Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Маслов, Обобщенные цепные дроби, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 4, 39–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:45:46

Обобщенные цепные дроби

© 1998 г. Д. А. Маслов

Работа посвящена построению аппарата обобщенных цепных дробей с целью использованию этого аппарата в дальнейшем для решения задач теории чисел.

1. Обобщенной цепной дробью назовем выражение вида

$$a_0 + \frac{(-1)^{u_1}}{a_1 + \frac{(-1)^{u_2}}{a_2 + \dots}}, \quad (1)$$

в котором $a_i \in \mathbf{R}$, $i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, назовем элементами, а $u_i \in \mathbf{F} = \{0, 1\}$, $i \in \mathbf{N}$, индексами обобщенной цепной дроби. Число элементов может быть либо конечным, либо бесконечным. В первом случае мы будем записывать данную обобщенную цепную дробь в виде

$$a_0 + \frac{(-1)^{u_1}}{a_1 + \frac{(-1)^{u_2}}{a_2 + \dots + \frac{(-1)^{u_n}}{a_n}}} \quad (2)$$

и называть конечной обобщенной цепной дробью длины n .

В [1] полностью рассмотрен частный случай обобщенных цепных дробей — обычные цепные дроби, когда все $u_i = 0$, а все $a_i \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$. Настоящая работа посвящена подробному описанию общего случая.

Нам понадобится расширить множество вещественных чисел $\mathbf{R}$, добавив новый элемент ∞ и определив четыре правила действий:

$$\begin{aligned} \forall a \in (\mathbf{R} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\} &\Rightarrow \frac{a}{0} = \infty, & \forall a \in \mathbf{R} &\Rightarrow \frac{a}{\infty} = 0, \\ \forall a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\} &\Rightarrow \infty + a = a + \infty = \infty, & \forall a \in \mathbf{R} &\Rightarrow a < \infty. \end{aligned}$$

Отметим, что обобщенная цепная дробь (2) длины n является функцией

$$c_n: \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\},$$

значение $c_n(a_0, u_1, a_1, u_2, a_2, \dots, u_n, a_n)$ которой вычисляется по формуле (2). Аналогично, обобщенная цепная дробь (1) бесконечной длины является функцией

$$c_\infty: \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^\infty \rightarrow \mathbf{V},$$

принимавшей значения в множестве $\mathbf{V}$ формальных выражений вида (1).

Для удобства будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}[a, b] &= \{x \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\} \mid a \leq x \leq b\}, \\ \mathbf{Z}[a, b) &= \mathbf{Z}[a, b] \setminus \{b\}, & a, b \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}; \\ \sigma_{i,n} &= (a_i, u_{i+1}, a_{i+1}, u_{i+2}, a_{i+2}, \dots, u_n, a_n) \\ &\in \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^{n-i}, & i \in \mathbf{Z}[0, n], \quad n \in \mathbf{Z}[0, \infty); \\ \sigma_{i,\infty} &= (a_i, u_{i+1}, a_{i+1}, u_{i+2}, a_{i+2}, \dots) \\ &\in \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^\infty, & i \in \mathbf{Z}[0, \infty); \\ r_{i,n}(\sigma_{0,n}) &= c_{n-i}(\sigma_{i,n}), & i \in \mathbf{Z}[0, n], \quad n \in \mathbf{Z}[0, \infty]. \end{aligned}$$

Всякая конечная обобщенная цепная дробь $c_n(\sigma_{0,n})$, используя соотношения

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, \\ dq_{-1} &= 0, \\ p_n(\sigma_{0,n}) &= a_0 p_{n-1}(\sigma_{1,n}) + (-1)^{u_1} q_{n-1}(\sigma_{1,n}), \\ q_n(\sigma_{0,n}) &= p_{n-1}(\sigma_{1,n}), \quad n \in \mathbf{Z}[0, \infty), \end{aligned}$$

может быть представлена (см. [1, 2]) в каноническом виде как отношение двух многочленов

$$c_n(\sigma_{0,n}) = p_n(\sigma_{0,n})/q_n(\sigma_{0,n})$$

относительно $a_0, (-1)^{u_1}, a_1, (-1)^{u_2}, a_2, \dots, (-1)^{u_n}, a_n$ с целыми коэффициентами.

Каноническое представление $p_k(\sigma_{0,k})/q_k(\sigma_{0,k})$ отрезка $c_k(\sigma_{0,k})$ этой дроби мы будем называть подходящей дробью порядка $k \in \mathbf{Z}[-1, n+1]$ данной обобщенной цепной дроби $c = c_n(\sigma_{0,n})$.

Положим

$$|\bar{t}_k| = \sum_{i=1}^k t_i,$$

где $\bar{t}_k = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbf{R}^k$.

Согласно [1] и [2] при $k \in \mathbf{N}$

$$q_k(\sigma_{0,k})p_{k-1}(\sigma_{0,k-1}) - p_k(\sigma_{0,k})q_{k-1}(\sigma_{0,k-1}) = (-1)^{k+|\bar{u}_k|}, \quad (3)$$

и при $k \in \mathbf{Z}[1, n]$ и $n \in \mathbf{N}$

$$c_n(\sigma_{0,n}) = \frac{p_{k-1}(\sigma_{0,k-1})r_{k,n}(\sigma_{0,n}) + (-1)^{u_k}p_{k-2}(\sigma_{0,k-2})}{q_{k-1}(\sigma_{0,k-1})r_{k,n}(\sigma_{0,n}) + (-1)^{u_k}q_{k-2}(\sigma_{0,k-2})}. \quad (4)$$

В дальнейшем для удобства мы будем иногда в записи функций $c_n(\sigma_{0,n}), p_n(\sigma_{0,n}), q_n(\sigma_{0,n}), r_{k,n}(\sigma_{0,n})$ опускать зависимость от переменных, то есть эти функции записывать соответственно в виде c_n или c , p_n , q_n , $r_{k,n}$ или r_k .

Формула (3) в некотором смысле обратима. А именно, скажем что последовательность $\Pi = (t_k, s_k)_{k \in \mathbf{Z}[-1, n+1]}$ пар действительных чисел, где $n \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$, является подходящей, если

$$\begin{aligned} t_{-2} &= 0, \quad s_{-2} = 1, \quad t_{-1} = 1, \quad s_{-1} = 0, \quad s_0 = 1; \\ s_k t_{k-1} - t_k s_{k-1} &= (-1)^{v_k}, \quad v_k \in \mathbf{F}, \quad k \in \mathbf{Z}[-1, n+1]. \end{aligned}$$

Используя математическую индукцию, нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Для любой подходящей последовательности

$$\Pi = \{(t_k, s_k)\}_{k \in \mathbf{Z}[-1, n+1]}$$

существует единственная обобщенная цепная дробь, у которой последовательность числителей и знаменателей канонических представлений подходящих дробей совпадает с последовательностью Π , то есть существует единственная последовательность

$$\Sigma = \Sigma(\Pi) = \begin{cases} (x_0, z_1, x_1, \dots) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^\infty, & \text{если } n = \infty, \\ (x_0, z_1, x_1, \dots, z_n, x_n) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^n, & \text{если } n \text{ конечно,} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(\Pi) = (s_k t_{k-2} - t_k s_{k-2})(-1)^{v_{k-1}} \\ z_k &= z_k(\Pi) = v_k + v_{k-1} + 1 \pmod{2}, \quad k \in \mathbf{Z}[0, n+1], \end{aligned} \quad (5)$$

такая, что

$$q_k(\Sigma_{0,k}) = s_k, \quad p_k(\Sigma_{0,k}) = t_k, \quad k \in \mathbf{Z}[-1, n+1]. \quad (6)$$

Положим

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \bar{M}_N \cup \bar{M}_\infty \supset M = M_N \cup M_\infty; \\ \bar{M}_N &= \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{Z}[1, \infty)} \bar{M}_n \supset M_N = \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{Z}[1, \infty)} M_n; \\ \bar{M}_n &= \{\sigma_{0,n} \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{N})^n \mid a_i \geq u_i + 1, i \in \mathbf{Z}[1, n]\} \\ &\supset M_n = \{\sigma_{0,n} \in \bar{M}_n \mid a_1 \geq 2\}, \quad n \in \mathbf{Z}[1, \infty); \\ \bar{M}_\infty &= \{\sigma_{0,\infty} \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{N})^\infty \mid a_i \geq u_i + 1, i \in \mathbf{Z}[1, \infty)\} \\ &\supset M_\infty = \{\sigma_{0,\infty} \in \bar{M}_\infty \mid a_1 \geq 2\}; \\ \bar{\Delta} &= \bar{\Delta}_N \cup \bar{\Delta}_\infty \supset \Delta = \Delta_N \cup \Delta_\infty; \\ \bar{\Delta}_N &= \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{Z}[1, \infty]} \bar{\Delta}_n \supset \Delta_N = \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{Z}[1, \infty]} \Delta_n; \\ \bar{\Delta}_n &= \{\sigma_{0,n} \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{N})^n \mid a_i \geq u_{i+1} + 1, i \in \mathbf{Z}[1, n-1] \\ &\supset \Delta_n = \{\sigma_{0,n} \in \bar{\Delta}_n \mid a_n \geq 2\}, \quad n \in \mathbf{Z}[1, \infty); \\ \bar{\Delta}_\infty &= \{\sigma_{0,\infty} \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{N})^\infty \mid a_i \geq u_{i+1} + 1, i \in \mathbf{Z}[1, \infty)\} = \Delta_\infty; \\ u_0 &= 0, \quad q_{-2} = 1; \text{ если } \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta}, \text{ то } u_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Предложение 2. Для любого $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, если $\sigma_{0,n} \in \bar{\Delta}$, то

$$q_k \geq (u_{k+1} + 1)q_{k-1} + (-1)^{u_k} q_{k-2} \geq 1, \quad k \in \mathbf{Z}[1, n+1],$$

если $\sigma_{0,n} \in \Delta_n \subset \bar{\Delta}$, $n \in \mathbf{N}$, то

$$q_n \geq 2q_{n-1} + (-1)^{u_n} q_{n-2} \geq 1,$$

если $\sigma_{0,n} \in \bar{M}$, то

$$q_k \geq q_{k-1} + \delta \geq 1 + k\delta, \quad \delta = \min(a_1 - 1, 1), \quad k \in \mathbf{Z}[1, n+1], \quad (7)$$

если $\sigma_{0,n} \in M$, то

$$\begin{aligned} q_k &\geq q_{k-1} + 1 \geq k + 1, & k \in \mathbf{Z}[1, n+1], \\ q_1 &\geq 2, \quad q_k \geq (u_k + 1)q_{k-1} + (-1)^{u_k} q_{k-2}, & k \in \mathbf{Z}[2, n+1]. \end{aligned}$$

Доказательство легко выводится из трех следующих лемм.

