geq y) \leq e^{-qy}, \quad y \geq 0. \quad (34)$$

Доказательство. Введем несобственную случайную величину τ_y — момент первого попадания случайного блуждания η_n в $[y, \infty)$. При $h > 0$

$$\begin{aligned} R_\xi(h)^n &= \mathbf{E}e^{h\eta_n} \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\{e^{h\eta_k}; \tau_y = k\} \mathbf{E}e^{h(\eta_n - \eta_k)} \\ &\geq R_\xi(h)^n e^{hy} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\tau_y = k) R_\xi(h)^{-k}. \end{aligned}$$

Функция $R_\xi(h)$ строго выпукла, $R'_\xi(0) = \mu_\xi < 0$, $R_\xi(0) = 1$, так что $R_\xi(h) < 1$ в некоторой правой полуокрестности точки $h = 0$. Поэтому указанное в условии леммы число q положительно, а при $0 < h < q$

$$\mathbf{P}(\bar{\eta}_n \geq y) = \mathbf{P}(\tau_y \leq n) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\tau_y = k) R_\xi(h)^{-k} \leq e^{-hy}.$$

Остается перейти в этом неравенстве к пределу при $h \rightarrow q$.

Лемма 2. Для любого $0 \leq \alpha < \theta$ существует такое $q_\alpha > 0$, что

$$\mathbf{P}(\min_{k \geq 0} (\bar{S}_k - \alpha k) \leq -y) \leq e^{-q_\alpha y}, \quad y > 0, \quad (35)$$

причем $q_\alpha = \bar{h}$ при $\alpha \leq \bar{\alpha} = \bar{h}^{-1} \ln R_X(\bar{h})$.

Доказательство. Заметим, что $\bar{h}\theta - \ln R_X(\bar{h})^{-1} = \Lambda(\theta) > 0$, а потому $\bar{h}\theta - \bar{h}\bar{\alpha} > 0$ или $\bar{\alpha} < \theta$. Неравенство (35) получается подстановкой $\xi_i = -\bar{X}_i + \alpha$ в неравенство (34), если учесть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(-\bar{X}_i + \alpha) &= -\theta + \alpha < 0, & \mathbf{E}e^{h(-\bar{X} + \alpha)} &= e^{h\alpha} \mathbf{E}e^{-h\bar{X}}, \\ \mathbf{E}e^{-h\bar{X}} &= R_X(\bar{h})^{-1} \int e^{(\bar{h}-h)x} dF_X(x) = R_X(\bar{h})^{-1} R_X(\bar{h} - h) < \infty \end{aligned}$$

при $\bar{h} - h_X^+ \leq h \leq \bar{h}$. При этом

$$q_\alpha = \sup\{he^{h\alpha} R_X(\bar{h})^{-1} R_X(\bar{h} - h) \leq 1\}. \quad (36)$$

Функция $R_X(h)$ строго выпукла, $R'_X(0) = \mu \geq 0$, $R_X(0) = 1$, так что на интервале $(0, h_X^+)$ она возрастает и потому больше 1. Полагая $h = \bar{h}$ в неравенстве под знаком супремума в (36), получаем, что либо неравенство $e^{\bar{h}\alpha} R_X(\bar{h})^{-1} \leq 1$, либо неравенство $\bar{h}\alpha - \ln R_X(\bar{h}) \leq 0$ выполняется при $\alpha \leq \bar{\alpha}$.

Лемма 3. При любых $0 \leq \alpha < \beta < \theta$, $\Delta > 0$, всех a, b таких, что $b - \Delta \geq a \geq \beta n$, выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(\bar{S}_n \in (a, b], \min_{0 \leq k \leq n} (\bar{S}_k - \alpha k) \leq -y) \leq (C(b-a)/\sqrt{n})e^{-q_\alpha y}, \quad y > 0, \quad (37)$$

где q_α определено в (36); постоянная C зависит от $\alpha, \beta, \Delta, \bar{\sigma}, \bar{\rho}^*$.

Доказательство. Введем несобственную случайную величину τ_y — момент первого попадания блуждания $-\bar{S}_k + \alpha k$ в $[y, \infty)$, $y > 0$, и представим вероятность (37) в виде

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\bar{S}_n \in (a, b], \tau_y = k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\{I_{\{\tau_y=k\}} \mathbf{E}(I_{\{\bar{S}_n \in (a,b]\}} | \bar{X}_i, i \leq k)\}, \quad (38)$$

где $I_{\{\cdot\}}$ означает индикатор события $\{\cdot\}$. При заданном $1 \leq k \leq n$ фиксируем значения случайной величины $\bar{X}_i$, $i \leq k$, отвечающие событию $\tau_y = k$, и пусть при этом $\bar{S}_k = \alpha k - z$, $z \geq y$. Будем считать, что условное математическое ожидание в (38) принимает при $\bar{S}_k = \alpha k - z$ значение

$$\mathbf{P}(\bar{S}_{n-k} + \alpha k - z \in (a, b]) = \mathbf{P}(\hat{S}_{n-k} + \theta(n-k) + \alpha k - z \in (a, b]). \quad (39)$$

Положим для краткости

$$a'_k = a - \theta(n-k) - \alpha k + z, \quad b'_k = b - \theta(n-k) - \alpha k + z, \quad \delta = (\beta - \alpha)/(2\theta).$$

Для оценивания вероятностей (39) при $k \leq n(1 - \delta)$ воспользуемся неравенством (18) и получим оценку

$$\mathbf{P}(\bar{S}_{n-k} + \alpha k - z \in (a, b]) \leq \mathcal{A}' \delta^{-1/2} (b-a)/(\bar{\sigma} \sqrt{n}) \quad (40)$$

