Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Алексеев, Минимальные расширения с простым умножением для алгебры матриц второго порядка, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 1, 71–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:33:46

Минимальные расширения с простым умножением для алгебры матриц второго порядка

© 1997 г. В. Б. Алексеев

В работе показано, что результат Штрассена о существовании билинейного алгоритма с 7 умножениями для умножения матриц порядка 2 допускает простую трактовку: существует 7-мерная алгебра с простым умножением, являющаяся расширением алгебры матриц порядка 2. Доказано, что существуют ровно 3 такие 7-мерные алгебры.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94-01-01206.

В [1] введен класс алгебр с простым умножением и показано, что результаты о существовании быстрых билинейных алгоритмов для умножения комплексных чисел и кватернионов могут быть представлены просто как вложение этих алгебр в алгебры с простым умножением. В частности, там построены все трехмерные алгебры с простым умножением над полем действительных чисел, являющиеся расширением алгебры комплексных чисел. Алгебры с простым умножением были определены следующим образом.

Определение 1. Пусть K — некоторое поле, V — векторное пространство над K с дополнительной операцией $x \cdot y$ умножения в V , удовлетворяющей свойству линейности по каждому из аргументов. Тогда V называется алгеброй над полем K .

Определение 2. Пусть V — алгебра на поле K . Тогда V будет называться алгеброй с простым умножением, если существует такой базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в V и существует такая подстановка σ на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, что $e_i e_j = 0$ при $j \neq \sigma(i)$.

Таким образом, умножение в n -мерной алгебре V с простым умножением задается n равенствами

$$e_i e_{\sigma(i)} = f_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} e_k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

и условием, что все остальные произведения базисных векторов равны нулю.

Таблица 1.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$e_0 \cdot e_0$	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$e_2 \cdot e_3$	-1	1	0	0	1	1	0
$e_3 \cdot e_1$	-1	0	1	0	1	0	1
$e_1 \cdot e_2$	-1	0	0	1	0	1	1
$e_5 \cdot e_6$	-1	1	1	0	1	0	0
$e_6 \cdot e_4$	-1	1	0	1	0	1	0
$e_4 \cdot e_5$	-1	0	1	1	0	0	1

Пусть M_2 — алгебра матриц второго порядка над полем действительных чисел, и пусть e_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, обозначает матрицу, у которой элемент в строке i и столбце j равен единице, а остальные элементы равны нулю. Тогда $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ — базис в M_2 , и таблица умножения в M_2 задается равенствами

$$e_{ij}e_{km} = \delta_{jk}e_{im},$$

где δ_{jk} — дельта Кронекера. Обычный алгоритм умножения двух матриц порядка 2 требует 8 умножений их элементов. В [2] для умножения двух матриц порядка 2 был предложен билинейный алгоритм (определение см. ниже) сложности 7. Позднее было доказано, что это оптимальный по сложности билинейный алгоритм [3]. Для умножения матриц порядка $n \geq 3$ оптимальная билинейная сложность неизвестна. Так, для $n = 3$ известно только, что она заключена между 17 и 23 [4]. В связи с этим представляется важным исследовать свойства оптимальных алгоритмов для умножения матриц порядка 2 с тем, чтобы попытаться обобщить их на большие n .

Мы покажем здесь, что результат о существовании билинейного алгоритма сложности 7 для умножения матриц порядка 2 допускает простую трактовку, а именно: существует 7-мерная алгебра с простым умножением, являющаяся расширением алгебры матриц порядка 2. Заметим, что, поскольку билинейная сложность умножения матриц порядка 2 равна 7, по лемме 3 из [1] не существует 6-мерной алгебры с такими же свойствами. Основной результат мы получим в следующей более сильной форме.