Лемма 1. Если $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $\sigma_{0,n} \in \bar{\Delta}$, $k \in \mathbf{Z}[1, n+1]$, то

$$q_k \geq q_0 = 1 > q_{-1} = 0,$$

и, более того, из соотношений

$$1 \leq i \leq k \leq n, \quad u_k = u_{k-1} = \dots = u_i = 1, \quad u_{i-1} = 0$$

следует, что

$$q_k \geq q_{k-1} - q_{k-2} \geq q_{k-2} - q_{k-3} \geq \dots \geq q_{i-1} - q_{i-2} \geq q_{i-2} + q_{i-3} \geq 1.$$

Лемма 2. Для любого $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, если $\sigma_{0,n} \in \bar{M}$, то выполнено (7) и, более того, при $1 \leq i \leq k < n+1$ из неравенства $q_i > q_{i-1}$ следуют неравенства

$$q_k > q_{k-1} > \dots > q_i > q_{i-1},$$

а из равенства $q_i = q_{i-1}$ следуют равенства

$$q_j = 1, \quad j \in \mathbf{Z}[0, i]; \quad a_m = 2, \quad u_m = 1, \quad m \in \mathbf{Z}[2, i]; \quad a_1 = 1, \quad u_1 = 0.$$

Лемма 3. Для любого $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, если последовательность $\{s_k\}_{k \in \mathbf{Z}[-1, n+1]}$ целых чисел рекуррентно образована по закону: $s_{-1} = 0$, $s_0 = 1$,

$$s_k = x_k s_{k-1} + (-1)^{z_k} s_{k-2}, \quad x_k \in \mathbf{Z}, \quad z_k \in \mathbf{F}, \quad k \in \mathbf{Z}[1, n+1], \quad (8)$$

то соотношения

$$s_k \geq s_{k-1} + 1 \geq k + 1, \quad k \in \mathbf{Z}[1, n+1], \quad (9)$$

и

$$s_1 \geq 2, \quad s_k \geq (z_k + 1)s_{k-1} + (-1)^{z_k} s_{k-2}, \quad k \in \mathbf{Z}[2, n+1], \quad (10)$$

эквивалентны и, кроме того, из (8) и (9), а также из (8) и (10) следует, что

$$x_1 \geq 2, \quad x_k \geq z_k + 1, \quad k \in \mathbf{Z}[2, n+1].$$

Скажем, что последовательность рациональных чисел $\pi = \{t_n/s_n\}_{n \in \mathbf{Z}[-1, n+1]}$, где $n \in \mathbf{Z}[0, \infty]$ является M -последовательностью, если ее элементы удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{aligned} t_{-1} &= 1, \quad s_{-1} = 0, \quad s_0 = 1, \quad s_n t_{n-1} - t_n s_{n-1} = (-1)^{v_n}, \\ v_n &\in \mathbf{F}, \quad n \in \mathbf{Z}[0, n+1]; \quad s_n < s_{n+1}, \quad n \in \mathbf{Z}[0, n]. \end{aligned} \quad (11)$$

Как следует из леммы 3, данное определение останется эквивалентным, если соотношение (11) заменить на следующее:

$$s_1 \geq 2, \quad s_n \geq (z_n + 1)s_{n-1} + (-1)^{z_n} s_{n-2}, \quad n \in \mathbf{Z}[2, n+1], \quad (12)$$

где

$$z_n = v_n + v_{n-1} + 1 \pmod{2}, \quad z_n \in \mathbf{F}, \quad n \in \mathbf{Z}[1, n+1], \quad z_{n+1} = 0.$$

Аналогично, скажем, что последовательность рациональных чисел

$$\pi = \{t_n/s_n\}_{n \in \mathbf{Z}[-1, n+1]}, \quad n \in \mathbf{Z}[0, \infty],$$

является Δ -последовательностью, если ее элементы удовлетворяют свойствам M -последовательности за исключением свойства (11) или (12), вместо которого выполнено следующее свойство:

$$s_n \geq (z_{n+1} + 1)s_{n-1} + (-1)^{z_n} s_{n-2}, \quad n \in \mathbf{Z}[1, n]$$

и $s_n \geq 2s_{n-1} + (-1)^{z_n} s_{n-2}$ при $n \neq \infty$.

Обозначим через $\mathbf{M}$ множество всех M -последовательностей, через $\mathbf{M}_N$ множество всех M -последовательностей конечной длины, через $\mathbf{M}_\infty$ множество всех M -последовательностей бесконечной длины и, аналогично, через $\mathbf{D}$ множество всех Δ -последовательностей, через $\mathbf{D}_N$ и $\mathbf{D}_\infty$ множества всех Δ -последовательностей конечной и бесконечной длины соответственно.

Следующая утверждение уточняет предложение 1.

Предложение 3. Для произвольной последовательности $\pi = \{t_n/s_n\}_{n \in \mathbf{Z}[-1, n+1]}$, если $\pi \in \mathbf{M}$ (аналогично, если $\pi \in \mathbf{D}$), то существует единственная последовательность $\Sigma = \Sigma(\pi) \in M$ (соответственно, $\Sigma \in \Delta$), элементы которой вычисляются по формуле (5), и такая что выполнено (6).

Таким образом, последовательность всех подходящих дробей является биективной функцией $\mathfrak{C}: \Delta \cup M \rightarrow \mathbf{D} \cup \mathbf{M}$, определяемой формулой

$$\mathfrak{C}(\sigma_{0,n}) = \{c_k(\sigma_{0,k})\}_{k \in \mathbf{Z}[-1, n+1]}, \quad \sigma_{0,n} \in \Delta \cup M,$$

при этом $\mathfrak{C}(\Delta) = \mathbf{D}$, $\mathfrak{C}(M) = \mathbf{M}$, $\mathfrak{C}^{-1} = \Sigma$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \hat{M}_N \cup \hat{M}_\infty \subset \bar{M}, \quad \hat{M}_\infty = \{\hat{\sigma}_{0,\infty}^z\}_{z \in \mathbf{Z}} \subset \bar{M}_\infty; \\ \hat{M}_N &= \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{Z}[1, \infty)} \hat{M}_n \subset \bar{M}_N, \quad \hat{M}_n = \{\hat{\sigma}_{0,n}^z\}_{z \in \mathbf{Z}} \subset \bar{M}_n, \quad n \in \mathbf{Z}[1, \infty), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{0,n}^z &= (z, 0, 1, 1, 2, \dots, 1, 2) \in \bar{M}_n, \\ \hat{\sigma}_{0,\infty}^z &= (z, 0, 1, 1, 2, 1, 2, \dots) \in \bar{M}_\infty. \end{aligned}$$

Из предложения 2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. Если $\sigma \in \bar{\Delta}_\infty \cup \bar{M}_\infty \setminus \hat{M}_\infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \infty,$$

если $\sigma = \hat{\sigma}_{0,n}^z \in \hat{M}$, $z \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}[0, \infty]$, то

$$q_k = 1, \quad p_k = z + k, \quad k \in \mathbf{Z}[0, n + 1),$$

если $\sigma = \hat{\sigma}_{0,\infty}^z \in \hat{M}_\infty$, $z \in \mathbf{Z}$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = \infty.$$

Теперь мы можем сделать заключения о взаимном расположении подходящих дробей данной обобщенной цепной дроби. В следующем утверждении обобщаются свойства промежуточных дробей.

Для $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1, \infty]$, $k \in \mathbf{Z}[1, n + 1)$, $i \in \mathbf{Z}[0, a_k]$ положим

$$c_{k,i}(\sigma) = c_{k,i} = \frac{ip_{k-1} + (-1)^{u_k} p_{k-2}}{iq_{k-1} + (-1)^{u_k} q_{k-2}}.$$

При $i = 0$ и $i = a_k$ величины $c_{k,0} = c_{k-2}$ и $c_{k,a_k} = c_k$ являются подходящими дробями, а при $i \in \mathbf{Z}[1, a_k - 1]$ величины $c_{k,i}$ будем называть промежуточными дробями.

Предложение 5. Пусть $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1, \infty]$, $k \in \mathbf{Z}[1, n + 1)$. Тогда для $u_k = 0$ дроби

$$c_{k-2} = c_{k,0}, c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,a_k} = c_k, c_{k-1},$$

а для $u_k = 1$ дроби

$$c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,a_k} = c_k, c_{k-1}, c_{k-2} = c_{k,0}$$

образуют при $k + |\bar{u}_k|$ четном строго возрастающую, а при $k + |\bar{u}_k|$ нечетном строго убывающую последовательность.

Следствие 1. Пусть $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1, \infty]$, $k \in \mathbf{Z}[1, n + 1)$, $l \in \mathbf{Z}[1, k]$ и $u_i = 1$ при $i \in \mathbf{Z}[k - l + 2, k]$. Тогда конечная подпоследовательность $\{c_{k-l+j}\}_{j \in \mathbf{Z}[0, l]}$ является строго монотонно убывающей при $k - l + 1 + |\bar{u}_{k-l+1}|$ четном и строго монотонно возрастающей при $k - l + 1 + |\bar{u}_{k-l+1}|$ нечетном.

Следствие 2. Пусть $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1, \infty]$, $k \in \mathbf{Z}[2, n + 1)$. Тогда если $u_k = 0$, то

$$|c_{k-1} - c_{k-2}| \geq |c_{k-1} - c_k| + |c_{k,1} - c_{k-2}|,$$

и если $u_k = 1$, то

$$|c_{k,1} - c_{k-2}| \geq |c_{k-1} - c_k| + |c_{k-1} - c_{k-2}|,$$

при этом в обоих случаях равенство достигается только при $a_k = 1$.

