Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Круглов, Связь цепей Маркова на конечных простых полугруппах с фундаментальными группами, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 2, 48–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:30:25

Связь цепей Маркова на конечных простых полугруппах с фундаментальными группами

© 2006 г. И. А. Круглов

Исследованы условия сходимости и предельные распределения для последовательностей случайных произведений в конечной простой полугруппе $(S, \circ)$ вида $\eta^{(k)} = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_{k+1}}$, где $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \dots, E_{\alpha_{k+1}}$ — случайная реализация цепочки состояний конечной простой однородной неразложимой цепи Маркова с множеством состояний $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $s_i, i = 1, \dots, n$, — фиксированные не обязательно различные элементы S . Установлено, что условия сходимости определяются свойствами некоторого гомоморфизма фундаментальной группы графа переходов цепи Маркова в структурную группу полугруппы S .

Работа выполнена при поддержке программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-8564.2006.10.

В [1] найдены условия сходимости и предельные распределения для последовательностей произведений случайных величин со значениями в конечных группах, распределения которых определяются конечной простой неразложимой цепью Маркова. В [2] исследованы произведения случайных величин со значениями в конечных простых полугруппах преобразований некоторого конечного множества, распределения которых определяются конечной положительно-регулярной цепью Маркова. Частным случаем таких последовательностей являются последовательности произведений случайных величин, значения которых определяются цепью Маркова. В настоящей работе показано, что в этом частном случае условия сходимости определяются свойствами некоторого гомоморфизма фундаментальной группы графа переходов состояний цепи Маркова в структурную группу простой полугруппы. Это позволяет упростить формулировку условий сходимости, а в некоторых случаях и описание соответствующих предельных распределений. Идея установления связи между предельным поведением изучаемых последовательностей распределений и фундаментальной группой графа цепи Маркова в случае распределений на группах принадлежит Ю. Н. Горчинскому.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathfrak{Z}$ — конечная простая однородная неразложимая цепь Маркова с множеством состояний $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, матрицей переходных вероятностей $P = [p(i, j)]$ и начальным распределением $(p_0(1), \dots, p_0(n))$. Пусть $(S, \circ)$ — конечная простая полугруппа, $s_i, i = 1, \dots, n$, — элементы полугруппы S . По случайной реализации

$$E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \dots, E_{\alpha_{k+1}} \quad (1)$$

цепочки состояний цепи Маркова $\mathfrak{Z}$ в первых $k + 1$ испытаниях построим произведение

$$\eta^{(k)} = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_{k+1}}.$$

Для натурального k и таких $i, j \in \{1, \dots, n\}$, что вероятность $\mathbf{P}(E_{\alpha_1} = E_i, E_{\alpha_{k+1}} = E_j)$ положительна, обозначим через $\eta_{i,j}^{(k)}$ случайную величину, распределение которой совпадает с условным распределением случайной величины $\eta^{(k)}$ при условиях $E_{\alpha_1} = E_i, E_{\alpha_{k+1}} = E_j$. В данной работе исследуется предельное поведение последовательностей распределений случайных величин $\eta_{i,j}^{(k)}$.

По теореме Риса–Сушкевича ([3], с. 78) полугруппа S изоморфна рисовской матричной полугруппе $M(G; A, B; W)$ над группой G с сандвич-матрицей W . Здесь $(G, \cdot)$ — конечная группа (структурная группа S), A, B — непустые конечные множества, $W = [w(b, a)]_{b \in B, a \in A}$ — матрица с элементами из G размера $|B| \times |A|$. Множество $M(G; A, B; W)$ есть множество всех матриц размера $|A| \times |B|$, у которых ровно один элемент есть элемент группы G и все остальные элементы равны нулю; матрицу размера $|A| \times |B|$ с элементом $g \in G$ в строке с номером $a \in A$ и в столбце номером $b \in B$ будем обозначать $[g; a, b]$. Бинарная операция в $M(G; A, B; W)$ определяется следующим соотношением: если

$$s^{(i)} = [g^{(i)}; a^{(i)}, b^{(i)}] \in M(G; A, B; W), \quad i = 1, 2,$$

то

$$s^{(1)} \circ s^{(2)} = [g^{(1)} \cdot w(b^{(1)}, a^{(2)}) \cdot g^{(2)}; a^{(1)}, b^{(2)}] \quad (2)$$

Всюду далее мы предполагаем, что $S = M(G; A, B; W)$, то есть, в отличие от [2], здесь S отождествляется с некоторым ее фиксированным представлением в виде рисовской матричной полугруппы, и формулируем результаты в терминах этого представления.