При $n-1 \geq k > n(1 - \delta)$ для оценивания вероятностей (39) воспользуемся неравенством (13). Оценку сверху запишем в виде суммы двух слагаемых

$$\begin{aligned} &\left(\Phi\left(\frac{b'_k}{\bar{\sigma} \sqrt{n-k}}\right) - \Phi\left(\frac{a'_k}{\bar{\sigma} \sqrt{n-k}}\right) \right), \\ &\frac{\mathcal{A} \bar{\rho}^*}{\sqrt{n-k}} \left(\left(\frac{a'_k}{\bar{\sigma} \sqrt{n-k}}\right)^{-3} + \left(\frac{b'_k}{\bar{\sigma} \sqrt{n-k}}\right)^{-3} \right) \leq \frac{\mathcal{A} \bar{\rho}^*}{\sqrt{n-k}} \left(\frac{(a'_k)^{-1} + (b'_k)^{-1}}{\bar{\sigma} \sqrt{n-k}} \right)^3, \end{aligned} \quad (41)$$

здесь учтено, что поскольку $z > 0$, $a \geq \beta n$, $k > n(1 - \delta)$, то

$$b'_k - \Delta \geq a'_k > \beta n - \theta(n - n(1 - \delta)) - \alpha n = (\beta - \alpha - \theta\delta)n = 1/2(\beta - \alpha)n > 0.$$

Используя эти неравенства в обоих слагаемых в (41), получаем для них, соответственно, оценки сверху

$$\varphi\left(\frac{(\beta - \alpha)n}{2}\right) \frac{b'_k - a'_k}{\bar{\sigma}\sqrt{n-k}} = \frac{b-a}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi(n-k)}} \exp\left\{-\frac{((\beta - \alpha)n)^2}{8}\right\},$$

$$\frac{\mathcal{A}\bar{\rho}^*}{\sqrt{(n-k)}} \left(\frac{(\beta - \alpha)n}{\bar{\sigma}\sqrt{n-k}}\right)^{-3} \leq \frac{\mathcal{A}\bar{\rho}^*\bar{\sigma}^3}{(\beta - \alpha)^3} n^{-2} \leq \frac{\mathcal{A}\bar{\rho}^*\bar{\sigma}^3}{(\beta - \alpha)^3 \Delta} \frac{b-a}{\sqrt{n}}.$$

Эти оценки вместе с (40) приводят к неравенству

$$I_{\{\tau_y=k\}} \mathbf{E}(I_{\{\bar{S}_n \in (a,b)\}} \mid \bar{X}_i, i \leq k) \leq I_{\{\tau_y=k\}} C(b-a)/\sqrt{n} \text{ п.н.} \quad (42)$$

(отметим, что событие $\{\bar{S}_n \in (a,b), \tau_y = n\}$ имеет нулевую вероятность). Подставляя (42) в (38), получаем для вероятности (37) оценку сверху

$$(C(b-a)/\sqrt{n}) \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\tau_y = k) = (C(b-a)/\sqrt{n}) \mathbf{P}(\min_{0 \leq k \leq n} (\bar{S}_k - \alpha k) < -y).$$

Остается воспользоваться оценкой (35).

Лемма 4. В предположениях и обозначениях леммы 3 и дополнительном ограничении $\alpha > 0$ имеют место неравенства

$$\mathbf{P}(\bar{S}_n \in (a,b], \bar{V}_n > (1 - e^{-\alpha})^{-1} e^y) \leq (C(b-a)/\sqrt{n}) e^{-q_\alpha y}, \quad y > 0,$$

$$\mathbf{P}(\bar{V}_n > (1 - e^{-\alpha})^{-1} e^y) \leq e^{-q_\alpha y}, \quad y > 0, \quad (43)$$

где $q_\alpha = \bar{h}$ при $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$.

Доказательство. Если

$$\min_{k \geq 0} (\bar{S}_k - \alpha k) \geq -y,$$

то

$$\bar{V}_n \leq \bar{V} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\bar{S}_k + \alpha k} e^{-\alpha k} \leq e^y \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} = (1 - e^{-\alpha})^{-1} e^y.$$

Отсюда следует, что

$$\{\bar{V}_n > (1 - e^{-\alpha})^{-1} e^y\} \subseteq \{\min_{k \geq 0} (\bar{S}_k - \alpha k) < -y\}.$$

Переходя здесь к вероятностям и применяя (35), получаем второе из неравенств (43). Первое получается применением неравенства (37). Лемма доказана.

Для последующего применения перепишем неравенства (43) при $\alpha = \bar{\alpha}$ в виде

$$\mathbf{P}(\bar{S}_n \in (a,b], \bar{V} > v) \leq (C(b-a)/\sqrt{n}) \bar{C} v^{-\bar{h}}, \quad \mathbf{P}(\bar{V}_n > v) \leq \bar{C} v^{-\bar{h}}, \quad v \geq 1, \quad (44)$$

где

$$\bar{C} = (1 - R_X(\bar{h})^{-\bar{h}-1})^{-\bar{h}}.$$

Лемма 5. Для любого $\Delta > 0$ и всех a, b таких, что $b - \Delta \geq a$, асимптотическое соотношение при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\bar{S}_n \in (a, b], \bar{V}_n \leq y) = ((b - a)/(\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}))(\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) + o(1)) \quad (45)$$

выполняется во всех точках непрерывности функции распределения случайной величины $\bar{V}$ равномерно по a, b , лежащим в окрестности точки θn ширины $o(\sqrt{n})$.