Предложение 6. Пусть $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1, \infty]$, $k \in \mathbf{Z}[2, n+1]$, $l \in \mathbf{Z}[1, k-1]$ и $u_i = 1$ при $i \in \mathbf{Z}[k-l+2, k]$. Тогда если $u_{k-l+1} = 0$ и $\sigma \in \bar{\Delta}$, то

$$|c_{k-l} - c_{k-l-1}| \geq |c_{k-l} - c_k| + |c_{k-l+1,1} - c_{k-l-1}|,$$

при этом равенство достигается только при $a_i = 2$, $i \in \mathbf{Z}[k-l+1, k-1]$, $a_k = 1$, и $u_{k+1} = 0$; если $u_{k-l+1} = 0$ и $\sigma \in \bar{M}$, то

$$|c_{k-l} - c_{k-l-1}| > \frac{l}{q_{k-l}(lq_{k-l-1} + q_{k-l})} \geq |c_{k-l} - c_k|,$$

при этом равенство достигается только при $a_{k-l+1} = 1$, $a_i = 2$, $i \in \mathbf{Z}[k-l+2, k]$; если $u_{k-l+1} = 1$ и $\sigma \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, то

$$|c_{k-l+1,1} - c_{k-l-1}| \geq |c_{k-l} - c_k| + |c_{k-l} - c_{k-l-1}|,$$

при этом равенство достигается только при $a_i = 2$, $i \in \mathbf{Z}[k-l+1, k-1]$, $a_k = 1$ и $u_{k+1} = 0$.

При $l = 1$ предложение 6 совпадает с ранее доказанным следствием 2.

Пусть $l \geq 2$. Введем обозначения

$$\bar{1}_s = (1, 1, \dots, 1), \quad \overline{1, 2}_s = (1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2),$$

где 1 и 1, 2 повторяются s раз;

$$\bar{u}_{r,s} = (u_r, u_{r+1}, \dots, u_s), \quad \bar{a}_{r,s} = (a_r, a_{r+1}, \dots, a_s).$$

Несложно провести методом математической индукции доказательство трех следующих лемм.

Лемма 4. При $t, s \in \mathbf{N}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} q_{m+s}(\sigma_{0,m}, 0, 2, \overline{1, 2}_{s-1}) &= (s+1)q_m(\sigma_{0,m}) + sq_{m-1}(\sigma_{0,m-1}), \\ q_{m+s}(\sigma_{0,m}, 0, 2, \overline{1, 2}_{s-2}, 1, 1) &= q_m(\sigma_{0,m}) + q_{m-1}(\sigma_{0,m-1}), \quad s \geq 2, \\ q_{m+s}(\sigma_{0,m}, \overline{1, 2}_s) &= (s+1)q_m(\sigma_{0,m}) - sq_{m-1}(\sigma_{0,m-1}), \\ q_{m+s}(\sigma_{0,m}, \overline{1, 2}_{s-1}, 1, 1) &= q_m(\sigma_{0,m}) - q_{m-1}(\sigma_{0,m-1}), \\ q_{m+s}(\sigma_{0,m}, 0, 1, \overline{1, 2}_{s-1}) &= q_m(\sigma_{0,m}) + sq_{m-1}(\sigma_{0,m-1}). \end{aligned}$$

Лемма 5. Пусть $\sigma = \sigma_{0,k} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $k \in \mathbf{Z}[2, \infty)$, $l \in \mathbf{Z}[2, k]$, $s \in \mathbf{Z}[1, l]$. Тогда

$$\begin{aligned} \min(q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l+s}) \mid \bar{a}_{k-l+1,k-l+s} \in \mathbf{Z}^s[2, \infty), u_{k-l+1} = 0, \bar{u}_{k-l+2,k-l+s} = \bar{1}_{s-1}) \\ = q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l}, 0, 2, \bar{1}, \bar{2}_{s-1}), \\ \min(q_k(\sigma_{0,k}) \mid \bar{a}_{k-l+1,k-1} \in \mathbf{Z}^{l-1}[2, \infty), \\ \bar{a}_k \in \mathbf{Z}[1, \infty), u_{k-l+1} = 0, \bar{u}_{k-l+2,k} = \bar{1}_{l-1}) \\ = q_k(\sigma_{0,k-l}, 0, 2, \bar{1}, \bar{2}_{l-2}, 1, 1), \\ \min(q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l+s}) \mid \bar{a}_{k-l+1,k-l+s} \in \mathbf{Z}^s[2, \infty), \bar{u}_{k-l+1,k-l+s} = \bar{1}_s) \\ = q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l}, \bar{1}, \bar{2}_s), \\ \min(q_k(\sigma_{0,k}) \mid \bar{a}_{k-l+1,k-1} \in \mathbf{Z}^{l-1}[2, \infty), a_k \in \mathbf{Z}[1, \infty), \bar{u}_{k-l+1,k} = \bar{1}_l) \\ = q_k(\sigma_{0,k-l}, \bar{1}, \bar{2}_{l-1}, 1, 1), \\ \min(q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l+s}) \mid a_{k-l+1} \in \mathbf{Z}[1, \infty), \\ \bar{a}_{k-l+2,k-l+s} \in \mathbf{Z}^{s-1}[2, \infty), u_{k-l+1} = 0, \bar{u}_{k-l+2,k-l+s} = \bar{1}_{s-1}) \\ = q_k(\sigma_{0,k-l}, 0, 1, \bar{1}, \bar{2}_{s-1}), \end{aligned}$$

при этом минимумы достигаются только в одной точке.

Лемма 6. Пусть $\alpha, \beta, s \in \mathbf{N}$ и $\alpha > \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s \frac{1}{(j\alpha + (j-1)\beta)((j+1)\alpha + j\beta)} &= \frac{s}{\alpha((s+1)\alpha + s\beta)}, \\ \sum_{j=1}^s \frac{1}{(\alpha + (j-1)\beta)(\alpha + j\beta)} &= \frac{s}{\alpha(\alpha + s\beta)}, \\ \sum_{j=1}^s \frac{1}{(j\alpha - (j-1)\beta)((j+1)\alpha - j\beta)} &= \frac{s}{\alpha((s+1)\alpha - s\beta)}. \end{aligned}$$

Используя следствие 1 и соотношение (3), несложно получить, что

$$|c_{k-l} - c_k| = \sum_{j=1}^l \frac{1}{q_{k-l+j-1} q_{k-l+j}}.$$

Отсюда и из лемм 4–6 легко следует доказательство предложения 6.

Разделим последовательность обобщенных цепных дробей

$$\mathfrak{C} = \{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}[-1, n+1]},$$

где $n \in \mathbf{Z}[-1, \infty]$, на две подпоследовательности

$$\mathfrak{C}^+ = \{c_{p_i}\}_{i \in \mathbf{Z}[1, p+1]}, \quad \mathfrak{C}^- = \{c_{l_i}\}_{i \in \mathbf{Z}[1, l+1]},$$

которые будем называть, соответственно, правой и левой. Последовательности номеров

$$R = \{p_i\}_{i \in \mathbf{Z}[1, p+1]}, \quad L = \{l_i\}_{i \in \mathbf{Z}[1, l+1]}$$

элементов, соответственно, правой и левой подпоследовательностей определим, исходя из соотношений

$$p_i = \min\{m \in \{0, 1, 2, \dots\} \mid p_{i-1} < m < n, m+1 + |\bar{u}_{m+1}| \text{ — четное число}\},$$

где $i \in \mathbb{Z}[2, \mathfrak{P} + 1)$, и $p_1 = -1$,

$$l_i = \min\{m \in \{0, 1, 2, \dots\} \mid l_{i-1} < m < n, m+1 + |\bar{u}_{m+1}| \text{ — нечетное число}\},$$

где $i \in \mathbb{Z}[1, \mathfrak{L} + 1)$, и $l_0 = -1$. Номер p_i так же, как и номер l_i , отсутствует, если при его определении берется минимум от пустого множества. При этом подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$ и $\mathfrak{C}^-$ могут быть как конечными, так и бесконечными, а подпоследовательность $\mathfrak{C}^-$ может быть пустой. Последний элемент последовательности $\mathfrak{C}$, если она является конечной, или предел последовательности $\mathfrak{C}$, если она является бесконечной и имеет предел, по определению не будет принадлежать ни подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$, ни подпоследовательности $\mathfrak{C}^-$.

Перебором всех частных случаев устанавливается следующее утверждение.

Предложение 7. При $\sigma \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$ правая подпоследовательность $\mathfrak{C}^+$ является строго монотонно убывающей, а левая подпоследовательность $\mathfrak{C}^-$ является строго монотонно возрастающей. При этом любая обобщенная цепная дробь из правой подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$ строго больше любой обобщенной цепной дроби из левой подпоследовательности $\mathfrak{C}^-$, а в случае конечной последовательности $\mathfrak{C}$ последний ее элемент строго меньше любой обобщенной цепной дроби из правой подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$ и строго больше любой обобщенной цепной дроби из левой подпоследовательности $\mathfrak{C}^-$.

Под сходимостью бесконечной обобщенной цепной дроби $c_\infty(\sigma_{0,\infty})$ будем подразумевать сходимость бесконечной последовательности подходящих дробей $\mathfrak{C} = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}[-1, \infty)}$.

Предложение 8. Если $\sigma_{0,\infty} \in \bar{\Delta}_\infty \cup \bar{M}_\infty$, то любая бесконечная обобщенная цепная дробь $c_\infty(\sigma_{0,\infty})$ сходится к бесконечному пределу при $\sigma_{0,\infty} \in \hat{M}_\infty$ и к конечному пределу при $\sigma_{0,\infty} \in \bar{\Delta}_\infty \cup \bar{M}_\infty \setminus \hat{M}_\infty$.

Для сходящихся бесконечных обобщенных цепных дробей из предложений 7 и 8, как нетрудно видеть, вытекает следующее утверждение.

Предложение 9. При $\sigma_{0,\infty} \in \bar{\Delta}_\infty \cup \bar{M}_\infty$ значение сходящейся бесконечной обобщенной цепной дроби строго меньше любой подходящей дроби из правой подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$ и строго больше любой подходящей дроби из левой подпоследовательности $\mathfrak{C}^-$.

