Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Об асимптотических разложениях для чисел Стирлинга первого и второго рода, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 3, 148–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:11:23

УДК 519.2

Об асимптотических разложениях для чисел Стирлинга первого и второго рода

© 1998 г. А. Н. Тимашев

Рассматривается задача асимптотической оценки чисел Стирлинга первого рода $s(n, N)$ и второго рода $\sigma(n, N)$ при условии, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n}{N} \leq \alpha_1 < \infty,$$

где α_0, α_1 — постоянные. Путем использования метода перевала показано, что коэффициенты при отрицательных степенях вида N^{-m} , $m = 1, 2, \dots$, в асимптотических разложениях чисел $s(n, N)$ и $\sigma(n, N)$ по степеням N^{-1} при этом условии определяются из представления в виде суммы степенного ряда некоторой функции, зависящей от решения заданного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с известным начальным условием. С использованием этих результатов найдены линейные рекуррентные соотношения в комплексной области, которым удовлетворяют указанные коэффициенты. В качестве следствий из этих соотношений приводятся явные формулы для коэффициента при N^{-1} .

1. Числа Стирлинга первого рода

Рассмотрим задачу асимптотической оценки чисел Стирлинга первого рода $s(n, N)$ при условии, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n}{N} \leq \alpha_1 < \infty, \quad (1)$$

где α_0, α_1 — постоянные.

Вопросам получения асимптотических оценок для чисел Стирлинга первого рода при различных предположениях об изменении параметров n, N посвящено к настоящему времени много работ (см., например, [1], с. 149–161). В частности, в работе Гуда [2] впервые получен главный член асимптотического разложения для чисел $s(n, N)$ и $\alpha = n/N$, а также от единственного корня $z = z_0 \in (0, 1)$ уравнения

$$\frac{z}{(z-1)\ln(1-z)} = \alpha > 1. \quad (2)$$

В данной работе путем использования метода перевала показано, что коэффициенты при отрицательных степенях вида N^{-m} , $m = 1, 2, \dots$, в асимптотическом разложении чисел $s(n, N)$ при условии (1) определяются из представления в виде суммы степенного ряда некоторой функции, зависящей от решения заданного

дифференциального уравнения первого порядка с известным начальным условием. Используя этот результат, найдены линейные рекуррентные соотношения в комплексной области, которым удовлетворяют указанные коэффициенты. В качестве следствия из этих соотношений приводится явная формула для коэффициента при N^{-1} .

Для получения искоемых рекуррентных соотношений будем исходить из известного равенства [1]

$$|s(n, N)| = \frac{n!}{2\pi i N!} \oint \frac{(-\ln(1-z))^N}{z^{n+1}} dz. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) осуществляется по окружности радиуса, меньшего единицы, с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении. Для логарифма выбирается та непрерывная ветвь, которая принимает вещественные значения на вещественной положительной полуоси.

Формулу (3) можно представить в виде

$$|s(n, N)| = \frac{n!}{2\pi i N!} \oint \varphi(z) \exp(N\omega(z)) dz, \quad (4)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{z}, \quad (5)$$

и при $0 < |z| < 1$

$$\omega(z) = \ln(-\ln(1-z)) - \alpha \ln z, \quad (6)$$

если выполнено условие (1).

Из равенства $\omega'(z) = 0$ получаем, что $z = z_0 \in (0, 1)$ — корень уравнения (2). Такой корень существует и единствен, поскольку функция

$$q(z) = \frac{z}{(z-1)\ln(1-z)}$$

непрерывна и строго возрастает от 1 до ∞ при возрастании z от 0 до 1. При этом $z_0 \rightarrow 0+$ при $\alpha \rightarrow 1+$ и $z_0 \rightarrow 0-$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Кроме того, при $\alpha > 1$

$$-\alpha^{-1} + 1 < z_0,$$

поскольку

$$q(z_0) = \alpha > q(-\alpha^{-1} + 1) = \frac{\alpha - 1}{\ln \alpha}.$$

Будем интегрировать в (4) по окружности $|z| = z_0$ (пробегаемой в положительном направлении). На этой окружности находится точка перевала $z = z_0$ функции ω , для которой $\omega'(z_0) = 0$ и

$$\omega''(z_0) = \frac{\alpha(\alpha z_0 - \alpha + 1)}{z_0^2(1 - z_0)} > 0. \quad (7)$$