Доказательство. Далее мы предполагаем, что $\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) > 0$, так как при $\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) = 0$ соотношение (45) сводится к (19). Положим

$$\hat{a}_n = a - \theta n, \quad \hat{b}_n = b - \theta n \quad (\hat{b}_n - \Delta \geq \hat{a}_n),$$

так что

$$\{\bar{S}_n \in (a, b]\} = \{\hat{S}_n \in \hat{a}_n, \hat{b}_n]\}.$$

Фиксируем произвольное значение $m < n$ и с учетом неравенства $\bar{V}_m \leq \bar{V}_n$ оценим вероятность в левой части (45) сверху вероятностью

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{S}_n \in (\hat{a}_n, \hat{b}_n], \bar{V}_m \leq y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\hat{S}_{n-m} + s \in (\hat{a}_n, \hat{b}_n]) \mu_m(ds, [1, y]), \\ \mu_m(ds, dv) &= \mathbf{P}(\hat{S}_m \in ds, \bar{V}_m \in dv). \end{aligned} \quad (46)$$

Интеграл (46) представим в виде суммы $I_1^{(n)} + I_2^{(n)}$, проводя интегрирование в (46) по областям $|s| \leq \sqrt[4]{n}$ и $|s| > \sqrt[4]{n}$ соответственно. Вероятность под интегралом $I_1^{(n)}$ заменим на асимптотическое разложение (15) и получим для нее выражение

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{\rho}}^{(n-m)}\left(\frac{\hat{a}_n - s}{\bar{\sigma}\sqrt{n-m}}\right) - \Psi_{\bar{\rho}}^{(n-m)}\left(\frac{\hat{b}_n - s}{\bar{\sigma}\sqrt{n-m}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n-m}}\right) \\ = \psi_{\bar{\rho}}^{(n-m)}\left(\frac{\hat{c}_n - s}{\bar{\sigma}\sqrt{n-m}}\right) \frac{b-a}{\bar{\sigma}\sqrt{n-m}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n-m}}\right), \quad \hat{c}_n \in (\hat{a}_n, \hat{b}_n]. \end{aligned} \quad (47)$$

Так как $\hat{c}_n = o(\sqrt{n})$, $|s| \leq \sqrt[4]{n}$, при $n \rightarrow \infty$

$$\psi_{\bar{\rho}}^{(n-m)}((\hat{c}_n - s)/(\bar{\sigma}\sqrt{n-m})) - 1/\sqrt{2\pi} = o(1), \quad (48)$$

$$I_1^{(n)} = (((b-a)/(\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}))(1 + o(1)) + o(1/\sqrt{n}))\mu_m([- \sqrt[4]{n}, \sqrt[4]{n}], [1, y]), \quad (49)$$

и

$$\mu_m([- \sqrt[4]{n}, \sqrt[4]{n}], [1, y]) \leq \mathbf{P}(\bar{V}_m \leq y), \quad (50)$$

где члены $o(1)$, $o(1/\sqrt{n})$ малы равномерно по a, b, y .

Учитывая, что случайная величина $\bar{X}$ удовлетворяет двустороннему условию Крамера (см. лемму 2) и применяя неравенство (11), получаем, что

$$\mathbf{P}(\hat{S}_m > \sqrt[4]{n}) \leq R_{\bar{X}}(h)^m e^{-h\sqrt[4]{n}}$$

при некотором $h > 0$. Аналогичное неравенство имеет место для $\mathbf{P}(\hat{S}_m < -\sqrt[4]{n})$. Поэтому

$$I_2^{(n)} \leq \int_{|s| > \sqrt[4]{n}} \mu_m(ds, [1, y]) \leq \mathbf{P}(|\hat{S}_m| > \sqrt[4]{n}) = O(1)e^{-h\sqrt[4]{n}}.$$

Вместе с (49), (50) отсюда получаем оценку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(I_1^{(n)} + I_2^{(n)}) \leq ((b-a)/(\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}))\mathbf{P}(\bar{V}_m \leq y). \quad (51)$$

Так как последовательность $\bar{V}_m$, возрастая, сходится к $\bar{V}$ п. н., для любого $\delta > 0$ и всех достаточно больших m

$$\mathbf{P}(\bar{V} - \delta \leq \bar{V}_m \leq \bar{V}) \geq 1 - \delta. \quad (52)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(\bar{V}_m \leq y) \leq \mathbf{P}(\bar{V} \leq y + \delta) + \delta.$$

Используя это неравенство в (51), получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}\mathbf{P}(\bar{S}_n \in (a, b], \bar{V}_n \leq y) \leq (b-a)/(\bar{\sigma}\sqrt{2\pi})(\mathbf{P}(\bar{V} \leq y + \delta) + \delta) \quad (53)$$

равномерно по a, b, δ .

Для получения нижней границы вероятности в левой части (45) используем разложение

$$\bar{V}_n = \bar{V}_m + e^{-\bar{S}_m} \left(1 + \sum_{j=m+1}^{n-1} e^{-(\bar{S}_j - \bar{S}_m)} \right) \quad (54)$$

и заметим, что пара случайных величин $\bar{S}_n - \bar{S}_m = \hat{S}_n - \hat{S}_m, 1 + \sum_{j=m+1}^{n-1} e^{-(\bar{S}_j - \bar{S}_m)}$ не зависит от пары $\hat{S}_m, \bar{V}_m$, а их совместное распределение вероятностей такое же, как у пары $\hat{S}_{n-m}, \bar{V}_{n-m}$. В результате вероятность в левой части (45) представляется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_1^{\infty} \mathbf{P}(\hat{S}_{n-m} + s \in (\hat{a}_n, \hat{b}_n], v + e^{-s-\theta m} \bar{V}_{n-m} \leq y) \mu_m(ds, dv). \quad (55)$$

Оценим интеграл (55) снизу, сузив область интегрирования до множества

$$D_{m,\delta} = \{|s| \leq \theta m/2, 1 \leq v \leq y - \delta\}, \quad (56)$$

где $\delta, 0 < \delta < 1$, будет в последующем выбираться сколь угодно малым. Ясно, что при $(s, v) \in D_{m,\delta}$

$$\{\bar{V}_{n-m} \leq (y-v)e^{s+\theta m}\} \supseteq \{\bar{V}_{n-m} \leq \delta e^{\theta m/2}\}.$$