Предложение 10. При $\sigma_{0,d} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $d \in \mathbb{Z}[1, \infty]$, $\alpha = c(\sigma_{0,d})$ для любого $n \in \mathbb{Z}[1, d+1)$

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + (-1)^{u_n}p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + (-1)^{u_n}q_{n-2}}.$$

Доказательство предложения 10 следует непосредственно из соотношения (4) и предложения 8.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_O &= \{\sigma_{0,\infty} \in \bar{\Delta}_\infty \mid \text{найдется такое } K \in \mathbf{N}, \text{ что } a_k = 2, u_k = 1 \text{ при } k \in \mathbf{Z}[K, \infty)\}, \\ \bar{\Delta}_Q &= \bar{\Delta}_O \cup \bar{\Delta}_N, \quad \Delta_Q = \bar{\Delta}_Q \cap \Delta, \quad \Delta_O = \bar{\Delta}_O \cap \Delta, \\ \bar{M}_O &= \{\sigma_{0,\infty} \in \bar{M}_\infty \mid \text{найдется такое } K \in \mathbf{N}, \text{ что } a_k = 2, u_k = 1 \text{ при } k \in \mathbf{Z}[K, \infty)\}, \\ \bar{M}_Q &= \bar{M}_O \cup \bar{M}_N, \quad M_Q = \bar{M}_Q \cap M, \quad M_O = \bar{M}_O \cap M.\end{aligned}$$

Из предложений 6, 7 и 9 несложно вывести следующее утверждение.

Предложение 11. Пусть $\sigma = \sigma_{0,d} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $d \in \mathbf{Z}[1, \infty]$, $\alpha = c(\sigma_{0,d})$. Тогда если $k \in \mathbf{Z}[0, d-1)$, то при $\sigma \in \bar{\Delta} \setminus \bar{\Delta}_O$

$$\begin{aligned}u_{k+2} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \\ u_{k+2} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k(q_{k+1} - q_k)},\end{aligned}$$

при $\sigma \in \bar{\Delta}_Q$

$$\begin{aligned}u_{k+2} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} \leq \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \\ u_{k+2} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k(q_{k+1} - q_k)},\end{aligned}$$

при $\sigma \in \bar{M} \setminus \bar{M}_O$

$$\begin{aligned}u_{k+2} = 0 &\Rightarrow 0 < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \\ u_{k+2} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k(q_{k+1} - q_k)},\end{aligned}$$

при $\sigma \in \bar{M}$

$$\begin{aligned}u_{k+2} = 0 &\Rightarrow 0 \leq \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \\ u_{k+2} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k(q_{k+1} - q_k)},\end{aligned}$$

где все нестрогие неравенства в соотношениях достижимы;
если $k = d-1$ и $d < \infty$ то

$$\frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k(q_{k+1} - q_k)}.$$

2. В [1] введено понятие представления вещественного числа α в виде цепной дроби, которое получается процессом последовательного деления, сопровождающимся взятием целой части

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} = a_0^b(\alpha) + \frac{1}{r_1^b(\alpha)} = a_0^b(\alpha) + \frac{1}{[r_1^b(\alpha)] + \{r_1^b(\alpha)\}} = a_0^b(\alpha) + \frac{1}{a_1^b(\alpha) + \frac{1}{r_2^b(\alpha)}} = \dots$$

Это представление будем называть здесь обычным представлением или h -представлением. Аналогично автором в данной работе определяется понятие z -представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби, только взятие целой части (ближайшего целого слева) заменяется на некоторых шагах процесса вычислением ближайшего целого справа в зависимости от типа z и числа α :

$$\alpha = a_0^z(\alpha) + \frac{(-1)^{u_1^z(\alpha)}}{r_1^z(\alpha)} = a_0^z(\alpha) + \frac{(-1)^{u_1^z(\alpha)}}{a_1^z(\alpha) + \frac{(-1)^{u_2^z(\alpha)}}{r_2^z(\alpha)}} = \dots,$$

где $u_i^z(\alpha) \in \mathbf{F}$, $r_i^z(\alpha) \in \mathbf{R}(1, \infty)$, $i \in \mathbf{N}$.

Обозначим $\mathbf{Z}$ множество всех таких представлений. С z -представлением, $z \in \mathbf{Z}$, тесно связан обобщенный алгоритм Евклида, определяемый для рационального числа $\alpha = a/b$ или пары целых чисел (a, b) как последовательность вычислений вида

$$\begin{aligned} a &= ba_0^z(\alpha) + (-1)^{u_1^z(\alpha)} R_1^z(\alpha), \\ b &= R_1^z(\alpha) a_1^z(\alpha) + (-1)^{u_2^z(\alpha)} R_2^z(\alpha), \\ R_1^z(\alpha) &= R_2^z(\alpha) a_2^z(\alpha) + (-1)^{u_3^z(\alpha)} R_3^z(\alpha), \\ &\dots \\ R_{n-2}^z(\alpha) &= R_{n-1}^z(\alpha) a_{n-1}^z(\alpha) + (-1)^{u_n^z(\alpha)} R_n^z(\alpha), \\ R_{n-1}^z(\alpha) &= R_n^z(\alpha) a_n^z(\alpha), \end{aligned}$$

где

$$0 < R_i^z(\alpha) < R_{i-1}^z(\alpha), \quad i \in \mathbf{Z}[1, n], \quad R_0^z(\alpha) = b.$$

Число n называется длиной алгоритма. При $u_i^z(\alpha) = 0$, $i \in \mathbf{Z}[1, n]$, получим обычный алгоритм Евклида, которому соответствует обычное представление (h -представление) числа α в виде обычной цепной дроби. Назовем алгоритмом Евклида с выбором минимального остатка обобщенный алгоритм Евклида, в котором всегда

$$r_i^z(\alpha) = \frac{R_{i-1}^z(\alpha)}{R_i^z(\alpha)} \geq 2, \quad i \in \mathbf{Z}[1, n].$$

Соответствующее представление назовем представлением с минимальным остатком или m -представлением числа α в виде обобщенной цепной дроби.

Кронекером доказаны две следующие теоремы.

Первая теорема Кронекера. Число всех возможных обобщенных алгоритмов Евклида для пары (a, b) взаимно простых чисел равно b .

Вторая теорема Кронекера. Минимальная длина обобщенного алгоритма Евклида равна длине алгоритма Евклида с выбором минимального остатка.

В [1] введено понятие наилучшего приближения первого рода вещественного числа α , как такой рациональной дроби a/b , $b > 0$, что для всякой другой рациональной дроби c/d такой, что $0 < d \leq b$, $a/b \neq c/d$, выполняется неравенство

$$|\alpha - c/d| > |\alpha - a/b|.$$

Естественным образом определим наилучшее приближение снизу первого рода числа α , как такую рациональную дробь a/b , $b > 0$, что $a/b \leq \alpha$ и для всякой другой рациональной дроби такой, что $0 < d \leq b$, $a/b \neq c/d$, $c/d \leq \alpha$, выполняется неравенство

$$\alpha - c/d > \alpha - a/b.$$

Аналогично определим наилучшее приближение сверху первого рода числа α .

В [1] также введено понятие наилучшего приближения второго рода вещественного числа α , как такой рациональной дроби a/b $b > 0$, что для всякой другой рациональной дроби c/d такой, что $0 < d \leq b$, $a/b \neq c/d$, выполняется неравенство

$$|\alpha d - c| > |\alpha b - a|.$$

Естественным образом в [3] определяются односторонние наилучшие приближения сверху и снизу второго рода числа α .

Очевидно, что при рациональном числе α оно само является наилучшим приближением во всех вышеприведенных определениях. Определим понятие проколотого наилучшего приближения соответственно первого и второго рода сверху и снизу, повторив соответствующие определения в условиях исключения самого числа α из числа претендентов наилучшего приближения.

В [3], теоремы 1' и 1'', а также в [4], теорема 2, показана связь между наилучшими приближениями сверху второго рода числа α и представлением числа α в виде приведенной регулярной непрерывной дроби (см. [5]), под которым в терминах данной работы подразумевается такое z -представление, что $u_i^z(\alpha) = 1$ для всех i . Это представление будем называть здесь r -представлением. Аналогично показана связь между наилучшими приближениями снизу второго рода числа α и представлением числа α в виде, близком приведенной регулярной непрерывной дроби, под которым в терминах данной работы подразумевается такое z -представление, что $u_1^z(\alpha) = 0$ и $u_i^z(\alpha) = 1$ для всех $i \geq 2$. Это представление будем называть здесь l -представлением. Приведем формулировку теоремы 2 из [4] (теоремы 1' и 1'' из [3] аналогичны).

Теорема Финкельштейна. *Последовательность рациональных дробей, наилучших приближений сверху второго рода числа α , совпадает с последовательностью подходящих дробей для приведенной регулярной непрерывной дроби, в которую разлагается число α .*

Далее автором будут более подробно исследованы связи между характеристиками h -представления, m -представления, r -представления, l -представления и произвольного z -представления числа α в виде обобщенной цепной дроби. При этом в некотором смысле будут детализированы и обобщены цитируемые выше теоремы Кронекера и Финкельштейна.

Напомним, что выше было определено множество z -представлений 3. Определим еще три типа z -представлений, $\mathfrak{M}$, $\tilde{3}$ и $\mathfrak{M}$. Для этого будем определять посредством индукции наборы, состоящие из функции $d^z: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}[0, \infty]$ и для каждого $\alpha \in \mathbf{R}$ из последовательностей

$$\{a_n^z(\alpha)\}_{n \in \mathbf{Z}[0, d^z(\alpha)+1]}, \quad \{u_n^z(\alpha)\}_{n \in \mathbf{Z}[1, d^z(\alpha)+1]}, \quad \{r_n^z(\alpha)\}_{n \in \mathbf{Z}[1, d^z(\alpha)+1]},$$

принимające различные значения при различных типах z -представлений. При фиксированном $\alpha \in \mathbf{R}$ на $(n+1)$ -м шаге индукции, $n \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, в зависимости от

некоторого правила, которое задается типом z , либо будут определяться значения набора $a_n^z(\alpha)$, $u_{n+1}^z(\alpha)$, $r_{n+1}^z(\alpha)$, связанные уравнением

$$r_n^z(\alpha) = a_n^z(\alpha) + \frac{(-1)^{u_{n+1}^z(\alpha)}}{r_{n+1}^z(\alpha)},$$

причем выбор этих значений будет производиться из заданного конечного множества, либо процесс определения закончится с условием, что $a_n^z(\alpha) = r_n^z(\alpha)$ и $d^z(\alpha) = n$. Если для $\alpha \in \mathbf{R}$ этот процесс никогда не остановится, то полагаем $d^z(\alpha) = \infty$.