Таким образом, точка $z = z_0$ является точкой перевала первого порядка этой функции, причем из условий

$$|z| = z_0, \quad z \neq z_0$$

следует, что

$$\operatorname{Re} \omega(z) < \omega(z_0) = \ln(-\ln(1-z_0)) - \alpha \ln z_0.$$

Кроме того, функции φ и ω , определяемые из (5) и (6), аналитичны в некоторой области (круговом кольце), содержащей контур интегрирования в (4) (с разрезом по отрицательной вещественной полуоси). Поэтому при условии (1) и $n, N \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение (см. [3], с. 66)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=z_0} \varphi(z) \exp(N\omega(z)) dz \sim \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{N}} \exp(N\omega(z_0)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{a_{2m}}{n^m}, \quad (8)$$

где с учетом (7)

$$a_0 = i\varphi(z_0) \sqrt{\frac{2}{\omega''(z_0)}} = i \sqrt{\frac{2(1-z_0)}{\alpha(\alpha z_0 - \alpha + 1)}}, \quad (9)$$

и коэффициенты a_r , $r = 1, 2, \dots$, определяются из соотношения

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r = \varphi(z_0 + \psi(u)) \psi'(u), \quad (10)$$

а функция $\psi(u)$ удовлетворяет условиям

$$\omega(z_0 + \psi(u)) = \omega(z_0) - u^2, \quad (11)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = i \sqrt{\frac{2}{\omega''(z_0)}} = a_0 z_0 = i z_0 \sqrt{\frac{2(1-z_0)}{\alpha(\alpha z_0 - \alpha + 1)}}. \quad (12)$$

Заметим, что если в асимптотическом разложении (8) ограничиться главным членом, то получим, что при условии (1) и $n, N \rightarrow \infty$

$$|s(n, N)| = \frac{n!}{N!} \sqrt{\frac{1-z_0}{2\pi n(\alpha z_0 - \alpha + 1)}} \frac{(-\ln(1-z_0))^N}{z_0^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \quad (13)$$

Равенство (13) — это известная формула Гуда [2].

Заметим также, что из условия (1) следует, что асимптотическое разложение (8) (а потому и оценка (13)) справедливо равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (1). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$|s(n, N)| \sim \frac{n!}{N!} \sqrt{\frac{1-z_0}{2\pi n(\alpha z_0 - \alpha + 1)}} \frac{(-\ln(1-z_0))^N}{z_0^n} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{x_m}{N^m}\right), \quad (14)$$

где $x_m = a_{2m}/a_0$, $m = 1, 2, \dots$, и коэффициенты a_r , $r = 0, 1, \dots$, определяются из (9) и равенства

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r = \frac{1}{\alpha} (\theta'(u)/\theta(u) + 2u), \quad (15)$$

а функция $\theta(u)$ является аналитическим в окрестности нуля решением дифференциального уравнения

$$\alpha\theta'(u)\theta(u) = (e^{\theta(u)} - 1)(\theta'(u) + 2u\theta(u)), \quad (16)$$

удовлетворяющим начальному условию

$$\theta(0) = -\ln(1 - z_0).$$

При этом $z = z_0$ — единственный корень уравнения (2), принадлежащий интервалу $(0, 1)$.