Таким образом, при $(s, v) \in D_{m,\delta}$ вероятность под интегралом (55) не меньше, чем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\hat{S}_{n-m} + s \in (\hat{a}_n, \hat{b}_n], \bar{V}_{n-m} \leq \delta e^{\theta m/2}) \\ &= \mathbf{P}(\hat{S}_{n-m} + s \in (\hat{a}_n, \hat{b}_n]) - \mathbf{P}(\hat{S}_{n-m} + s \in (\hat{a}_n, \hat{b}_n], \bar{V}_{n-m} > \delta e^{\theta m/2}). \end{aligned} \quad (57)$$

Подставим (57) в интеграл (55), взятый по области (56), и заменим интеграл от разности вероятностей (57) на разность интегралов, обозначив их через $I_+^{(n)}$ и $I_-^{(n)}$.

К первой вероятности в правой части (57) применим асимптотическое разложение (47). Учитывая (48) и проводя интегрирование, получаем, что

$$I_+^{(n)} = \left(\frac{b-a}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}} (1 + o(1)) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \mathbf{P}(|\hat{S}_m| \leq \theta m/2, \bar{V}_m \leq y - \delta). \quad (58)$$

Выберем m зависящим от δ из условия

$$\mathbf{P}(|\hat{S}_m| > \theta m/2) < \delta.$$

Отсюда и из неравенства $\bar{V}_m \leq \bar{V}$ получаем для вероятности в (58) границу снизу в виде

$$\mathbf{P}(\bar{V} \leq y - \delta) - \delta. \quad (59)$$

Вторую вероятность в (57) оценим сверху с использованием первого из неравенств (44) и, принимая во внимание (56), получаем для нее оценку сверху в виде

$$(C(b-a)/\sqrt{n-m})\bar{C}\delta^{-\bar{h}}e^{-\bar{h}\theta m/2}. \quad (60)$$

В результате интеграл $I_{-}^{(n)}$ оценивается сверху произведением выражения (60) на интеграл

$$\int_{D_{m,\delta}} \int \mu_m(ds, dv) = \mathbf{P}(|\hat{S}_m| \leq \theta m/2, \bar{V}_m \leq y - \delta) \leq \mathbf{P}(\bar{V} \leq y) + \delta \quad (61)$$

(для m таких, что выполнено (52)). Собирая вместе оценки (58)–(61), получаем для вероятности в левой части (45) оценку снизу в виде

$$\begin{aligned} &(((b-a)/(\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}))(1+o(1)) + o(1/(\sqrt{n}))) (\mathbf{P}(\bar{V} \leq y - \delta) - \delta) \\ &\quad - (C(b-a)/\sqrt{n-m})\bar{C}\delta^{-\bar{h}}e^{-\bar{h}\theta m/2} (\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) + \delta). \end{aligned} \quad (62)$$

Стандартные рассуждения приводят от оценок (62), (53) к соотношению (45). Именно, пусть y — точка непрерывности функции распределения случайной величины $\bar{V}$. По любому $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что выполняются неравенства

$$\mathbf{P}(\bar{V} \leq y + \delta) - \varepsilon \leq \mathbf{P}(\bar{V} \leq y) \leq \mathbf{P}(\bar{V} \leq y - \delta) + \varepsilon. \quad (63)$$

Если δ уменьшить, то неравенства (63) сохраняются, пусть $\delta \leq \varepsilon$. По заданному δ выберем m так, чтобы выполнялись неравенства (52) и неравенство

$$C\bar{C}\delta^{-\bar{h}}e^{-\bar{h}\theta m/2} < \varepsilon/(\sigma\sqrt{2\pi}). \quad (64)$$

Будем выбирать n настолько большим, чтобы остаточный член в асимптотическом разложении (47) был меньше, чем $\varepsilon/\sqrt{n}$. В таком случае, используя неравенства (63), (64) для оценки правых частей неравенств (53), (62), получаем при достаточно больших n для вероятности в левой части (45) оценки сверху и снизу, соответственно,

$$((b-a)/(\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}))((1+o(1))(\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) + 2\varepsilon) + \varepsilon\Delta^{-1}\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}), \quad (65)$$

$$\frac{(b-a)}{(\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n})} \left(\left(1 + o(1) - \frac{\varepsilon\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}{\Delta} \right) (\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) - 2\varepsilon) - \frac{\varepsilon(\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) + \varepsilon)}{\sqrt{1-m/n}} \right). \quad (66)$$

Из (65), (66) вытекает, что верхний предел при $n \rightarrow \infty$ выражения

$$\mathbf{P}(\hat{S}_n \in (a, b], \bar{V}_n \leq y) ((b-a)/(\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}))^{-1}$$

не превосходит

$$\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) + 2\varepsilon + \varepsilon\Delta^{-1}\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}$$

а нижний предел не меньше, чем

$$\mathbf{P}(\bar{V} \leq y) - \varepsilon\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}\Delta^{-1} - 3\varepsilon - \varepsilon^2,$$

что и завершает доказательство леммы.

Положим при любых $A \subseteq (-\infty, \infty)$, $B \subseteq [1, \infty)$

$$\hat{I}_n(A \times B) = \int_A \int_B v^{-1} \exp\{-\bar{h}u - v^{-1}e^{-u}\} \mu_n(du, dv), \quad (67)$$

$$I(A \times B) = \int_A \int_B v^{-1} \exp\{-\bar{h}u - v^{-1}e^{-u}\} du dG_\theta(v), \quad (68)$$

где

$$G_\theta(v) = \mathbf{P}(\bar{V} \leq v), \quad \mu_n(du, dv) = \mathbf{P}(\hat{S}_n \in du, \bar{V}_n \in dv)$$

(см. (46), (23)).