Мы будем использовать понятия теории графов, следуя изложению п. 3.2 гл. 2 книги [4]. Введем соответствующий цепи $\mathcal{Z}$ граф Γ с множеством вершин $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ и множеством ориентированных ребер $\{e_{i,j}^{+1}, e_{i,j}^{-1} \mid i, j \in \{1, \dots, n\}, p(i, j) > 0\}$. Если $\varepsilon = 1$, то E_i — начало, а E_j — конец $e_{i,j}^{\varepsilon}$, если $\varepsilon = -1$, то E_j — начало, а E_i — конец $e_{i,j}^{\varepsilon}$. Путем z в графе Γ называется последовательность ребер

$$z = (e_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1}, e_{i_2, j_2}^{\varepsilon_2}, \dots, e_{i_k, j_k}^{\varepsilon_k}), \quad (3)$$

у которой для каждого $s = 1, 2, \dots, k-1$ начало ребра $e_{i_{s+1}, j_{s+1}}^{\varepsilon_{s+1}}$ совпадает с концом ребра $e_{i_s, j_s}^{\varepsilon_s}$. При этом начало ребра $e_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1}$ есть начало пути z , конец ребра $e_{i_k, j_k}^{\varepsilon_k}$ — конец пути z . Так как цепь Маркова $\mathcal{Z}$ неразложима, граф Γ сильно связан. Для $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и целого числа R через $L_R(i, j)$ обозначим множество всех путей вида (3) в графе Γ с началом E_i и концом E_j , у которых $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k = R$. Пусть

$$Z^{(1)} = \bigcup_{R=-\infty}^{\infty} L_R(1, 1)$$

— множество петель в Γ с концом E_1 , $\Phi(\Gamma)$ — множество классов эквивалентных петель с концом E_1 , множество $\Phi(\Gamma)$ относительно операции произведения классов петель является группой и называется фундаментальной группой графа Γ (см. [4]). Для петли $z \in Z^{(1)}$ будем также через z обозначать ее класс как элемент $\Phi(\Gamma)$.

Пусть

$$s_i = [g_i; a_i, b_i], \quad g_i \in G, \quad a_i \in A, \quad b_i \in B, \quad i = 1, \dots, n, \\ g_{i,j} = g_i \cdot w(b_i, a_j), \quad p(i, j) > 0, \quad i, j \in 1, \dots, n.$$

Пути z вида (3) поставим в соответствие элемент $g(z) = g_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1} \cdot g_{i_2, j_2}^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot g_{i_k, j_k}^{\varepsilon_k}$ группы G . Если путь z есть произведение (u, v) путей u и v , то $g(z) = g(u) \cdot g(v)$. Если пути u и v эквивалентны, то $g(u) = g(v)$. Отсюда следует, что отображение $\varphi: \Phi(\Gamma) \rightarrow G$, где $\varphi(z) = g(z)$ для всех $z \in \Phi(\Gamma)$, определено корректно и является гомоморфизмом групп. Обозначим через G_1 образ группы $\Phi(\Gamma)$ при гомоморфизме φ .