Доказательство. Формула (14) следует из (4) и (8); коэффициенты a_r , $r = 0, 1, \dots$, определяются условиями (9)–(12). Покажем, что из этих условий следуют равенства (15) и (16), а также соотношение

$$\theta(0) = -\ln(1 - z_0).$$

Из (6) и (11) получаем, что при достаточно малых по модулю значениях u

$$\ln(-\ln(1 - z_0 - \psi(u))) - \alpha \ln(z_0 + \psi(u)) = \omega(z_0) - u^2.$$

Дифференцируя это равенство по u , находим, что функция ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ln(1 - z_0 - \psi(u)) + \frac{\psi'(u)(z_0 + \psi(u))}{(1 - z_0 - \psi(u))(\alpha\psi'(u) - 2u\psi(u) - 2uz_0)} = 0.$$

Положим

$$\theta(u) = -\ln(1 - z_0 - \psi(u)),$$

тогда из (12) следует, что

$$\theta(0) = -\ln(1 - z_0).$$

Кроме того,

$$\exp(\theta(u)) = (1 - z_0 - \psi(u))^{-1}$$

и

$$\theta'(u) = \psi'(u) \exp(\theta(u)),$$

поэтому предыдущее дифференциальное уравнение можно переписать в виде (16). Функция $\theta(u)$ аналитична в некоторой окрестности нуля как композиция аналитических функций, причем согласно (12)

$$\theta'(0) = \psi'(0) \exp(\theta(0)) = iz_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha(1 - z_0)(\alpha z_0 - \alpha + 1)}}. \quad (17)$$

Поскольку согласно (5) и (10)

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r = \frac{\psi'(u)}{z_0 + \psi(u)} = \frac{\theta'(u)}{\exp(\theta(u)) - 1},$$

из (16) следует (15).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Коэффициенты a_r , $r = 0, 1, \dots$, в асимптотическом разложении (14) удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям в комплексной области

$$\alpha \sum_{r=0}^k b_{k-r} a_r = (k+1)b_{k+1} + 2b_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

с начальным условием (9). В равенствах (18) коэффициенты b_s , $s = 0, 1, \dots$, удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям

$$b_k + \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k s b_s c_{k-s} = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{z_0}{\alpha(1-z_0)}, \\ b_1 &= \frac{z_0 a_0}{1-z_0}. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом коэффициенты c_s связаны с коэффициентами b_s , $s = 0, 1, \dots$, рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{k-1} (((k+1-s)c_s - \alpha s b_s) b_{k+1-s} + 2b_{k-1-s} c_s) \\ + \alpha(2b_0 b_{k-1} - b_1 k b_k) + b_1 c_k = 0, \end{aligned} \quad k = 2, 3, \dots, \quad (21)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{z_0}{1-z_0}, \\ c_1 &= \frac{z_0 a_0}{(1-z_0)^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Доказательство. Положим

$$\theta(u) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s,$$

тогда согласно (15)

$$\begin{aligned} \alpha \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s \right) &= \theta'(u) + 2u\theta(u) \\ &= b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1)b_{k+1} + 2b_{k-1}) u^k, \end{aligned}$$

причем

$$b_0 = \theta(0) = -\ln(1-z_0)$$

и согласно (17)

$$b_1 = \theta'(0) = \alpha a_0 b_0.$$

Поскольку $z = z_0$ — корень уравнения (2), отсюда получаем (20). Перемножая полученные степенные ряды по Коши и приравнявая коэффициенты при u^k , $k = 1, 2, \dots$, получаем соотношения (18) с начальным условием (9). Далее положим

$$\exp(\theta(u)) - 1 = \sum_{s=0}^{\infty} c_s u^s,$$

тогда

$$c_0 = \exp(\theta(0)) - 1 = \frac{z_0}{1 - z_0},$$

$$c_1 = \theta'(0) \exp(\theta(0)).$$

Согласно (17) отсюда получаем начальные условия (22). Если ввести обозначение

$$h(u) = \exp(\theta(u)) - 1,$$

то

$$h'(u) = \theta'(u)(h(u) + 1),$$

и поэтому при $u = 0$ согласно формуле Лейбница

$$h^{(k)}(0) = \theta^{(k)}(0) + \sum_{s=1}^k \binom{k-1}{s-1} \theta^{(s)}(0) h^{(k-s)}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Поскольку

$$h^{(k)}(0) = k! c_k, \quad \theta^{(s)}(0) = s! b_s, \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots,$$

из этих равенств получаем (19).