Лемма 6. Для любых $A \subseteq [-\beta n, \infty)$, $\theta/2 < \beta < \theta$, $B \subseteq [1, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение (см. (31))

$$I_n(A \times B) \sim \hat{I}_n(A \times B). \quad (69)$$

Доказательство. Проведем оценки функции $g_n(u, v)$ (см. (30)) снизу и сверху. Подставив $x = v^{-1}e^{-\theta n - u}$ в неравенство

$$x(1 - x/2) \leq \ln(1 + x) \leq x, \quad x \geq 0,$$

и, учитывая, что $v \geq 1$, получаем, что

$$v^{-1}e^{-\theta n - u}(1 - (1/2)e^{-\theta n - u}) \leq \ln(1 + v^{-1}e^{-\theta n - u}) \leq v^{-1}e^{-\theta n - u} \quad (70)$$

Домножив неравенства (70) на $-k_n$ (k_n — целая часть числа $e^{\theta n}$) и потенцируя, получаем оценки

$$\begin{aligned} \exp\{-v^{-1}e^{-u}k_n e^{-\theta n}\} &\leq (1 + v^{-1}e^{-\theta n - u})^{-k_n} \\ &\leq \exp\{-v^{-1}e^{-u}k_n e^{-\theta n}(1 - (1/2)e^{-\theta n - u})\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Из неравенств (71) выводим, что при $n \rightarrow \infty$

$$(1 + v^{-1}e^{-\theta n - u})^{-k_n} \sim \exp\{-v^{-1}e^{-u}\} \quad (72)$$

равномерно по $v \geq 1$ и u таким, что при $n \rightarrow \infty$

$$\theta n + 2u \rightarrow \infty. \quad (73)$$

Для $u \geq -\beta n$ при $\beta > \theta/2$ условие (73) выполнено, и кроме того, при $n \rightarrow \infty$ равномерно по этим u и по $v \geq 1$

$$(v + e^{-\theta n - u})^{-1} \sim v^{-1}. \quad (74)$$

Перемножая почленно соотношения (72) и (74), получаем, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $u \geq -\beta n$, $v \geq 1$

$$g_n(u, v) \sim \exp\{-v^{-1}e^{-u}\}. \quad (75)$$

Подставив соотношение (75) в (31), приходим к (69).

Лемма 7. Интеграл $I(\theta)$, определенный соотношением (22), конечен и имеет место равенство (см. (68))

$$I(\theta) = I((-\infty, \infty) \times [1, \infty)). \quad (76)$$

Доказательство. Проведем замену переменного $x = v^{-1}e^u$ и получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\bar{h}u - v^{-1}e^{-u}\} du = v^{\bar{h}} \Gamma(\bar{h}).$$

Интеграл

$$\int_1^{\infty} v^{\bar{h}-1} dG_{\theta}(v), \quad (77)$$

очевидно, конечен при $\bar{h} \leq 1$ (и не превосходит 1). При $\bar{h} > 1$, воспользовавшись формулой для моментов неотрицательной случайной величины ξ

$$\mathbf{E} \xi^x = \int_0^{\infty} x x^{x-1} \mathbf{P}(\xi > x) dx, \quad x > 0,$$

и вторым из неравенств (44), получим для интеграла (77) оценку сверху

$$\bar{C}(\bar{h} - 1) \int_1^{\infty} v^{-2} dv = \bar{C}(\bar{h} - 1).$$

Таким образом, повторный интеграл

$$\int_1^{\infty} v^{-1} dG_{\theta}(v) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\bar{h}u - v^{-1}e^{-u}\} du = \Gamma(\bar{h}) \int_1^{\infty} v^{\bar{h}-1} dG_{\theta}(v)$$

конечен и верно равенство

$$I(\theta) = I((-\infty, \infty) \times [1, \infty)).$$

Лемма 8. Для любых $a > 0$, $b > 1$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\bar{\sigma} \sqrt{2\pi n} \hat{I}_n([-a, a] \times [1, b]) \rightarrow I([-a, a] \times [1, b]), \quad (78)$$

Доказательство. Введем на $[-a, a] \times [1, b]$ последовательность мер

$$\nu_n(du, dv) = \bar{\sigma} \sqrt{2\pi n} \mu_n(du, dv). \quad (79)$$

Из леммы 5 следует, что последовательность ν_n слабо сходится к мере $du \times dG_{\theta}(v)$. Поскольку подынтегральная функция в $\hat{I}_n$ непрерывна, отсюда вытекает (78).

Лемма 9. Для любых a , $\varepsilon > 0$ найдется такое $b > 1$, что

$$\hat{I}_n([-a, a] \times [b, \infty)) < \varepsilon / \sqrt{n}. \quad (80)$$

Доказательство. Проводя элементарные выкладки и применяя первое из неравенств (44), получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_b^{\infty} v^{-1} \exp\{-\bar{h}u - v^{-1}e^{-u}\} \mu_n(du, dv) &\leq b^{-1} e^{\bar{h}a} \mathbf{P}(\hat{S}_n \in [-a, a], \bar{V}_n \geq b) \\ &\leq 2a \bar{C} b^{-1-\bar{h}} e^{\bar{h}a} n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Остается при заданном a выбрать b из условия

$$2\bar{C} b^{-1-\bar{h}} a e^{\bar{h}a} < \varepsilon.$$

Лемма 10. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $a > 0$, что

$$\hat{I}_n((a, \infty) \times [1, \infty)) < \varepsilon/\sqrt{n}. \quad (81)$$

Доказательство. Очевидно, что (см. (67))

$$\hat{I}_n((a, \infty) \times [1, \infty)) \leq \int_{a+}^{\infty} e^{-\bar{h}u} d\mathbf{P}(\hat{S}_n \leq u).$$