Теорема 1. *Существуют ровно 3 с точностью до изоморфизма 7-мерные алгебры с простым умножением над полем действительных чисел, являющиеся расширением алгебры матриц второго порядка, а именно, алгебры, ненулевые произведения базисных элементов в которых заданы в таблицах 1, 3, 4.*

Доказательство. Пусть A_m, B_m, C_m , $m = 0, 1, \dots, 6$, — матрицы порядка 2 с действительными коэффициентами. Будем говорить, что эти матрицы задают билинейный алгоритм сложности 7 для умножения двух матриц $P = \|p_{ij}\|$ и

Таблица 2.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$e_0 \cdot e_0$	0	1	0	-1	1	0	-1
$e_1 \cdot e_5$	-1	0	0	1	0	1	1
$e_2 \cdot e_6$	1	-1	-1	0	-1	0	0
$e_3 \cdot e_4$	0	0	0	1	-1	0	0
$e_4 \cdot e_2$	-1	0	1	1	0	0	1
$e_5 \cdot e_3$	1	-1	0	0	-1	-1	0
$e_6 \cdot e_1$	0	-1	0	0	0	0	1

Таблица 3.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$e_0 \cdot e_0$	0	1	0	1	1	0	1
$e_5 \cdot e_3$	1	-1	0	0	-1	1	0
$e_3 \cdot e_4$	0	0	0	1	1	0	0
$e_4 \cdot e_2$	1	0	1	1	0	0	1
$e_2 \cdot e_6$	1	-1	1	0	-1	0	0
$e_6 \cdot e_1$	0	1	0	0	0	0	1
$e_1 \cdot e_5$	1	0	0	1	0	1	1

$Q = \|q_{ij}\|$ порядка 2, если из равенств при $m = 0, 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned}
 F'_m &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^m p_{ij}, & F''_m &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^m q_{ij}, \\
 r_{ij} &= \sum_{m=0}^6 c_{ji}^m F_m, & F_m &= F'_m F''_m, \quad i, j = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

Таблица 4.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$e_0 \cdot e_0$	1	0	0	0	-1	-1	-1
$e_1 \cdot e_1$	0	-1	0	0	0	0	1
$e_2 \cdot e_2$	0	0	-1	0	0	1	0
$e_3 \cdot e_3$	0	0	0	-1	1	0	0
$e_6 \cdot e_5$	-1	0	0	1	0	1	1
$e_4 \cdot e_6$	-1	0	1	0	1	0	1
$e_5 \cdot e_4$	-1	1	0	0	1	1	0

следует, что $R = \|r_{ij}\| = PQ$. Заметим, что при вычислении r_{ij} используются матрицы, транспонированные к C_m .

Рассмотрим следующие 7 матриц порядка 2:

$$\begin{aligned} S_0 = E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad S_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \\ S_4 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad S_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad S_6 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть ρ — подстановка на множестве $\{0, 1, \dots, 6\}$, следующим образом распадающаяся на циклы $\rho = (0)(123)(456)$. Следующее утверждение легко проверяется.

Лемма 1 ([2]). Пусть

$$A_m = S_m, \quad B_m = S_{\rho(m)}, \quad C_m = S_{\rho^2(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, 6.$$

Тогда матрицы $A_m, B_m, C_m, m = 0, 1, \dots, 6$, задают билинейный алгоритм сложности 7 для умножения двух матриц.

На матрицы (2) мы будем ссылаться как на матрицы Штрассена. Следующая лемма описывает все билинейные алгоритмы сложности 7 для умножения матриц порядка 2.

Лемма 2 ([3]). Пусть $A_m, B_m, C_m, m = 0, 1, \dots, 6$, — матрицы порядка 2 с действительными элементами, задающие билинейный алгоритм для умножения двух матриц порядка 2 над полем действительных чисел.

Тогда с точностью до одновременной перенумерации всех матриц A_m, B_m, C_m существуют невырожденные матрицы X, Y, Z порядка 2 и такие константы $\lambda_m^a, \lambda_m^b, \lambda_m^c, m = 0, 1, \dots, 6$, что

$$\begin{aligned} A_m &= \lambda_m^a X S_m Y^{-1}, \quad B_m = \lambda_m^b Y S_{\rho(m)} Z^{-1}, \\ C_m &= \lambda_m^c Z S_{\rho^2(m)} X^{-1}, \quad \lambda_m^a \lambda_m^b \lambda_m^c = 1, \quad m = 0, 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

где S_m — матрицы Штрассена (2) и $\rho = (0)(123)(456)$.

Установим связь между билинейными алгоритмами сложности 7 для умножения матриц порядка 2 и 7-мерными алгебрами с простым умножением, содержащими подалгебры, изоморфные алгебре матриц порядка 2.