Для вывода соотношений (21) используем дифференциальное уравнение (16). Так как

$$\theta'(u) = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) b_{r+1} u^r,$$

то

$$\begin{aligned} \alpha \theta'(u) \theta(u) &= \alpha \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) b_{r+1} u^r \sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \sum_{s=1}^{k+1} s b_s b_{k+1-s} u^k. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (e^{\theta(u)} - 1)(\theta'(u) + 2u\theta(u)) &= \sum_{s=0}^{\infty} c_s u^s \left(b_1 + \sum_{r=1}^{\infty} ((r+1)b_{r+1} + 2b_{r-1}) u^r \right) \\ &= b_1 c_0 + (b_1 c_1 + 2c_0(b_0 + b_2))u \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \left(b_1 c_k + \sum_{s=0}^{k-1} c_s ((k-s+1)b_{k-s+1} + 2b_{k-s-1}) \right) u^k. \end{aligned}$$

Используя (16) и приравнявая коэффициенты при u^k , $k = 2, 3, \dots$, получаем (21), для случаев $k = 0$ и $k = 1$ получаем тождества

$$\begin{aligned} c_0 &= \alpha b_0, \\ \alpha b_1^2 &= b_1 c_1 + 2b_0 c_0. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\begin{aligned} |s(n, N)| &= \frac{n!}{N!} \sqrt{\frac{1 - z_0}{2\pi n(\alpha z_0 - \alpha + 1)}} \frac{(-\ln(1 - z_0))^N}{z_0^n} \\ &\times \left(1 + \frac{f(\alpha)}{12N(\alpha z_0 - \alpha + 1)^3} + O(N^{-2}) \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 6(\alpha z_0 - \alpha + 1)^3 \left(\frac{1 - z_0}{2\alpha_0 z_0} \theta'''(0) - \frac{3\alpha(1 - z_0)}{2z_0} \theta''(0) + \alpha^2 a_0^2 \right) \\ &= \alpha^2 (1 - z_0)^2 (\alpha z_0 - \alpha + 3) + \left(4\alpha - \frac{3}{2} \right) z_0^2 \\ &\quad + \left(3 + \frac{1}{\alpha} \right) z_0 + 3 - 4\alpha - \frac{1}{\alpha(1 - z_0)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Доказательство. Согласно (14) достаточно убедиться в том, что

$$x_1 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{f(\alpha)}{6(\alpha z_0 - \alpha + 1)^3}. \quad (25)$$

Для обоснования оценок (24) и (25), из которых следует (23), используем сначала (18), полагая $k = 1$. При $k = 1$ с учетом начальных условий (9) и (20) получаем, что

$$a_1 = \frac{2(1 - z_0)}{z_0} b_2 + \frac{2}{\alpha(\alpha z_0 - \alpha + 1)}. \quad (26)$$

Аналогично, при $k = 2$ из (19) с учетом начальных условий (22) получаем, что

$$c_2 = \frac{b_2}{1 - z_0} - \frac{z_0^2}{\alpha(1 - z_0)^2(\alpha z_0 - \alpha + 1)}. \quad (27)$$

Используя (21) при $k = 2$, находим, что

$$\frac{2 - 3\alpha(1 - z_0)}{1 - z_0} b_2 + c_2 + \frac{2z_0(\alpha(1 - z_0) + 1)}{\alpha(1 - z_0)^2} = 0.$$

Подставляя значение c_2 из (27), находим, что

$$b_2 = \frac{z_0(2\alpha^2(1 - z_0)^2 + z_0 - 2)}{3\alpha(1 - z_0)(\alpha z_0 - \alpha + 1)^2}. \quad (28)$$

Если теперь использовать (18) при $k = 2$ и учесть (26), (27) и (28), то получим, что