Таким образом, следует установить, что при подходящем a

$$\int_{a+}^{\infty} e^{-\bar{h}u} d\mathbf{P}(\hat{S}_n \leq u) \leq \varepsilon/\sqrt{n}. \quad (82)$$

Неравенство (82) легко выводится из доказательства теоремы Петрова [8]. Именно, проинтегрируем (82) по частям, заметим, что внеинтегральный член при этом равен нулю, воспользуемся неравенством Берри–Эссена (см. (13)) и, снова применяя интегрирование по частям, получим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(a < \hat{S}_n \leq u) e^{-\bar{h}u} \Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} \mathbf{P}(a < \hat{S}_n \leq u) \bar{h} e^{-\bar{h}u} du \\ & \leq \int_a^{\infty} \left(\Phi\left(\frac{u}{\bar{\sigma}\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\bar{\sigma}\sqrt{n}}\right) \right) \bar{h} e^{-\bar{h}u} du + \frac{2\mathcal{A}\bar{\rho}^*}{\sqrt{n}} \int_a^{\infty} \bar{h} e^{-\bar{h}u} du \\ & = \int_a^{\infty} e^{-\bar{h}u} d\Phi(u/(\bar{\sigma}\sqrt{n})) + (2\mathcal{A}\bar{\rho}^*/\sqrt{n}) e^{-\bar{h}a}. \end{aligned} \quad (83)$$

Интеграл в (83) равен

$$\frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}} \int_a^{\infty} e^{-\bar{h}u} e^{-u^2/(\bar{\sigma}^2 n)} du \leq \frac{1}{\bar{h}\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}} e^{-\bar{h}a}. \quad (84)$$

Подставляя (84) в (83), приходим к (82).

Лемма 11. Для любых $\varepsilon, \beta > 0$ найдется такое $a > 0$, что

$$\hat{I}_n((-\beta n, -a] \times [1, \infty)) < \varepsilon/\sqrt{n}. \quad (85)$$

Доказательство. Для упрощения записи заменим в интеграле (85) переменную u на $-u$, а переменную v на w^{-1} и приведем его к виду

$$\int_a^{\beta n} \int_0^1 w \exp\{\bar{h}u - we^u\} \mathbf{P}(-\hat{S}_n \in du, \bar{V}_n^{-1} \in dw). \quad (86)$$

Функция $y = w \exp\{-we^u\}$ переменного w (при $u > 0$) возрастает при $w \in [0, e^{-u}]$ и убывает при $w \in [e^{-u}, 1]$, достигая при $w = e^{-u}$ максимального значения e^{-u-1} . Пусть $2\bar{h}a > 1$; разобьем область внутреннего интегрирования в (86) на части $(0, 2\bar{h}ue^{-u}]$ и $(2\bar{h}ue^{-u}, 1]$. Будем считать a настолько большим, что $2\bar{h}ae^{-a} < 1$, и представим интеграл (86) в виде

$$\int_a^{\beta n} \left(\int_0^{2\bar{h}ue^{-u}} + \int_{2\bar{h}ue^{-u}}^1 \right) w \exp\{\bar{h}u - we^u\} \mathbf{P}(-\hat{S}_n \in du, \bar{V}_n^{-1} \in dw). \quad (87)$$

При фиксированном u и $w \in (0, 2\bar{h}ue^{-u}]$ оценим подынтегральную функцию в (87) ее максимальным значением $\exp\{\bar{h}u - u - 1\}$. В результате соответствующий двойной интеграл заменяется на простой интеграл

$$\int_a^{\beta n} \exp\{(\bar{h} - 1)u - 1\} \mathbf{P}(-\hat{S}_n \in du, \bar{V}_n \geq (2\bar{h}u)^{-1}e^u). \quad (88)$$

При $w \in (2\bar{h}ue^{-u}, 1]$ подынтегральную функцию в (87) также заменяем на ее максимум — значение в левом конце промежутка интегрирования:

$$2\bar{h}ue^{-u} \exp\{\bar{h}u - 2\bar{h}ue^{-u}e^u\} = 2\bar{h}u \exp\{-\bar{h}u - u\}.$$

Во втором двойном интеграле в (87) при интегрировании отбросим событие $\bar{V}_n^{-1} \in (2\bar{h}ue^{-u}, 1]$ и получим границу сверху в виде

$$2\bar{h} \int_a^{\beta n} u \exp\{-(\bar{h} + 1)u\} \mathbf{P}(-\hat{S}_n \in du) \leq \varepsilon/\sqrt{n}, \quad (89)$$

где неравенство (89) устанавливается так же, как (82).

Для интеграла (88) при $\bar{h} < 1$ получаем оценку

$$e^{-1} \int_a^{\beta n} \exp\{-(1 - \bar{h})u\} \mathbf{P}(-\hat{S}_n \in du) \leq \varepsilon/\sqrt{n} \quad (90)$$

по тем же соображениям, что и в (82).