Лемма 3. Пусть $A_m, B_m, C_m, m = 0, 1, \dots, 6$ — матрицы порядка 2 с действительными элементами, задающие билинейный алгоритм для умножения двух матриц порядка 2. Пусть σ — подстановка на множестве $\{0, 1, \dots, 6\}$ такая, что $B_m = A_{\sigma(m)}$. Положим $\gamma_{ik} = \text{Tr}(A_k C_i)$, где Tr — след матрицы. Тогда 7-мерная алгебра V с простым умножением

$$e_i e_{\sigma(i)} = \sum_{k=0}^6 \gamma_{ik} e_k, \quad i = 0, 1, \dots, 6, \quad e_i e_j = 0, \quad j \neq i,$$

содержит подалгебру, изоморфную алгебре матриц порядка 2 над полем действительных чисел.

Доказательство. Рассмотрим вложение φ алгебры M_2 матриц порядка 2 в алгебру V , при котором произвольная матрица $P = \|p_{ij}\|$ переходит в вектор

$$\sum_{m=0}^6 \alpha_m e_m$$

такой, что

$$\alpha_m = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^m p_{ij}, \quad m = 0, 1, \dots, 6,$$

где a_{ij}^m — элементы матрицы A_m . Очевидно, это отображение изоморфно относительно сложения и умножения на действительную константу. Пусть P, Q, R — матрицы порядка 2 и $R = PQ$. Так как матрицы A_m, B_m, C_m задают билинейный алгоритм для умножения матриц порядка 2, то для P, Q, R выполняются равенства (1). Покажем, что в алгебре V справедливо равенство $\varphi(R) = \varphi(P)\varphi(Q)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \sum_{m=0}^6 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^m p_{ij} e_m = \sum_{m=0}^6 F'_m e_m, \\ \varphi(Q) &= \sum_{m=0}^6 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^m q_{ij} e_m = \sum_{m=0}^6 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^{\sigma(m)} q_{ij} e_m \\ &= \sum_{m=0}^6 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^m q_{ij} e_{\sigma(m)} = \sum_{m=0}^6 F''_m e_{\sigma(m)}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (1), получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(P)\varphi(Q) &= \sum_{m=0}^6 F'_m F''_m e_{\sigma(m)} = \sum_{k=0}^6 \sum_{m=0}^6 \gamma_{mk} F'_m e_k \\ &= \sum_{k=0}^6 \sum_{m=0}^6 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^k c_{ji}^m F'_m e_k = \sum_{k=0}^6 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^k r_{ij} e_k = \varphi(R). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $A_m, B_m, C_m, m = 0, 1, \dots, 6$, — произвольные матрицы порядка 2 с действительными элементами такие, что (1) задает билинейный алгоритм для умножения матриц порядка 2. Тогда набор матриц C_m однозначно определяется по наборам матриц A_m и B_m .

Доказательство. Пусть наборы матриц A_m и $B_m, m = 0, 1, \dots, 6$, фиксированы. Тогда фиксированы билинейные формы F_m в (1) от переменных p_{ij} и q_{ij} . Если бы формы F_m были линейно зависимы, то одну из них можно было бы выразить через остальные и получить билинейный алгоритм для умножения матриц порядка 2 сложности 6. Однако, такого алгоритма не существует [3], и, следовательно, формы F_m линейно независимы. Так как r_{ij} — фиксированные билинейные формы от переменных p_{ij} и q_{ij} , коэффициенты c_{ji}^m в (1) однозначно определяются. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть V — алгебра с простым умножением

$$e_i e_{\sigma(i)} = \sum_{k=0}^6 \gamma_{ik} e_k, \quad i = 0, 1, \dots, 6, \quad e_i e_j = 0, \quad j \neq \sigma(i),$$

над полем действительных чисел, содержащая подалгебру, изоморфную алгебре M_2 матриц порядка 2. Пусть отображение

$$\varphi(P) = \sum_{m=0}^6 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^m p_{ij} e_m,$$

где $P = \|p_{ij}\|$ — произвольная матрица порядка 2, является изоморфным вложением алгебры M_2 в V . Положим

$$A_m = \|a_{ij}^m\|, \quad B_m = \|a_{ij}^{\sigma(m)}\|, \quad m = 0, 1, \dots, 6.$$

Тогда существуют матрицы C_m порядка 2 такие, что матрицы A_m, B_m, C_m задают билинейный алгоритм для умножения матриц порядка 2 и $\gamma_{mk} = \text{Tr}(A_k C_m)$, где Tr — след матрицы.