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{3b_3}{b_1} + \frac{2 - 2\alpha(1 - z_0) - z_0}{(\alpha z_0 - \alpha + 1)^2}. \quad (29)$$

Далее, при $k = 3$ из (19) следует, что

$$c_3 = b_3 + \frac{1}{3}(b_1 c_2 + 2b_2 c_1 + 3b_3 c_0).$$

Используя соотношение (21) при $k = 3$, подставляя в него найденное значение c_3 и деля обе части полученного равенства на b_1^2 , после элементарных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{4(\alpha z_0 - \alpha + 1)}{1 - z_0} \frac{b_3}{b_1} + \frac{2c_1}{b_1} \left(1 + \frac{b_2}{3}\right) \\ + \frac{2}{b_1^2}((b_0 + b_2)c_2 + \alpha b_2(b_0 - b_2)) + \frac{1}{3}c_2 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Выражая из (30) отношение b_3/b_1 , подставляя значения b_2 и c_2 согласно (27) и (28) и используя (29), после элементарных выкладок получаем равенство (25), в котором величина $f(\alpha)$ определяется из (24). Тем самым оценка (23) доказана.

Оценка (23) дает неожиданно хорошее приближение уже при небольших значениях n и N . Так, например, при $n = 9$ и $N = 6$ параметр $\alpha = 3/2$ и $z_0 = 0,5335893\dots$ с точностью до 10^{-7} , поэтому первое приближение, вычисленное по формуле (13) путем отбрасывания слагаемого порядка $O(1/N)$, дает оценку 4688 (с точностью до целых). Второе приближение, вычисленное согласно (23) путем отбрасывания слагаемого порядка $O(1/N^2)$, дает оценку 4530 вместо точного значения $|s(9, 6)| = 4536$ (см. [4], с. 61). При $n = 12$ и $N = 8$ получаем соответственно оценки 366416 и 357167 вместо точного значения $s(12, 8) = 357423$.

Заметим, что теорему 1 можно трактовать как теорему об асимптотических разложениях в области больших уклонений для числа циклов ξ_n в подстановке степени n , выбираемой случайно и равновероятно из симметрической группы S_n , если исходить из известного равенства (см., например, [4], с. 87)

$$\mathbf{P}\{\xi_n = N\} = \frac{|s(n, N)|}{n!}, \quad N = 1, 2, \dots, n.$$

2. Числа Стирлинга второго рода

В этом параграфе рассматривается задача асимптотической оценки чисел Стирлинга второго рода $\sigma(n, N)$, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (1). Как и для чисел Стирлинга первого рода $s(n, N)$, вопросам получения асимптотических оценок для чисел $\sigma(n, N)$ при различных предположениях о росте параметров n, N посвящено к настоящему времени много работ (помимо работ, на которые имеются ссылки в [1], см. также [5–9]). В частности, в уже упоминавшейся работе Гуда [2], по-видимому, впервые получен главный член асимптотического разложения для чисел $\sigma(n, N)$ при условии (1), а также выписаны рекуррентные формулы для

коэффициентов при N^{-1} и N^{-2} в этом разложении. В этой же работе указывается, что в общем случае коэффициент при любой степени вида N^{-m} , $m = 1, 2, \dots$, должен быть рациональной функцией от $\alpha = n/N$ и единственного вещественного положительного корня $z = z_1$ уравнения

$$z(1 - e^{-z})^{-1} = \alpha > 1. \quad (31)$$

Исходя из интегрального представления (см. [1])

$$\sigma(n, N) = \frac{n!}{2\pi i N!} \oint \frac{(e^z - 1)^N}{z^{n+1}} dz \quad (32)$$

(интегрирование в (32) осуществляется по окружности с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении), в этом параграфе показывается, что коэффициенты при отрицательных степенях вида N^{-m} , $m = 1, 2, \dots$, в асимптотическом разложении чисел $\sigma(n, N)$ при условии (1) могут быть найдены, исходя из разложения в степенной ряд некоторой функции, выражающейся через решение нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с известным начальным условием. Далее находятся линейные рекуррентные соотношения в комплексной области, которым удовлетворяют эти коэффициенты, и приводится явная формула для коэффициента при N^{-1} . Методы доказательства этих результатов, по существу, такие же, как и в предыдущем параграфе, поэтому в целях компактности изложения ограничимся лишь их точными формулировками.