При $\bar{h} \geq 1$ введем разбиение

$$\Delta_i = [a + i\delta, a + (i + 1)\delta), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

при произвольном $\delta > 0$ и, полагая для простоты βn кратным δ , заменим интеграл (88) суммой интегралов

$$\begin{aligned} & e^{-1} \sum_i \int_{\Delta_i} \exp\{(\bar{h} - 1)u\} \mathbf{P}(-\hat{S}_n \in du, \bar{V}_n \geq (2\bar{h}u)^{-1}e^u) \\ & \leq e^{-1} \sum_i (\exp\{(\bar{h} - 1)(a + (i + 1)\delta)\} \mathbf{P}(-\hat{S}_n \in \Delta_i, \bar{V}_n > (2\bar{h}(a + i\delta))^{-1}e^{a+i\delta})). \end{aligned} \quad (91)$$

Применяя лемму 4, оценим вероятности под знаком суммы (91) сверху выражением

$$\frac{C\delta\bar{C}}{\sqrt{n}} ((1 - e^{-\bar{a}})(2\bar{h}(a + i\delta))^{-1}e^{a+i\delta})^{-\bar{h}} = \frac{C_{\bar{h},\bar{\sigma}}\delta}{\sqrt{n}} (a + i\delta)^{\bar{h}} e^{-\bar{h}(a+i\delta)}. \quad (92)$$

Подставим (92) в (91) и получим неравенство

$$\frac{C_{\bar{h},\bar{\sigma}}}{\sqrt{n}} e^{(\bar{h}-1)\delta-1} \sum_i (a + i\delta)^{\bar{h}} e^{-(a+i\delta)\delta} \leq \frac{C_{\bar{h},\bar{\sigma}}}{\sqrt{n}} e^{(\bar{h}-1)\delta-1} \int_a^{\beta n} u^{\bar{h}} e^{-u} du. \quad (93)$$

Собирая вместе оценки (89), (90), (92), приходим к заключению леммы.

Леммы 10, 11, 6, 7 приводят к соотношению (32), откуда, как было отмечено ранее, следует асимптотика (33) для математического ожидания $\mathbf{E}_1^{(n)}$. Перейдем к оценке $\mathbf{E}_2^{(n)}$.

Лемма 12. Для любого $0 < \beta < \theta$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\mathbf{E}(V_{n+1}^{-1}(1 + V_n^{-1}U_n)^{-k_n}; S_n < \beta n) = o(1)\mathbf{P}(S_n > \theta n), \quad (94)$$

Доказательство. Положим

$$m_n = \min_{0 \leq j \leq n} S_j.$$

Заметив, что

$$e^{-m_n} \leq V_{n+1} \equiv \sum_{j=0}^n e^{-S_j}, \quad V_n \leq V_{n+1},$$

запишем для математического ожидания (94) оценку сверху в виде

$$\mathbf{E}(e^{m_n}(1 + (n+1)^{-1}e^{m_n-S_n})^{-k_n}; S_n < \beta n) = E_{21}^{(n)} + E_{22}^{(n)} + E_{23}^{(n)}, \quad (95)$$

где $E_{21}^{(n)}$, $E_{22}^{(n)}$ и $E_{23}^{(n)}$ обозначают математические ожидания, взятые по пересечению события $S_n < \beta n$, соответственно, с событиями

$$\{S_n - m_n > (\theta + \varepsilon)n\}, \quad \{|S_n - m_n - \theta n| \leq \varepsilon n\}, \quad \{S_n - m_n < (\theta - \varepsilon)n\}. \quad (96)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} E_{21}^{(n)} &\leq \mathbf{P}(S_n - m_n > (\theta + \varepsilon)n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(S_n - S_k > (\theta + \varepsilon)n, S_j > S_k, j < k, S_j \geq S_k, k \leq j \leq n-1). \end{aligned} \quad (97)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\theta + \varepsilon < \theta^+$. Применяя (12), получим, что при $1 \leq k \leq n-1$

$$\mathbf{P}(S_n - S_k > (\theta + \varepsilon)n) \leq e^{-h(\theta+\varepsilon)(\theta+\varepsilon)n} R(h(\theta + \varepsilon))^{n-k} \leq e^{-\Lambda(\theta+\varepsilon)n}. \quad (98)$$

Подставим (98) в (97) и получим оценку

$$E_{21}^{(n)} \leq n e^{-\Lambda(\theta+\varepsilon)n}, \quad (99)$$

которая, очевидно, удовлетворяет требованию (94). Далее,

$$\begin{aligned} E_{22}^{(n)} &\leq \mathbf{E}(e^{m_n}; |S_n - m_n - \theta n| \leq \varepsilon n, S_n < \beta n) \\ &\leq e^{(\beta-\theta+\varepsilon)n} \mathbf{P}(S_n - m_n > (\theta - \varepsilon)n) \leq e^{(\beta-\theta+\varepsilon)n} n e^{-\Lambda(\theta-\varepsilon)n}, \end{aligned} \quad (100)$$

где последнее неравенство выводится аналогично (99). Пусть ε выбрано настолько малым, что $\theta - \beta - \varepsilon + \Lambda(\theta - \varepsilon) > \Lambda(\theta)$. В таком случае неравенство (100) дает оценку требуемого типа (94). Наконец, при $S_n - m_n < (\theta - \varepsilon)n$

$$(1 + (n+1)^{-1}e^{-(S_n-m_n)})^{-k_n} \leq (1 + (n+1)^{-1}e^{-(\theta-\varepsilon)n})^{-e^{\theta n}+1}. \quad (101)$$

Подставляя неравенство (101) в математическое ожидание $E_{23}^{(n)}$, получаем и для него требуемую оценку типа (94). Тем самым лемма доказана, а вместе с ней закончено доказательство теоремы 1.

5. Доказательство теоремы 2

Предположение $\mu \geq 0$ в доказательстве теоремы 1 впервые использовалось в той части леммы 2, где утверждалось, что в неравенстве (35) при достаточно малых α можно положить $q_\alpha = \bar{h}$. Отсюда выводились неравенства (44), которые использовались для доказательства лемм 7, 11. Остальные леммы либо не опираются на предположение $\mu \geq 0$, либо там, где используются неравенства (44), годятся неравенства (43). Внесем необходимые дополнения в доказательство лемм 7, 11 при $\mu < 0$. Если $\bar{h}$ таково, что $R_X(\bar{h}) \geq 1$, то лемма 2 полностью сохраняется, и при $\alpha \leq \bar{\alpha}$ можно положить в (12) $q_\alpha = \bar{h}$, и следовательно, верны неравенства (44), и последующее доказательство теоремы 1 переносится без изменений.