Доказательство. Пусть ψ — произвольное линейное отображение V в M_2 такое, что $\psi(\varphi(P)) = P$ для любой матрицы P . Пусть ψ задается равенствами

$$\psi\left(\sum_{k=0}^6 \alpha_k e_k\right) = \|t_{ij}\|,$$

где

$$t_{ij} = \sum_{k=0}^6 h_{ij}^k \alpha_k, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $P = \|p_{ij}\|, Q = \|q_{ij}\|$ — произвольные матрицы порядка 2 и $R = \|r_{ij}\| = PQ$. Тогда

$$\psi(\varphi(P)\varphi(Q)) = \psi(\varphi(R)) = R.$$

Положим

$$F_m = F'_m F''_m, \tag{3}$$

где

$$F'_m = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^m p_{ij}, \quad F''_m = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}^{\sigma(m)} q_{ij}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \sum_{m=0}^6 F'_m e_m, & \varphi(Q) &= \sum_{m=0}^6 F''_m e_{\sigma(m)}, \\ \varphi(P)\varphi(Q) &= \sum_{m=0}^6 F'_m F''_m \sum_{k=0}^6 \gamma_{mk} e_k = \sum_{k=0}^6 \sum_{m=0}^6 \gamma_{mk} F_m e_k. \end{aligned}$$

Из равенства $\psi(\varphi(P)\varphi(Q)) = R$ получаем, что

$$r_{ij} = \sum_{k=0}^6 h_{ij}^k \sum_{m=0}^6 \gamma_{mk} F_m = \sum_{m=0}^6 \sum_{k=0}^6 h_{ij}^k \gamma_{mk} F_m. \quad (4)$$

Положим

$$c_{ji}^m = \sum_{k=0}^6 h_{ij}^k \gamma_{mk}. \quad (5)$$

Тогда, согласно (3), (4) и (5) матрицы A_m , B_m , $C_m = \|c_{ij}^m\|$ задают билинейный алгоритм умножения двух матриц порядка 2.

Пусть V_1 — образ алгебры M_2 при вложении φ . Рассмотрим векторы

$$d_m = \sum_{k=0}^6 \gamma_{mk} e_k, \quad m = 0, 1, \dots, 6.$$

Равенство (5) означает, что $C_m^T = \psi(d_m)$, где T означает транспонирование. Так как матрицы A_m , B_m фиксированы, по лемме 4 матрицы C_m определяются однозначно, то есть $\psi(d_m)$ не зависит от выбора отображения ψ . Это означает, что $d_m \in V_1 = \varphi(M_2)$. (В частности, отсюда следует, что V^2 изоморфно M_2). На V_1 отображение ψ обратно к φ , поэтому $\varphi(\psi(d_m)) = d_m$ при всех $m = 0, 1, \dots, 6$. Поскольку $\psi(d_m) = C_m^T$, получаем, что

$$\sum_{k=0}^6 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (a_{ij}^k c_{ji}^m) e_k = \sum_{k=0}^6 \gamma_{mk} e_k.$$

Отсюда, $\gamma_{mk} = \text{Tr}(A_k C_m)$. Лемма доказана.

Лемма 6. Все 7-мерные алгебры над полем действительных чисел с простым умножением

$$e_i e_{\sigma(i)} = \sum_{k=0}^6 \gamma_{ik} e_k, \quad e_i e_j = 0, \quad j \neq \sigma(i), \quad (6)$$

являющиеся расширением алгебры M_2 матриц порядка 2, могут быть получены по формулам

$$\gamma_{ik} = \text{Tr}(S_k H^{-1} S_{\rho^2(i)}), \quad \sigma(i) = \tau^{-1}(\rho(i)), \quad (7)$$

где $\rho = (0)(123)(456)$, а H — произвольная матрица порядка 2, удовлетворяющая условию

$$H S_m H^{-1} = S_{\tau(m)} \quad (8)$$

для матриц Штрассена $S_0, S_1, \dots, S_6$ из (2) и некоторой подстановки τ на множестве $\{0, 1, \dots, 6\}$.