Теорема 3. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$\sigma(n, N) \sim \frac{n!}{N!} \frac{z_1^{N-n}}{(\alpha - z_1)^N \sqrt{2\pi n(1 - \alpha + z_1)}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{y_m}{N^m} \right), \quad (33)$$

где

$$y_m = \frac{A_{2m}}{A_0}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и коэффициенты A_r , $r = 0, 1, \dots$, определяются из равенства

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r u^r = \frac{\eta'(u)}{\eta(u)} \quad (34)$$

с начальным условием

$$A_0 = i \sqrt{\frac{2}{\alpha(1 - \alpha + z_1)}}. \quad (35)$$

В равенстве (34) функция $\eta(u)$ является аналитическим в окрестности нуля решением дифференциального уравнения

$$(\alpha - \eta(u)(1 - e^{-\eta(u)})^{-1})\eta'(u) = 2i\eta(u), \quad (36)$$

удовлетворяющим начальному условию

$$\eta(0) = z_1.$$

При этом $z = z_1$ — единственный вещественный положительный корень уравнения (31).

Теорема 4. Коэффициенты A_r , $r = 0, 1, \dots$, в асимптотическом разложении (33) удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям в комплексной области

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{z_1} \left((r+1)C_{r+1} - \sum_{k=1}^r C_k A_{r-k} \right) \\ &= \frac{i(\alpha - z_1)}{z_1} \sqrt{\frac{\alpha}{2(1 - \alpha + z_1)}} \left(\sum_{k=1}^r \left(B_{k+1} + \frac{C_{k+1}}{\alpha - z_1} \right) A_{r-k} - \frac{2}{\alpha} B_r \right), \quad r = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (37)$$

с начальным условием (35). В (37) коэффициенты B_r и C_r , $r = 0, 1, \dots$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$B_{r+1} = - \sum_{k=0}^r \left(1 - \frac{k}{r+1} \right) B_k C_{r-k+1}, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ C_1 &= A_0 z_1, \\ C_2 &= \frac{z_1((\alpha - z_1)(2\alpha - z_1) - 2)}{3\alpha(1 - \alpha + z_1)^2}. \end{aligned}$$

Исходя из соотношений (33)–(38) и соответствующих начальных условий, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\sigma(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{z_1^{N-n}}{(\alpha - z_1)^N \sqrt{2\pi n(1 - \alpha + z_1)}} \left(1 + \frac{g(\alpha)}{12n(1 - \alpha + z_1)^3} + O(n^{-2}) \right), \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 6\alpha(1 - \alpha + z_1)^3 \left(\frac{\eta'''(0)}{2A_0 z_1} - \frac{3\eta''(0)}{2z_1} + A_0^2 \right) \\ &= -1 + (\alpha - z_1) \left(z_1^3 + \left(\frac{9}{2} - 2\alpha \right) z_1^2 + (2\alpha^2 - 9\alpha + 8)z_1 - \alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha + 3 \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Заметим, что оценки (39) и (40) дают очень хорошее приближение уже при небольших значениях n и N . Так, например, при $n = 4$ и $N = 2$ параметр $\alpha = 2$ и $z = 1,593624\dots$ с точностью до 10^{-6} (значение z_1 заимствовано из [2]), поэтому первое приближение, вычисленное путем отбрасывания слагаемого $O(N^{-1})$ в асимптотическом разложении (33), дает оценку 7,408; второе приближение, вычисленное по формулам (39) и (40) путем отбрасывания слагаемого порядка $O(n^{-2})$ дает оценку 7,008 вместо точного значения $\sigma(4, 2) = 7$. При $n = 10$ и $N = 5$ первое и второе приближения дают соответственно оценки 43468 и 42531 (с точностью до целых) вместо точного значения $\sigma(10, 5) = 42525$ (см. [4]). Если же $n = 100$ и $N = 50$, то соответствующие оценки равны $4,31905 \cdot 10^{101}$ и $4,30974 \cdot 10^{101}$ (с точностью до

пятого знака после запятой), в то время как $\sigma(100, 50) \approx 4,30983 \cdot 10^{101}$ с той же точностью (это значение заимствовано из [10]).