Предположим далее, что $R_X(\bar{h}) < 1$. Функция $R_X(h)$ строго выпукла (вниз) и непрерывна, так что существует единственное $\bar{q} \in (0, \bar{h})$, для которого выполняется равенство

$$R_X(\bar{h} - \bar{q}) = R_X(\bar{h}).$$

Поскольку $\bar{h} = h(\theta) > h(0)$ при $\theta > 0$ и $R'_X(h(0)) = 0$, справедливо неравенство $\bar{h} - \bar{q} < h(0)$. Таким образом,

$$R_{-\bar{X}}(\bar{q}) = R_X(\bar{h})^{-1} R_X(\bar{h} - \bar{q}) = 1.$$

Так как $\mathbf{E}(-\bar{X}) = -m_X(\bar{h}) < 0$, применяя лемму 1, заключаем, что

$$\mathbf{P}(\max_{0 \leq k \leq n} (-\bar{S}_k) > y) \leq e^{-\bar{q}y}. \quad (102)$$

Отсюда следует, что показатель q_α экспоненты в неравенствах (35), (43) стремится к $\bar{q}$ при $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha > 0$.

Для доказательства соотношения (76) леммы 7 надо в условиях теоремы 2 установить конечность интеграла (77). Из доказательства леммы 7 следует оценка сверху

$$(1 - e^{-\alpha})^{-q_\alpha} (\bar{h} - 1) \int_1^\infty v^{\bar{h}-q_\alpha-2} dv \quad (103)$$

(где в условиях теоремы 1 можно было положить $q_\alpha = \bar{h}$). Интеграл в (103) сходится, если $\bar{h} - q_\alpha < 1$. Если $\bar{h} - \bar{q} < 1$, то, выбирая $\alpha > 0$ достаточно малым, получим требуемый результат. Неравенство $\bar{h} - \bar{q} < 1$ следует из неравенства $\bar{h} - \bar{q} < h(0)$ при $h(0) \leq 1$, а при $h(0) > 1$, $\bar{h} > h^*$ следует из определения величины h^* .

В лемме 11 модификации требует только оценка (93). Просматривая предшествующие ей рассуждения, получаем в рассматриваемом случае, что оценка (92) с точностью до постоянного множителя равна

$$\delta n^{-1/2} (a + i\delta)^{q_\alpha} e^{-q_\alpha(a+i\delta)}.$$

В результате приходим к следующей модификации оценки (93) без учета постоянного множителя:

$$n^{-1/2} e^{(\bar{h}-1)\delta} \sum_i (a + i\delta)^{q_\alpha} e^{(\bar{h}-q_\alpha-1)(a+i\delta)\delta} \leq n^{-1/2} e^{(\bar{h}-1)\delta} \int_a^{\beta n} u^{q_\alpha} e^{(\bar{h}-q_\alpha-1)u} du. \quad (104)$$

Остается заметить, что, как было указано выше, $\bar{h} - q_\alpha - 1 < 0$ при достаточно малом $\alpha > 0$ и интеграл в (104) может быть сделан как угодно малым за счет выбора a , что и требуется в лемме 11. Теорема 2 доказана.

6. Заключительные замечания

В соответствии с классификацией при $\mu > 0$, $\mu = 0$ и $\mu < 0$ ветвящийся процесс в случайной среде называется, соответственно, надкритическим, критическим и докритическим; последние разделяются на умеренно ($R'(1) > 0$), промежуточно ($R'(1) = 0$) и строго ($R'(1) < 0$) докритические. Теорема 1 полностью описывает асимптотику вероятностей больших отклонений в надкритическом и критическом случаях, а теорема 2 — для умеренно и промежуточно докритических процессов. В случае строго докритического процесса теорема 2 описывает область больших отклонений, где асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(\ln Z_n > \theta n)$ следует за асимптотикой вероятностей $\mathbf{P}(S_n > \theta n)$. Для строго докритического процесса при $\theta \leq \theta^*$ асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(\ln Z_n > \theta n)$ и $\mathbf{P}(S_n > \theta n)$ различна. Случай, когда $R'(h) < 0$ при всех $h \in (\mu, h^+)$, в работе не рассматривался, так как при этом асимптотика (9) для $\theta > 0$ не выполняется.

Результаты аналогичные теоремам 1, 2 верны для производящих функций общего вида (2), мы вернемся к этому в другом месте.

Пользуясь возможностью выразить благодарность анонимному рецензенту, исключительно внимательно прочитавшему работу и указавшему на большое число опечаток и неточностей.

Список литературы

1. Agresti A., On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Prob.* (1975) **12**, №1, 39–46.
2. Афанасьев В. И., О соотношении максимального и общего числа частиц в критическом ветвящемся процессе в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (2003) **48**, №3, 435–452.
3. Ватутин В. А., Предельная теорема для промежуточно докритического ветвящегося процесса в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (2003) **48**, №3, 453–465.
4. Альберверо С., Козлов М. В., О возвратности и транзиентности зависящих от состояния ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (2003) **48**, №4, 641–660.
5. Geiger I., Kersting G, The survival probability of a critical branching process in random environment. *Теория вероятностей и ее применения* (2000) **45**, №3, 607–615.
6. Козлов М. В., Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813–825.
7. Козлов М. В., Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Докл. РАН* (1995) **344**, №1, 12–15.
8. Петров В. В. О вероятности больших отклонений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, №2, 310–322.
9. Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
10. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Москва, Мир, 1984.
11. Боровков А. А., *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*. Наука, Москва, 1972.

Статья поступила 02.11.2004.

Переработанный вариант поступил 07.04.2006.