Доказательство. Леммы 3 и 5 показывают, что все 7-мерные алгебры с простым умножением над полем действительных чисел, являющиеся расширением алгебры M_2 матриц порядка 2 — это в точности те алгебры, которые получаются так, как указано в лемме 3, из наборов матриц $A_m, B_m, C_m, m = 0, 1, \dots, 6$, задающих билинейный алгоритм умножения матриц порядка 2, с дополнительным условием, что набор матриц B_m является перестановкой набора матриц A_m .

Рассмотрим все такие наборы матриц A_m, B_m, C_m . По лемме 2 все они задаются равенствами

$$\begin{aligned} A_m &= \lambda_m^a X S_m Y^{-1}, & B_m &= \lambda_m^b Y S_{\rho(m)} Z^{-1}, \\ C_m &= \lambda_m^c Z S_{\rho^2(m)} X^{-1}, & \lambda_m^a \lambda_m^b \lambda_m^c &= 1, \quad m = 0, 1, \dots, 6, \end{aligned} \quad (9)$$

где $S_i, i = 0, 1, \dots, 6$, — матрицы Штрассена, X, Y, Z — произвольные невырожденные матрицы и $\rho = (0)(123)(456)$. Сделаем замену

$$\lambda_0^a X \rightarrow X, \quad Z / \lambda_0^b \rightarrow Z.$$

Тогда коэффициенты λ_m^a делятся на λ_0^a , λ_m^b делятся на λ_0^b и λ_m^c делятся на $\lambda_0^c = 1/(\lambda_0^a \lambda_0^b)$. Мы будем считать, что в (9) уже произведено такое преобразование. Тогда $\lambda_0^a = \lambda_0^b = \lambda_0^c = 1$.

Имеется дополнительное условие, состоящее в том, что $B_m = A_{\sigma(m)}$ для некоторой подстановки σ . Заметим, что у всех матриц Штрассена $S_i, i = 1, \dots, 6$, ранг равен 1, кроме матрицы $S_0 = E$. Поэтому ранг матриц $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_6$ равен 1, а $\text{rang } A_0 = \text{rang } B_0 = 2$. Поэтому обязательно $\sigma(0) = 0$ и

$$\lambda_0^a X S_0 Y^{-1} = \lambda_0^b Y S_0 Z^{-1}.$$

Так как $\lambda_0^a = \lambda_0^b = 1$, то $XY^{-1} = YZ^{-1}$. Отсюда $Z = YX^{-1}Y$. Положим $\rho(\sigma^{-1}(m)) = \tau(m)$. Так как $A_m = B_{\sigma^{-1}(m)}$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_m^a X S_m Y^{-1} &= \lambda_{\sigma^{-1}(m)}^b Y S_{\tau(m)} Z^{-1}, \\ S_{\tau(m)} &= \frac{\lambda_m^a}{\lambda_{\sigma^{-1}(m)}^b} Y^{-1} X S_m Y^{-1} Z = \frac{\lambda_m^a}{\lambda_{\sigma^{-1}(m)}^b} Y^{-1} X S_m X^{-1} Y \end{aligned}$$

для всех m . Положим $H = Y^{-1}X$. Тогда

$$S_{\tau(m)} = \frac{\lambda_m^a}{\lambda_{\sigma^{-1}(m)}^b} H S_m H^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что собственные значения каждой матрицы S_m равны 0 и -1 . Тогда у матрицы $S_{\tau(m)}$ собственные числа равны 0 и $-\lambda_m^a / \lambda_{\sigma^{-1}(m)}^b$. Отсюда,

$$\lambda_m^b = \lambda_{\sigma(m)}^a, \quad S_{\tau(m)} = H S_m H^{-1}, \quad m = 0, 1, \dots, 6.$$