Пусть $\mu_0(n, N)$ — число ячеек, оказавшихся пустыми после бросания n частиц в N ячеек в классической задаче о размещении.

Следствие 3. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \beta_0 \leq \beta = \frac{n}{N-k} \leq \beta_1 < \infty,$$

где k — целое неотрицательное число (возможно, зависящее от n и N) и β_0, β_1 — постоянные. Тогда равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} &= \binom{N}{k} \frac{n!}{N^n} \frac{z_2^{N-n-k}}{(\beta - z_2)^{N-k} \sqrt{2\pi n(1 - \beta + z_2)}} \\ &\times \left(1 + \frac{h(\beta)}{12n(1 - \beta + z_2)^3} + O(n^{-2}) \right), \end{aligned} \quad (41)$$

где $z = z_2$ — единственный вещественный положительный корень уравнения (31), в котором в правой части равенства вместо α стоит β , и функция $h(\beta)$ определяется из (40) с заменой g на h , α на β и z_1 на z_2 .

Оценка (41) следует из (39) и (40) и известного равенства

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} = \frac{N!}{k!N^n} \sigma(n, N-k),$$

справедливого при $k = 0, 1, \dots, N$. Эта оценка дает высокую точность приближения даже при небольших значениях n и N . Если, например, $n = N = 10$ и $k = 5$, то $\beta = 2$ и $z_2 = 1,593624\dots$, и вычисления по формуле (41) с отбрасыванием слагаемого порядка $O(n^{-2})$ дают оценку 0,12861 (с точностью до 10^{-5}) вместо точного значения $\mathbf{P}\{\mu_0(10, 10) = 5\} = 0,1285956$. В то же время, если положить $\lambda = \mathbf{E}\mu_0(10, 10) \approx 3,48678$ (с той же точностью), то известная предельная теорема Пуассона в правой области для случайной величины $\mu_0(n, N)$ дает оценку $\lambda^5 e^{-\lambda}/5! \approx 0,13142$; эта оценка в данном случае практически совпадает со значением главного члена в формуле (41), равным 0,13145.

Список литературы

1. Сачков В. Н. *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
2. Good I. J. An asymptotic formula for the differences of the powers at zero. *Ann. Math. Statist.* (1961) **32**, №1, 249–256.
3. Евграфов М. А. *Асимптотические оценки и целые функции*. Физматлит, Москва, 1962.
4. Риордан Дж. *Введение в комбинаторный анализ*. Изд-во иностр. лит., Москва, 1963.
5. Hsu L. C. Note on an asymptotic expansion of the n th difference of zero. *Ann. Math. Statist.* (1948) **19**, 273–277.
6. Arfwedson G. A probability distribution connected with Stirling's second-class numbers. *Skand. Aktuarietidskrift* (1951) **34**, 121–132.
7. Bender E. A. Asymptotic methods in enumerations. *SIAM Rev.* (1974) **16**, 485–515.

8. Gould H. W. Euler's formula for n th differences of powers. *Amer. Math. Monthly* (1978) **85**, 450–467.
9. Holst L. On numbers related to partition of unlike objects and occupancy problems. *European J. Combinatorics* (1981) **2**, 231–237.
10. Bleick W. E., Wang P. C. C. Asymptotic of Stirling numbers of the second kind. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1974) **42**, №2, 575–580.

Статья поступила 21.04.1997.

Переработанный вариант поступил 18.05.1998.