Положим $r_0^z(\alpha) = \alpha$.

Зафиксируем тип $z \in Z$ (и тем самым зафиксируем правила выбора).

На $(n+1)$ -м шаге индукции, $n \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, выбор возможностей в зависимости от типа z задается соотношениями

$$\begin{aligned} a_n^z(\alpha) &= r_n^z(\alpha), & d^z(\alpha) &= n & \text{при } r_n^z(\alpha) &\in \mathbf{Z}[2, \infty), \\ a_n^z(\alpha) &= [r_n^z(\alpha)], & u_{n+1}^z(\alpha) &= 0 & \text{при } r_n^z(\alpha) &\notin \mathbf{Z}[2, \infty), \\ a_n^z(\alpha) &=]r_n^z(\alpha)[, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 1 & \text{при } r_n^z(\alpha) &\notin \mathbf{Z}[2, \infty). \end{aligned}$$

Здесь $x[$ — ближайшее целое справа, $x]$ — ближайшее целое слева для числа x .

Определим множество z -представлений $\mathfrak{M}$. Первый шаг индукции определяемого z -представления при $z \in \mathfrak{M}$ совпадает с первым шагом ранее определенного z -представления при $z \in \mathfrak{Z}$.

Положим $U_1^z(\alpha) = 1$, $U_n^z(\alpha) = u_n^z(\alpha)$, $n \in \mathbf{Z}[2, d^z(\alpha) + 1)$.

На $(n+1)$ -м шаге индукции, $n \in \mathbf{Z}[1, \infty)$, при $k = [r_n^z(\alpha)]$ выбор возможностей определяется соотношениями

$$\begin{aligned} a_n^z(\alpha) &= j, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 0, & j &\in [1 + U_n^z(\alpha) = 0, \\ a_n^z(\alpha) &= k, & d^z(\alpha) &= n & \text{при } r_n^z(\alpha) &= k \in \mathbf{Z}[1, \infty), \\ a_n^z(\alpha) &= j, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 0, & j &\in \mathbf{Z}[\max(1 + U_n^z(\alpha), k] \text{ при } r_n^z(\alpha) \notin \mathbf{Z}[1, \infty), \\ a_n^z(\alpha) &= k + 1, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 1 & \text{при } r_n^z(\alpha) &\notin \mathbf{Z}[1, \infty). \end{aligned}$$

Определим множество z -представлений $\hat{\mathfrak{Z}}$. В этом случае $(n+1)$ -й шаг индукции, $n \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, определяемого z -представления, $z \in \hat{\mathfrak{Z}}$ совпадает с $(n+1)$ -м шагом ранее определенного z -представления при $z \in \mathfrak{Z}$, за исключением случая остановки процесса (для $z \in \mathfrak{Z}$), при $r_n^z(\alpha) = k \in \mathbf{Z}[2, \infty)$, $n \in \mathbf{N}$, и при $r_n^z(\alpha) = k \in \mathbf{Z}$, $n = 0$, когда выбор возможностей задается соотношениями

$$\begin{aligned} a_n^z(\alpha) &= k - 1, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 0, & r_{n+1}^z(\alpha) &= 1, \\ a_n^z(\alpha) &= k + 1, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 1, & r_{n+1}^z(\alpha) &= 0, \end{aligned}$$

а также за исключением случая $r_n^z(\alpha) = 1$, $n \in \mathbf{N}$, когда полагаем

$$a_n^z(\alpha) = 2, \quad u_{n+1}^z(\alpha) = 1, \quad r_{n+1}^z(\alpha) = 1.$$

Наконец, определим множество z -представлений $\hat{\mathfrak{M}}$. Первый шаг индукции определяемого z -представления при $z \in \hat{\mathfrak{M}}$ совпадает с первым шагом ранее определенного z -представления при $z \in \mathfrak{Z}$, за исключением случая остановки процесса (для

$z \in \mathfrak{Z}$) при $\alpha \in \mathbf{Z}$, когда выбор возможностей задается соотношениями

$$\begin{aligned} a_0^z(\alpha) &= \alpha - 1, & u_1^z(\alpha) &= 0, & r_1^z(\alpha) &= 1, \\ a_0^z(\alpha) &= \alpha, & u_1^z(\alpha) &= 0, & r_1^z(\alpha) &= \infty, \\ a_0^z(\alpha) &= \alpha, & u_1^z(\alpha) &= 1, & r_1^z(\alpha) &= \infty, \\ a_0^z(\alpha) &= \alpha + 1, & u_1^z(\alpha) &= 1, & r_1^z(\alpha) &= 1, \end{aligned}$$

$(n+1)$ -й шаг индукции, $n \in \mathbf{Z}[1, \infty)$, определяемого z -представления при $z \in \hat{\mathfrak{M}}$ совпадает с $(n+1)$ -м шагом ранее определенного z -представления при $z \in \mathfrak{M}$, за исключением случая $r_n^z(\alpha) = k \in \mathbf{Z}[1, \infty]$, когда выбор возможностей при $z \in \hat{\mathfrak{M}}$ задается соотношениями

$$\begin{aligned} a_n^z(\alpha) &= j, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 0, & j &\in \mathbf{Z}[1 + U_n^z(\alpha), k + 1), \\ a_n^z(\alpha) &= j, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 1, & j &\in \mathbf{Z}[\max(1 + U_n^z(\alpha), k), k + 1), \\ a_n^z(\alpha) &= j, & u_{n+1}^z(\alpha) &= 1, & j &\in \mathbf{Z}[k + 1, k + 2). \end{aligned}$$

Итак, мы для каждого вещественного числа $\alpha \in \mathbf{R}$ однозначно определили в случае конечной длины $d^z(\alpha) = n \in \mathbf{Z}[0, \infty)$ конечный вектор

$$\sigma_{0,n}^z(\alpha) = (a_0^z(\alpha), u_1^z(\alpha), a_1^z(\alpha), u_2^z(\alpha), a_2^z(\alpha), \dots, u_n^z(\alpha), a_n^z(\alpha)),$$

а в случае бесконечной длины $d^z(\alpha) = \infty$ бесконечный вектор

$$\sigma_{0,\infty}^z(\alpha) = (a_0^z(\alpha), u_1^z(\alpha), a_1^z(\alpha), u_2^z(\alpha), a_2^z(\alpha), \dots)$$

и, таким образом, при $\alpha \in \mathbf{Z}$ мы задали функцию

$$\sigma^z(\alpha) = \begin{cases} \sigma_{0,n}^z(\alpha) & \text{при } d^z(\alpha) = n \in \mathbf{Z}[0, \infty), \\ \sigma_{0,\infty}^z(\alpha) & \text{при } d^z(\alpha) = \infty, \end{cases}$$

которую мы и будем называть z -представлением, $z \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}$, вещественных чисел в виде обобщенных цепных дробей.

Функция σ^z , $z \in \mathfrak{Z}$, однозначно задается, если на каждом шаге индукции в определении функции σ^z , $z \in \mathfrak{Z}$, при неоднозначном выборе набора значений компонент вектора σ^z , $z \in \mathfrak{Z}$, дано правило выбора из двух возможностей. Так, если задать значения вектор-функции

$$\bar{u}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{F}^\infty, \quad \bar{u}(\alpha) = (u_1(\alpha), u_2(\alpha), \dots) \in \mathbf{F}^\infty, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

то по нему однозначно определяется функция σ^z , $z \in \mathfrak{Z}$, посредством соотношений

$$u_i^z(\alpha) = u_i(\alpha), \quad i \in \mathbf{Z}[1, d^z(\alpha) + 1);$$

в этом случае будем говорить что z -представление $z \in \mathfrak{Z}$, определяется вектором $\bar{u}$. Другим способом задания функции σ^z , $z \in \mathfrak{Z}$, является ее определение по функции

$$\begin{aligned} \zeta: \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{Z}^* = ((\{0\} \times \mathbf{R}(0, 1]) \cup (\{1\} \times \mathbf{R}[0, 1)))^\infty, \\ \zeta(\alpha) &= (\varkappa_1(\alpha), \theta_1(\alpha), \varkappa_2(\alpha), \theta_2(\alpha), \dots) \in \mathbf{Z}^*, \quad \alpha \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

посредством соотношений

$$\begin{aligned} -(1 - \theta_{n+1}(\alpha)) &\leq \frac{(-1)^{u_{n+1}^z(\alpha)}}{r_{n+1}^z(\alpha)} < \theta_{n+1}(\alpha), \text{ если } \varkappa_{n+1}(\alpha) = 0, \\ -(1 - \theta_{n+1}(\alpha)) &< \frac{(-1)^{u_{n+1}^z(\alpha)}}{r_{n+1}^z(\alpha)} \leq \theta_{n+1}(\alpha), \text{ если } \varkappa_{n+1}(\alpha) = 1, \end{aligned}$$

определяющих выбор на $(n + 1)$ -м шаге индукции, $n \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, в случае существования двух возможностей; такое z -представление, $z \in Z$, будем называть также представлением по ζ .