При этом для соответствующей 7-мерной алгебры, согласно лемме 3, справедливы равенства

$$e_i e_{\sigma(i)} = \sum_{k=0}^6 \gamma_{ik} e_k,$$

где

$$\gamma_{ik} = \text{Tr}(A_k C_i) = \lambda_k^a \lambda_i^c \text{Tr}(X S_k Y^{-1} Z S_{\rho_{(i)}^2} X^{-1}) = \lambda_k^a \lambda_i^c \text{Tr}(S_k H^{-1} S_{\rho_{(i)}^2}).$$

Приведем эту алгебру к более удобной форме, избавившись от констант. Заменим e_i на $e'_i = \lambda_i^a e_i$. Тогда таблица умножения в новом базисе получается умножением γ_{ik} на

$$\frac{\lambda_i^a \lambda_{\sigma(m)}^a}{\lambda_k^a} = \frac{\lambda_i^a \lambda_i^b}{\lambda_k^a} = \frac{1}{\lambda_i^c \lambda_k^a}.$$

Следовательно, после такой замены

$$\gamma_{ik} = \text{Tr}(S_k H^{-1} S_{\rho_{(i)}^2})$$

и все условия леммы выполняются.

С другой стороны, пусть H — произвольная матрица такая, что $HS_m H^{-1} = S_{\tau(m)}$ для некоторой подстановки τ . Взяв $X = H$, $Y = E$, $Z = H^{-1}$ и положив все λ равными единице, получим, что $XS_m Y^{-1} = YS_{\tau(m)} Z^{-1}$ и $B_m = A_{\sigma(m)}$, где $\sigma(m) = \tau^{-1}(\rho(m))$. При этом $Y^{-1}X = H$, то есть такая матрица H может получиться при рассмотрении различных наборов матриц A_m, B_m, C_m . Лемма полностью доказана.

Лемма 7. Пусть $w_1 = (1, 0)$, $w_2 = (0, -1)$, $w_3 = (-1, 1)$. Тогда в лемме 6 достаточно рассматривать только матрицы H , для которых $\{Hw_1, Hw_2, Hw_3\} = \{w_1, w_2, w_3\}$.

Доказательство. Так как $HEH^{-1} = E$, в (8) всегда $\tau(0) = 0$. Рассмотрим собственные значения и собственные векторы матриц $S_1, \dots, S_6$. Нетрудно видеть, что у каждой из этих матриц одно собственное значение равно нулю и одно равно -1 . При этом собственными векторами каждой матрицы являются два вектора из списка $w_1 = (1, 0), w_2 = (0, -1), w_3 = (-1, 1)$. Пусть $S_m x = \lambda x$ для вектор-столбца x . Если выполняется (8), то $S_{\tau(m)} Hx = \lambda Hx$. Следовательно, собственные векторы матрицы S_m под действием H переходят в собственные векторы матрицы $S_{\tau(m)}$. Таким образом, если выполняется (8), то

$$\{Hw_1, Hw_2, Hw_3\} = \{\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2, \lambda_3 w_3\}$$

для некоторых констант $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Так как $w_1 + w_2 + w_3 = 0$, то $Hw_1 + Hw_2 + Hw_3 = 0$, то есть $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$. Отсюда, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Если H поделить на λ_1 , то (8) сохранится, а γ_{ik} в соответствии с (7) увеличатся в λ_1 раз. Если после этого в алгебре с таблицей умножения (6) все базисные векторы уменьшить в λ_1 раз, то γ_{ik} поделятся на λ_1 , то есть получается алгебра, изоморфная исходной. Таким образом, достаточно рассматривать только такие матрицы H , для которых $\{Hw_1, Hw_2, Hw_3\} = \{w_1, w_2, w_3\}$ и выполняется (8). Лемма доказана.

Условиям леммы 7 удовлетворяют только 6 матриц H , а именно,

$$E, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Если $H = E$, то из (8) и (7) получаем, что τ — тождественная подстановка, $\sigma = \rho$ и $\gamma_{ik} = \text{Tr}(S_k S_{\rho(i)}^2)$. Нетрудно проверить, что получается алгебра с таблицей умножения, представленной в табл. 1. Отметим, что строки в табл. 1 переставлены, чтобы добиться большей симметрии. А именно i -я строка соответствует произведению $e_{\rho(i)} e_{\rho(i)}^2$ и k -й элемент в ней равен $\text{Tr}(S_k S_i)$. Полученную алгебру обозначим $AM1$.

Пусть

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $Hw_1 = w_2$, $Hw_2 = w_1$, $Hw_3 = w_3$. При этом легко проверить, что подстановка τ из (8) имеет вид $\tau = (0)(14)(25)(36)$. Из (7) получаем, что $\sigma = (0)(153426)$ и таблица умножения, вычисленная согласно (6), имеет вид, представленный в табл. 2. Чтобы получить более стандартный вид, заменим в базисе e_2, e_3, e_5, e_6 на $-e_2, -e_3, -e_5, -e_6$. При этом на -1 умножатся строки, соответствующие $e_1 e_5, e_3 e_4, e_4 e_2, e_6 e_1$, и столбцы, соответствующие e_2, e_3, e_5, e_6 . Переставляя строки, получим таблицу умножения, представленную в табл. 3. Алгебру с этой таблицей умножения обозначим $AM2$.

Пусть

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $H(w_1) = w_3$, $H(w_2) = w_1$, $H(w_3) = w_2$ и подстановка τ из (8) имеет вид $\tau = (0)(123)(465)$. Из (7) получаем, что $\sigma = (0)(1)(2)(3)(465)$. Вычислим таблицу умножения соответствующей алгебры по формуле (6) и затем заменим в базисе все векторы на противоположные (при этом все γ_{ik} умножатся на -1). Получающаяся таблица умножения представлена в табл. 4. Соответствующую алгебру обозначим $AM3$. Докажем теперь следующие утверждения.

Лемма 8. *Алгебры $AM1$, $AM2$, $AM3$ попарно не изоморфны.*

Доказательство. В [1] элемент x алгебры L был назван уникальным, если $\dim(xL) \leq 1$, где $xL = \{xa \mid a \in L\}$. Так как никакие две строки в каждой из табл. 1, 3, 4 не пропорциональны, согласно лемме 4 из [1], уникальными векторами в каждой алгебре являются векторы, коллинеарные базисным векторам, и только они. Следовательно, если бы эти алгебры были изоморфны, то при изоморфизме базисные векторы одной алгебры переходили бы в базисные векторы другой алгебры с умножением на некоторые константы. Но тогда подстановки σ , определяющие ненулевые произведения $e_i e_{\sigma(i)}$ в обеих алгебрах, должны были бы быть подобны. Но легко видеть, что наборы длин циклов у подстановок σ в алгебрах $AM1$, $AM2$, $AM3$ различны. Следовательно, эти алгебры не изоморфны. Лемма доказана.

Обозначим через $AM(H)$ алгебру, построенную в соответствии с леммой 6 для матрицы H .

Лемма 9. *Пусть $S_0, S_1, \dots, S_6$ — матрицы Штрассена (2), $\rho = (0)(123)(456)$ и D — матрица, такая, что $DS_k D^{-1} = S_{\pi(k)}$, где π — некоторая подстановка,*

удовлетворяющая условию $\pi\rho = \rho\pi$. Пусть H и H_1 — две матрицы из списка (10), и $H_1 = DHD^{-1}$.

Тогда алгебры $AM(H)$ и $AM(H_1)$ изоморфны.

Доказательство. Так как H и H_1 входят в список (10),

$$HS_kH^{-1} = S_{\tau(k)}, \quad H_1S_kH_1^{-1} = S_{\tau_1}.$$

Из условий леммы получаем, что

$$S_{\tau_1} = DHD^{-1}S_kDH^{-1}D^{-1} = DH_{\pi^{-1}(k)}H^{-1}D^{-1} = DS_{\tau\pi^{-1}(k)}D^{-1} = S_{\pi\tau\pi^{-1}(k)},$$

то есть $\tau_1 = \pi\tau\pi^{-1}$. Пусть ненулевые произведения в алгебрах $AM(H)$ и $AM(H_1)$, построенных в соответствии с леммой 6, задаются подстановками σ и σ_1 . Тогда

$$\sigma = \tau^{-1}\rho, \quad \sigma_1 = \tau_1^{-1}\rho = \pi\tau\pi^{-1}\rho.$$