При $z = \mathfrak{h} \in \mathfrak{Z} \setminus \mathfrak{M}$ функция σ^z является обычным представлением вещественных чисел в виде цепных дробей (см. [1]) или представлением по $\zeta(\alpha) = (0, 1, 0, 1, \dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, и определяется вектором $\bar{u}(\alpha) = (0, 0, \dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, при $z = \mathfrak{m} \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M}$ определяется представлением с минимальным остатком или представлением по $\zeta(\alpha) = (0, 1/2, 0, 1/2, \dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, при $z = r \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M}$ определяется представлением в виде приведенной регулярной непрерывной дроби или представлением по $\zeta(\alpha) = (1, 0, 1, 0, \dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$ и определяется вектором $\bar{u}(\alpha) = (1, 1, \dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, при $z = l \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M}$ определяется представлением в виде, близком приведенной регулярной непрерывной дроби, или представлением по $\zeta(\alpha) = (0, 1, 1, 0, 1, 0, \dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, и определяется вектором $\bar{u}(\alpha) = (0, 1, 1, \dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

В дальнейшем в целях технического удобства мы будем иногда в записи функций $a_n^z(\alpha)$, $u_n^z(\alpha)$, $r_n^z(\alpha)$, $d^z(\alpha)$, $\sigma_{0,n}^z(\alpha)$, $\sigma_{0,\infty}^z(\alpha)$, $\sigma^z(\alpha)$, $\zeta(\alpha)$, $\theta_n(\alpha)$, $\varkappa_n(\alpha)$ опускать зависимость от переменной, то есть эти функции записывать в виде, соответственно a_n^z , u_n^z , r_n^z , d^z , $\sigma_{0,n}^z$, $\sigma_{0,\infty}^z$, σ^z , ζ , θ_n , $\varkappa_n$.

Положим $\sigma^A(\mathbf{R}) = \{\sigma^z(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbf{R}, z \in A}$ при $A \subset \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}$.

Верны следующие утверждения.

Предложение 12. *Справедливы включения*

$$\sigma^{\mathfrak{Z} \cup \hat{\mathfrak{Z}}}(\mathbf{R}) \subseteq \Delta, \quad \sigma^{\mathfrak{M} \cup \hat{\mathfrak{M}}}(\mathbf{R}) \subseteq M.$$

Предложение 13. *Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$. При $z \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}$ справедливо равенство $c(\sigma^z(\alpha)) = \alpha$, при $z \in \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}$ вектор $\sigma^z(\alpha)$ всегда является бесконечным, а при $z \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M}$ вектор $\sigma^z(\alpha)$ является конечным, если число α рационально и является бесконечным, если число α иррационально.*

Доказательство предложения 13 аналогично доказательству теоремы 14 из [1].

Предложение 14. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \sigma^{\mathfrak{Z}}(\mathbf{R}) &= \Delta \setminus \Delta_0, & \sigma^{\mathfrak{M}}(\mathbf{R}) &= M \setminus M_0, \\ \sigma^{\hat{\mathfrak{Z}}}(\mathbf{R}) &= \Delta \setminus \Delta_N = \Delta_\infty, & \sigma^{\hat{\mathfrak{M}}}(\mathbf{R}) &= M \setminus M_N = M_\infty. \end{aligned}$$

Следствие 3. *Справедливы равенства*

$$\Delta_{\mathbf{Q}} = \{\sigma \in \Delta \mid c(\sigma) \in \mathbf{Q}\}, \quad M_{\mathbf{Q}} = \{\sigma \in M \mid c(\sigma) \in \mathbf{Q}\}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} D_O &= \{\pi = \{t_n/s_n\}_{n \in \mathbb{Z}[-1, \infty)} \in D_\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n/s_n) \in \mathbb{Q}\}, \\ M_O &= \{\pi = \{t_n/s_n\}_{n \in \mathbb{Z}[-1, \infty)} \in M_\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n/s_n) \in \mathbb{Q}\}, \\ D_Q &= D_O \cup D_N, \quad M_Q = M_O \cup M_N, \quad \mathfrak{C}^z(\alpha) = c(\sigma^z(\alpha)), \\ \mathfrak{C}^A(R) &= \{\mathfrak{C}^z(\alpha)\}_{\alpha \in R, z \in A}, \quad R \subseteq \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathbb{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

Следствие 4. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) &= D \setminus D_O, \quad \mathfrak{C}^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}) = M \setminus M_O, \quad \mathfrak{C}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = D_N, \quad \mathfrak{C}^{\mathfrak{M}}(\mathbb{Q}) = M_N, \\ \mathfrak{C}^{\hat{\mathbb{Z}}}(\mathbb{R}) &= D \setminus D_N, \quad \mathfrak{C}^{\hat{\mathfrak{M}}}(\mathbb{R}) = M \setminus M_N, \quad \mathfrak{C}^{\hat{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Q}) = D_O, \quad \mathfrak{C}^{\hat{\mathfrak{M}}}(\mathbb{Q}) = M_O. \end{aligned}$$

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ определим верхнюю α -последовательность, как такую строго монотонно убывающую M -последовательность $\mathfrak{P}(\alpha) = \{t_n/s_n\}_{n \in \mathbb{Z}[-1, p)} \in M$, где $p \in \mathbb{Z}[0, \infty]$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

$$\text{если } \alpha \in \mathbb{Q}, \text{ то } p \in \mathbb{Z}[0, \infty) \text{ и } t_p/s_p = \alpha, \quad (13)$$

$$\text{если } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \text{ то } p = \infty \text{ и существует } \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n/s_n) = \alpha. \quad (14)$$

Аналогично для $\alpha \in \mathbb{R}$ определим строго монотонно возрастающую, начиная с номера $n = 1$, нижнюю α -последовательность $\mathfrak{L}(\alpha)$.

Если в этих двух определениях убрать свойство (13), а вместо него считать что свойство (14) выполнено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, то такие α -последовательности будем называть проколотыми, соответственно, верхними и нижними и обозначать их, соответственно, через $\hat{\mathfrak{P}}(\alpha)$ и $\hat{\mathfrak{L}}(\alpha)$.

Положим

$$\begin{aligned} \sigma^{\hat{r}}(\alpha) &= (\sigma_{0, d^r-1}^r(\alpha), u_{0, d^r}^r(\alpha), a_{0, d^r}^r(\alpha) + 1, 1, 2, 1, 2, \dots), \\ \sigma^{\hat{l}}(\alpha) &= (\alpha - 1, 0, 2, 1, 2, 1, 2, \dots), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \\ \sigma^{\hat{i}}(\alpha) &= (\sigma_{0, d^i-1}^i(\alpha), u_{0, d^i}^i(\alpha), a_{0, d^i}^i(\alpha) + 1, 1, 2, 1, 2, \dots), \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Для $\alpha \in \mathbb{R}$ существует единственная α -последовательность, соответственно, верхняя $\mathfrak{P}(\alpha)$, нижняя $\mathfrak{L}(\alpha)$, проколотая верхняя $\hat{\mathfrak{P}}(\alpha)$ и проколотая нижняя $\hat{\mathfrak{L}}(\alpha)$. При этом $\mathfrak{P}(\alpha)$, $\mathfrak{L}(\alpha)$, $\hat{\mathfrak{P}}(\alpha)$ и $\hat{\mathfrak{L}}(\alpha)$ равны, соответственно, последовательностям $\mathfrak{C}^r(\alpha)$, $\mathfrak{C}^l(\alpha)$, $\mathfrak{C}^{\hat{r}}(\alpha)$ и $\mathfrak{C}^{\hat{l}}(\alpha)$ и все их члены и только они являются наилучшими приближениями, соответственно, сверху, снизу, проколотыми сверху и проколотыми снизу первого рода вещественного числа α .*

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 15 из [1].

Теорема 2. *Последовательность $\mathfrak{C}$ всех подходящих и промежуточных дробей, не меньших α и расположенных в порядке убывания, при $\sigma \in (\Delta \cup M) \setminus (\Delta_O \cup M_O)$ и $\sigma \in (\Delta \cup M) \setminus (\Delta_N \cup M_N)$ совпадает, соответственно, с верхней α -последовательностью $\mathfrak{P}(\alpha)$ и проколотой $\hat{\mathfrak{P}}(\alpha)$, а последовательность таких дробей, не больших α и расположенных в порядке возрастания, совпадает (исключая s_{-1}), соответственно, с нижней α -последовательностью $\mathfrak{L}(\alpha)$ и проколотой $\hat{\mathfrak{L}}(\alpha)$.*

Утверждение теоремы следует из теоремы 1 и следующего замечания.

Замечание 1. Из неравенств $c_n < \alpha$ и $c_{n+1} < \alpha$ следует, что $c_n < c_{n+1} < \alpha$ и $u_{n+2} = 1$, а из неравенств $c_n > \alpha$ и $c_{n+1} > \alpha$ следует, что $\alpha < c_{n+1} < c_n$ и $u_{n+2} = 1$, и, наоборот, из равенства $u_{n+2} = 1$ следует, что либо $c_n < c_{n+1} < \alpha$, либо $\alpha < c_{n+1} < c_n$.

Из неравенств $c_n < \alpha < c_{n+1}$ следует равенство $u_{n+2} = 0$, а из неравенств $c_{n+1} < \alpha < c_n$ следует равенство $u_{n+2} = 0$, и, наоборот, из равенства $u_{n+2} = 0$ следует, что либо $c_n < \alpha < c_{n+1}$, либо $c_{n+1} < \alpha < c_n$. Промежуточные дроби $c_{n,i}$ при $i \in \mathbb{Z}[0, a_n]$ лежат по одну сторону от α и чем больше номер i , тем ближе к α , подходящая дробь c_{n-1} при этом лежит по другую сторону от α .

Обозначим через $\mathfrak{A}_\alpha$ множество всех элементов последовательностей $\mathfrak{P}(\alpha)$ и $\mathfrak{L}(\alpha)$ и будем называть его α -множеством. Соответствующим образом определим $\hat{\mathfrak{A}}_\alpha$ -множество $\hat{\mathfrak{A}}_\alpha$.

Отметим, что полученные в данной работе результаты имеют прямую аналогию с представлением вещественных чисел в виде систематических дробей и, в частности, десятичных.

Теорема 2 показывает, что с позиции рассмотрения всего множества $\mathfrak{A}_\alpha$ подходящих и промежуточных дробей обобщенной цепной дроби конструкция z -представления вещественных чисел в виде обобщенных цепных дробей ничего нового не дает по сравнению с представлением вещественных чисел в виде цепных дробей по А. Я. Хинчину [1]. Тем не менее частный случай этой конструкции оказался полезным при исследовании новых по сравнению с [1] понятий односторонних наилучших приближений вещественного числа α (см., в частности [3, 4]).