Таблица умножения в алгебре $AM(H_1)$ имеет вид

$$e'_i e'_{\sigma_1(i)} = \sum_{k=0}^6 \text{Tr}(S_k H_1^{-1} S_{\rho^2(i)}) e'_k.$$

Но

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S_k H_1^{-1} S_{\rho^2(i)}) &= \text{Tr}(S_k D H^{-1} D^{-1} S_{\rho^2(i)}) = \text{Tr}(D^{-1} S_k D H D^{-1} S_{\rho^2(i)} D) \\ &= \text{Tr}(S_{\pi^{-1}(k)} H S_{\pi^{-1}\rho^2(i)}). \end{aligned}$$

Сделаем замену базиса $e'_i = e_{\pi^{-1}(i)}$. Тогда получим, что

$$e_{\pi^{-1}(i)} e_{\pi^{-1}\sigma_1(i)} = \sum_{k=0}^6 \text{Tr}(S_{\pi^{-1}(k)} H^{-1} S_{\pi^{-1}\rho^2(i)}) e_{\pi^{-1}(k)}.$$

Подставив $i = \pi(j)$, $k = \pi(m)$, получим, что

$$e_j e_{\pi^{-1}\sigma_1\pi(j)} = \sum_{m=0}^6 \text{Tr}(S_m H^{-1} S_{\pi^{-1}\rho^2\pi(j)}) e_m.$$

Так как $\pi\rho = \rho\pi$, то $\pi^{-1}\sigma_1\pi = \tau\pi^{-1}\rho\pi = \tau\rho = \sigma$ и $\pi^{-1}\rho^2\pi = \rho^2$. Таким образом, таблица умножения в $AM(H_1)$ в новом базисе имеет вид

$$e_j e_{\sigma(j)} = \sum_{m=0}^6 \text{Tr}(S_m H^{-1} S_{\rho^2(j)}) e_m,$$

что совпадает с таблицей умножения в алгебре $AM(H)$. Лемма доказана.

Лемма 10. Любая 7-мерная алгебра с простым умножением над полем действительных чисел, являющаяся расширением алгебры матриц порядка 2, изоморфна одной из алгебр $AM1$, $AM2$, $AM3$.

Доказательство. Пусть

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда $DS_k D^{-1} = S_{\pi(k)}$, где $\pi = (0)(14)(25)(36)$. При этом $\pi\rho = \rho\pi$. Пусть

$$H = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

— матрица, задающая алгебру $AM3$. Рассмотрим матрицу

$$H_1 = DHD^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

По лемме 9 получаем, что эта матрица задает алгебру, изоморфную $AM3$.

Пусть

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда $DS_k D^{-1} = S_{\pi(k)}$, где $\pi = (0)(123)(465)$, и $\pi\rho = \rho\pi$. Пусть

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

— матрица, задающая алгебру $AM2$. По лемме 9 получаем, что матрицы

$$H_1 = DHD^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad H_2 = DH_1 D^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

задают алгебры, изоморфные алгебре $AM2$.

Рассмотренные алгебры H исчерпывают весь список (10), поэтому утверждение леммы 10 вытекает из лемм 6 и 7.

Леммы 8 и 10 вместе составляют утверждение доказываемой теоремы. Таким образом, теорема полностью доказана.

Один из интересных открытых вопросов — найти алгебру с простым умножением минимальной размерности, являющуюся расширением алгебры матриц порядка n , что явилось бы существенным продвижением в задаче о сложности умножения матриц. Для начала было бы интересно получить решение для случая $n = 3$. Доказанная теорема может помочь в этом поиске.

Список литературы

1. Алексеев В. Б. О некоторых алгебрах, связанных с быстрыми алгоритмами. *Дискретная математика* (1996) 8, №1, 52–64.
2. Штрассен В. Алгоритм Гаусса не оптимален. *Киберн. сб.* (1970) 7, 67–70.
3. de Groote H. F. On varieties of optimal algorithms for the computation of bilinear mappings. II. Optimal algorithms for 2×2 matrix multiplication. *Theoretical Comput. Sci.* (1978) 7, №2, 127–148.
4. Алексеев В. Б. Сложность умножения матриц. Обзор. *Киберн. сб.* (1988) 25, 189–236.

Статья поступила 16.05.94.