3. Далее будем исследовать свойства элементов и индексов разложения числа α в обобщенную цепную дробь с минимальным остатком и их связь с элементами разложения числа α в обычную цепную дробь.

Предложение 15. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_k^m &\geq 2, \text{ если } k \in \mathbb{Z}[1, d^m + 1), \\ a_k^m &\geq 3, \text{ если } k \in \mathbb{Z}[1, d^m), \quad u_{k+1}^m = 1, \\ a_{d^m}^m &\geq 3, \text{ если } d^m < \infty, \quad u_{d^m}^m = 1. \end{aligned}$$

Это утверждение следует из определения m -представления.

Оказывается, что предложение 15 обратимо в следующем смысле.

Предложение 16. Пусть для $\sigma = \sigma_{0,l} \in \Delta$, $l \in \mathbb{Z}[0, \infty]$

$$\begin{aligned} a_k &\geq 2, \text{ если } k \in \mathbb{Z}[1, l + 1), \\ a_k &\geq 3, \text{ если } k \in \mathbb{Z}[1, l), \quad u_{k+1} = 1, \\ a_l &\geq 3, \text{ если } l < \infty, \quad u_l = 1, \end{aligned}$$

тогда

$$\sigma = \sigma^m(c(\sigma)).$$

Доказательство предложения 16 аналогично доказательству теоремы 14 из [1].

Положим

$$u_0^z = u_{d^z+1}^z = 0, \quad d^z < \infty, \quad z \in \mathbb{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathbb{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}.$$

Предложение 17. Для любого $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} a_{k+|\bar{u}_k^m|}^h &= a_k^m - u_{k+1}^m - u_k^m, & k \in \mathbf{Z}[0, d^m + 1), \\ u_k^m = 1 &\Rightarrow a_{k+|\bar{u}_{k-1}^m|}^h = 1, & k \in \mathbf{Z}[1, d^m + 1), \\ r_{k+|\bar{u}_k^m|}^h &= r_k^m - u_k^m, & k \in \mathbf{Z}[0, d^m + 1), \\ d^h &= d^m + |\bar{u}_{d^m}^m|, & \alpha \in \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Доказательство несложно вывести из определений m - и h -представлений.

На основе предложения 17 легко построить алгоритм, в результате реализации которого из последовательности σ^m получается последовательность σ^h . Фактически этот алгоритм в последовательности σ^m для каждого индекса, равного единице, изменяет его значение на нулевое, уменьшает соседние элементы на единицу и вставляет между ними элемент, равный единице, с индексом равным нулю (здесь под элементом понимается элемент обобщенной цепной дроби, а соседними элементами называются те элементы, номера у которых отличаются на единицу).

Аналогично можно построить алгоритм получения из последовательности σ^h последовательности σ^m . Фактически этот алгоритм в последовательности σ^h производит последовательно по номерам (начиная с первого) поиск элемента, равного единице, вычеркивает его вместе с индексом, при этом увеличивая соседние элементы на единицу и изменяя значение верхнего индекса на единицу (здесь под верхним индексом понимается индекс с номером, на единицу большим исходного).

Непосредственным следствием предложения 17 является приводимое ниже предложение 18.

При $\alpha \in \mathbf{Q}$ и $m \in \mathbf{Z}[1, d^h]$ пусть $s(m) \in \mathbf{Z}[0, \infty)$ и последовательности $\{i_j\}_{j \in \mathbf{Z}[1, s(m)]}$ и $\{n_j(m)\}_{j \in \mathbf{Z}[1, s(m)]}$ таковы, что $i_j \in \mathbf{N}$, $n_j(m) \in \mathbf{N}$ при $j \in \mathbf{Z}[1, s(m)]$; $i_{j-1} + n_{j-1}(m) - 1 < i_j$ при $j \in \mathbf{Z}[2, s(m)]$; $i_{s(m)} + n_{s(m)}(m) - 1 \leq m$; при $1 \leq r \leq m$ равенство $a_r^h = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда найдутся такие $j \in \mathbf{Z}[1, s(m)]$ и $k \in \mathbf{Z}[1, n_j(m)]$, что $r = i_j + k - 1$. Фактически, $n_j(m)$ равно количеству единиц в j -м по порядку наборе подряд идущих единиц в векторе $\bar{a}_m^h = (a_1^h, a_2^h, \dots, a_m^h)$. Введем обозначения $s^h = s(d^h)$, $n_j^h = n_j(d^h)$.

Если $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ является решением уравнения второй степени с целыми коэффициентами, то, как показано в [1], последовательность $\bar{a}_\infty^h = (a_1^h, a_2^h, \dots)$ является периодической, то есть существует такой номер N^h и такое натуральное число T^h (период), что для любого $m > N^h$ выполнено равенство $a_m^h = a_{m+T^h}^h$. Как следует из описания алгоритма, тогда последовательности

$$\bar{a}_\infty^m = (a_1^m, a_2^m, \dots), \quad \bar{u}_\infty^m = (u_1^m, u_2^m, \dots)$$

являются периодическими, то есть существует такой номер N^m и такое натуральное число T^m (период), что для любого $n > N^m$ выполнены равенства

$$a_n^m = a_{n+T^m}^m, \quad u_n^m = u_{n+T^m}^m.$$

Тогда аналогично случаю, когда α — рациональное число, можно определить параметр n_j^h , $j \in \mathbf{Z}[1, s^h]$, как количество единиц в j -м по порядку наборе подряд идущих единиц в векторе $\bar{a}_{m, m+T^h}^h = (a_m^h, a_{m+1}^h, \dots, a_{m+T^h}^h)$, где $m > N^h$ и $a_m^h \geq 2$. В вырожденном случае, когда $a_m^h = 1$ для любого $m > N^h$, очевидно, $T^h = T^m = 1$ и $a_n^m = 3$, $u_n^m = 1$ для любого $n > N^m$.

Для вектора $\bar{a}_{r,k} = (a_r, a_{r+1}, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^{k-r+1}$ положим

$$|\bar{a}_{r,k}| = \sum_{j=r}^k a_j.$$

Предложение 18. Если $\alpha \in \mathbf{Q}$, то

$$d^h - d^m = |\bar{a}_{0,d^m}^m| - |\bar{a}_{0,d^h}^h| = |\bar{u}_{d^m}^m| = \sum_{j=1}^{s^h} n_j^h / 2,$$

а если $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ является решением уравнения второй степени с целыми коэффициентами, то в случае, когда $a_m^h = 1$ для любого $m > N^h$, выполнены равенства $T^h = T^m = 1$ и $a_n^m = 3$, $u_n^m = 1$ для любого $n > N^m$, в противном случае

$$T^h - T^m = |\bar{a}_{n,n+T^m}^m| - |\bar{a}_{m,m+T^h}^h| = |\bar{u}_{n,n+T^m}^m| = \sum_{j=1}^{s^h} n_j^h / 2.$$

Следствие 5. Длина m -представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби не больше длины h -представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби и не меньше половины этой длины, то есть

$$\frac{1}{2}d^h \leq d^m \leq d^h.$$

Следствие 6. Период m -представления числа $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, являющегося решением уравнения второй степени с целыми коэффициентами, в виде обобщенной цепной дроби не больше периода h -представления числа α в виде обобщенной цепной дроби и не меньше половины этого периода, то есть

$$\frac{1}{2}T^h \leq T^m \leq T^h.$$

Как было отмечено выше, первая часть утверждения следствия 5 была ранее доказана Кронекером в более общем случае (для всех z -представлений, $z \in \mathbf{Z}$).

Нетрудно вывести из вышеприведенного алгоритма, что подходящие дроби m -представления и h -представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби тесно связаны друг с другом, что отражено в следующем утверждении.

Предложение 19. Любая подходящая дробь m -представления является подходящей дробью h -представления.

Оказывается, что расположение подходящих дробей произвольной обобщенной цепной дроби с при $\sigma \in \Delta \cup M$ (а, значит, и произвольного z -представления, $z \in \mathbf{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \mathbf{Z} \cup \mathfrak{M}$) тесно связано с расположением подходящих и промежуточных дробей h -представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби, что отражено в следующих утверждениях.

Предложение 20. Пусть $\sigma = \sigma_{0,l} \in \Delta \setminus \Delta_0$ и $c(\sigma) = \alpha$. Тогда, если $\alpha \in \mathbf{Z}$, то длина σ равна $l = 0$ и $c_0 = \alpha$, если $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, то для любого $k \in \mathbf{Z}[0, l+1)$ найдется такое $m \in \mathbf{Z}[1, d^h + 1)$ и такое $j \in \mathbf{Z}[0, a_m^h]$, что $c_k = c_{m,j}^h$, при этом,

если $c_k = c_{n,i}^h$, при $n \in \mathbf{Z}[1, d^h + 1]$, $i \in \mathbf{Z}[0, a_n^h - 1]$, $k \in \mathbf{Z}[0, l]$, то, во-первых, найдется такое σ , что выполнено условие, по которому либо $u_{k+2} = 1$, либо $\sigma = \sigma_{0,k+1}$ (при $n = d^h$, $i = a_n^h - 1$), и это условие эквивалентно выполнению равенства $c_{k+1} = c_{n,i+1}^h$, и, во-вторых, найдется такое σ , что выполнено условие, по которому $u_{k+2} = 0$ (исключая случай $n = d^h$, $i = a_n^h - 1$), и это условие эквивалентно выполнению равенства $c_{k+1} = c_{n-1}^h$ (исключая случай $n = d^h$, $i = a_n^h - 1$), и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_k = c_{d^h-1}^h$, то $c_{k+1} = c_{d^h}^h = \alpha$;

если длина σ конечна и равна l , то либо $c_{l-1} = c_{d^h-1}^h$, либо $c_{l-1} = c_{d^h, a^h-1}^h$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть.

Доказательство заключается в многократном применении теоремы 2 и замечания 1 данной работы и леммы из [1].

Аналогично доказываются подобные утверждения для множеств Δ_O , $M \setminus M_O$ и M_O .

При $\alpha \in \mathbf{R}$ положим

$$\begin{aligned}\sigma^{\hat{h}+}(\alpha) &= (\sigma_{0,d^h(\alpha)-1}^h(\alpha), u_{0,d^h(\alpha)}^h(\alpha), a_{d^h(\alpha)}^h(\alpha) + 1, 1, 2, 1, 2, \dots), \\ \sigma^{\hat{h}-}(\alpha) &= (\sigma_{0,d^h(\alpha)-1}^h(\alpha), u_{0,d^h(\alpha)}^h(\alpha), a_{d^h(\alpha)}^h(\alpha) - 1, 0, 2, 1, 2, 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Очевидно, что $\hat{h}+, \hat{h}- \in \hat{Z}$ и

$$\begin{aligned}c_{n,i}^{\hat{h}+} &= c_{n,i}^{\hat{h}-} = c_{n,i}^h, \quad n \in \mathbf{Z}[1, d^h + 1], \quad i \in \mathbf{Z}[0, a_n^h - 1], \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, \\ c_{d^h+i-1}^{\hat{h}+} &= \frac{ia + (i+1)c}{ib + (i+1)d}, \quad c_{d^h+i}^{\hat{h}-} = \frac{(i+1)a + ic}{(i+1)b + id}, \quad i \in \mathbf{Z}[0, \infty),\end{aligned}$$

где $a/b = \alpha - 1$ при $\alpha \in \mathbf{Z}$ и $a/b = c_{d^h, a^h-1}^h$ при $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $c/d = c_{d^h-1}^h$.

Предложение 21. Пусть $\sigma = \sigma_{0,\infty} \in \Delta_O$, $c(\sigma) = \alpha$ и $\alpha \in \mathbf{Q}$. Тогда, если $\alpha \in \mathbf{Z}$, то либо $\sigma = \sigma^{\hat{h}+}(\alpha)$ и $\mathfrak{C}(\sigma) = \mathfrak{C}^{\hat{h}+}(\alpha)$, либо $\sigma = \sigma^{\hat{h}-}(\alpha)$ и $\mathfrak{C}(\sigma) = \mathfrak{C}^{\hat{h}-}(\alpha)$, а если $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то для любого $k \in \mathbf{Z}[0, \infty)$ либо найдется такое $m \in \mathbf{Z}[1, d^h + 1]$ и такое $j \in \mathbf{Z}[0, a_m^h - 1]$, что $c_k = c_{m,j}^h$, либо найдется такое $s \in \mathbf{Z}[d^h, \infty)$, что либо $c_k = c_s^{\hat{h}+}$, либо $c_k = c_s^{\hat{h}-}$,

при этом, если $c_k = c_{n,i}^h$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^h + 1]$, $i \in \mathbf{Z}[0, a_n^h - 1]$, $k \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, исключая случай $n = d^h$, $i = a_n^h - 1$, то, во-первых, найдется такое σ , что выполнено условие, по которому $u_{k+2} = 1$, и это условие эквивалентно выполнению равенства $c_{k+1} = c_{n,i+1}^h$, и, во-вторых, найдется такое σ , что выполнено условие, по которому $u_{k+2} = 0$, и это условие эквивалентно выполнению равенства $c_{k+1} = c_{n-1}^h$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_k = c_{d^h-1}^h$ или $c_k = c_{d^h, a^h-1}^h$, то либо $c_{k+1} = c_{d^h}^{\hat{h}+}$, либо $c_{k+1} = c_{d^h+1}^{\hat{h}-}$, либо, если $c_{k-1} \neq c_{d^h, a^h-1}^h$ или $c_{k-1} \neq c_{d^h-1}^h$, то соответственно $c_{k+1} = c_{d^h, a^h-1}^h$ или $c_{k+1} = c_{d^h-1}^h$;

если $c_k = c_s^{\hat{h}+}$ при $s \in \mathbf{Z}[d^h, \infty)$, либо $c_k = c_s^{\hat{h}-}$ при $s \in \mathbf{Z}[d^h + 1, \infty)$, то соответственно $c_{k+1} = c_{s+1}^{\hat{h}+}$, либо $c_{k+1} = c_{s+1}^{\hat{h}-}$.

Предложение 22. Пусть $\sigma = \sigma_{0,l} \in M \setminus M_O$ и $c(\sigma) = \alpha$. Тогда, если $\alpha \in \mathbf{Z}$, то длина σ равна $l = 0$ и $c_0 = \alpha$, если $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, то для любого $k \in \mathbf{Z}[0, l+1)$ найдется такое $m \in \mathbf{Z}[1, d^h]$ и такое $j \in \mathbf{Z}[0, a_m^h]$, что $c_k = c_{m,j}^h$,

при этом, если $c_k = c_{n,i}^h$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^h + 1)$, $i \in \mathbf{Z}[1, a_n^h - 1]$, $k \in \mathbf{Z}[0, l)$, то $u_{k+2} = 1$ (при $n = d^h$ и $i = a_n^h - 1$ это условие отсутствует) и $c_{k+1} = c_{n,i+1}^h$;

если $c_k = c_n^h$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^h]$, $k \in \mathbf{Z}[0, l)$, то, во-первых, для каждого i из $\mathbf{Z}[1, a_{n+1}^h]$ найдется такое σ , что $u_{k+2} = 0$ и $c_{k+1} = c_{n+1,i}^h$ (при $n = d^h - 1$ и $i = a_{n+1}^h$ условие $u_{k+2} = 0$ отсутствует), и, во-вторых, при $n < d^h - 1$ найдется такое σ , что $u_{k+2} = 1$ и $c_{k+1} = c_{n+2,1}^h$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_0 = c_0^h$, то, во-первых, для каждого $i \in \mathbf{Z}[2, a_1^h]$ найдется такое σ , что $u_2 = 0$ и $c_1 = c_{1,i}^h$ (при $d^h = 1$ и $i = a_1^h$ условие $u_2 = 0$ отсутствует), и, во-вторых, при $d^h > 1$ найдется такое σ , что $u_2 = 1$ и $c_1 = c_{2,1}^h$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

либо $c_0 = c_0^h$, либо $c_0 = c_0^h + 1$ и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть.

Предложение 23. Пусть $\sigma = \sigma_{0,\infty} \in M_O$, $c(\sigma) = \alpha$ и $\alpha \in \mathbf{Q}$. Тогда для любого $k \in \mathbf{Z}[0, \infty)$ либо найдется такое $m \in \mathbf{Z}[1, d^h + 1)$ и такое $j \in \mathbf{Z}[0, a_m^h - 1]$, что $c_k = c_{m,j}^h$, либо найдется такое $s \in \mathbf{Z}[d^h, \infty)$, что либо $c_k = c_s^{h+}$, либо $c_k = c_s^{h-}$,

при этом, если $\alpha \in \mathbf{Z}$, то пара (c_0, c_1) может принимать любое значение из множества

$$\{(\alpha - 1, \alpha - 1/2), (\alpha - 1, \alpha - 1/2)\} \cup \left\{ \left(\alpha, \frac{(-1)^u}{z} \right) \right\}_{u \in \mathbf{F}, z \in \mathbf{Z}[2, \infty)};$$

если $c_k = c_{n,i}^h$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^h + 1)$, $i \in \mathbf{Z}[1, a_n^h - 1]$, $k \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то $u_{k+2} = 1$ (при $n = d^h$ и $i = a_n^h - 1$ найдется как такое σ , что $u_{k+2} = 1$, так и такое σ , что $u_{k+2} = 0$) и $c_{k+1} = c_{n,i+1}^h$;

если $c_k = c_n^h$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^h]$, $k \in \mathbf{Z}[0, l)$, $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то, во-первых, для каждого $i \in \mathbf{Z}[1, a_{n+1}^h]$ найдется такое σ , что $u_{k+2} = 0$ и $c_{k+1} = c_{n+1,i}^h$ (при $n = d^h - 1$ и $i = a_{n+1}^h$ найдется как такое σ , что $u_{k+2} = 1$, так и такое σ , что $u_{k+2} = 0$), и, во-вторых, при $n < d^h - 1$ найдется такое σ , что $u_{k+2} = 1$ и $c_{k+1} = c_{n+2,1}^h$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_0 = c_0^h$, $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то, во-первых, для каждого $i \in \mathbf{Z}[2, a_1^h]$ найдется такое σ , что $u_2 = 0$ и $c_1 = c_{1,i}^h$ (при $d^h = 1$ и $i = a_1^h$ найдется как такое σ , что $u_2 = 1$, так и такое σ , что $u_2 = 0$), и, во-вторых, при $d^h > 1$ найдется такое σ , что $u_2 = 1$ и $c_1 = c_{2,1}^h$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_k = \alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то, во-первых, для каждого $s \in \mathbf{Z}[d^h, \infty)$ найдется такое σ , что $c_{k+1} = c_s^{h+}$, и, во-вторых, для каждого $s \in \mathbf{Z}[d^h + 1, \infty)$ найдется такое σ , что $c_{k+1} = c_s^{h-}$;

при $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ либо $c_0 = c_0^h$, либо $c_0 = c_0^h + 1$ и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_k = c_s^{h+}$ при $s \in \mathbf{Z}[d^h, \infty)$, либо $c_k = c_s^{h-}$ при $s \in \mathbf{Z}[d^h + 1, \infty)$, то соответственно $c_{k+1} = c_{s+1}^{h+}$, либо $c_{k+1} = c_{s+1}^{h-}$.

Список литературы

1. Хинчин А. Я. *Ценные дроби*. Наука, Москва, 1978.
2. Perron O. *Die Lehre von der Kettenbrüchen*, V. 1. Taubner, Berlin, 1954.
3. Финкельштейн Ю. Ю. Односторонние наилучшие приближения и их геометрическая интерпретация. *Экономика и матем. методы* (1992) **28**, №1, 130–136.
4. Финкельштейн Ю. Ю. Полигоны Клейна и приведенные регулярные непрерывные дроби. *Успехи матем. наук* (1933) **48**, №3, 205–206.
5. Zurl E. Theorie der reduziert-regelmäßigen Kettenbrüche. *Math. Annalen* (1934) **110**, №5.

Статья поступила 18.07.1996.

Переработанный вариант поступил 28.04.1998.