Пусть d — число циклических подклассов (неразложимой) цепи Маркова $\mathfrak{Z}$. Для петли $z \in Z^{(1)}$ вида (3) положим

$$l(z) = \frac{1}{d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k).$$

Нетрудно видеть, что $l(z) \in \mathbf{Z}$ для всех $z \in Z^{(1)}$. Если петли z и u эквивалентны, то $l(z) = l(u)$, если петля z есть произведение петель u и v , то $l(z) = l(u) + l(v)$. Таким образом, отображение l определяет гомоморфизм группы $\Phi(\Gamma)$ в группу $(\mathbf{Z}, +)$, который мы также будем обозначать через l . Кроме того, поскольку d есть наибольший общий делитель множества чисел $\{d \mid l(z) \mid z \in Z^{(1)}\}$, отображение $l: \Phi(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Z}$ есть эпиморфизм. Зафиксируем произвольно $z' \in \Phi(\Gamma)$, для которого $l(z') = 1$, пусть $x_1 = \varphi(z')$. Пусть $\Phi_0 = \text{Ker } l$, $H = \varphi(\Phi_0)$, тогда H — нормальный делитель G_1 , а $x_1 \cdot H$ — образующий элемент фактор-группы G_1/H . Пусть r_1 — индекс H в G_1 .

Обозначим через ε_{Φ_0} отображение вложения Φ_0 в $\Phi(\Gamma)$, через ε_H — отображение вложения H в G_1 , через ρ_H — естественный эпиморфизм группы G_1 на фактор-группу G_1/H , а также пусть $\lambda_{r_1}: \mathbf{Z} \rightarrow G_1/H$ — эпиморфизм, при котором

$$\lambda_{r_1}(m) = x_1^m \cdot H, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Тогда имеет место следующая коммутативная диаграмма гомоморфизмов групп с точными последовательностями в строках и столбцах:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Phi_0 & \xrightarrow{\varepsilon_{\Phi_0}} & \Phi(\Gamma) & \xrightarrow{l} & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \lambda_{r_1} \\ 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\varepsilon_H} & G_1 & \xrightarrow{\rho_H} & G_1/H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Любой паре $i, j \in \{1, \dots, n\}$ однозначно соответствует число $v(i, j) \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, для которого $L_R(i, j)$ непусто при $R = v(i, j) + kd$ и любом целом k . Пусть

$$\gamma(i, j) = \frac{1}{d}(v(1, i) + v(i, j) - v(1, j)),$$

очевидно, что $\gamma(i, j) \in \{0; +1\}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Зафиксируем произвольно $z_{i,j} \in L_{v(i,j)}(i, j)$, и пусть $\sigma_{i,j} = g(z_{i,j})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Теорема 1. Пусть фиксированы некоторые $i, j \in \{1, \dots, n\}$, причем $p_0(i) > 0$, а $\{k_N\}$, $N = 1, 2, \dots$, — последовательность натуральных чисел, $k_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ последовательность распределений случайных величин

$$\eta_{i,j}^{(s_N)}, \quad s_N = v(i, j) + k_N d, \quad (4)$$

имеет предел тогда и только тогда, когда существует $l \in \{0, 1, \dots, r_1 - 1\}$, для которого $k_N \equiv l \pmod{r_1}$ при всех достаточно больших N . При выполнении этого условия последовательность векторов распределений случайных величин (4) сходится к вектору равномерного распределения на множестве $\{[g; a_i, b_j], g \in \sigma_{1,i}^{-1} \cdot x_1^{l+\nu(i,j)} \cdot H \cdot \sigma_{1,j} \cdot g_j\}$.

Доказательство. Рассмотрим схему произведений случайных величин со значениями в группе G (см. [1], §3), в которой случайной реализации (1) цепи Маркова $\mathcal{Z}$ соответствует случайная величина $\tilde{\eta}^{(k)} = g_{\alpha_1, \alpha_2} \cdot g_{\alpha_2, \alpha_3} \cdot \dots \cdot g_{\alpha_k, \alpha_{k+1}}$. Пусть $\tilde{\eta}_{i,j}^{(k)}$ — случайная величина со значениями в G , распределение которой есть условное распределение $\tilde{\eta}^{(k)}$ при условиях $E_{\alpha_1} = E_i, E_{\alpha_{k+1}} = E_j$. Тогда из соотношения (2) следуют равенства

$$\eta^{(k)} = [\tilde{\eta}^{(k)} \cdot g_{\alpha_{k+1}}; a_{\alpha_1}, b_{\alpha_{k+1}}], \quad \eta_{i,j}^{(k)} = [\tilde{\eta}_{i,j}^{(k)} \cdot g_j; a_i, b_j] \quad (5)$$

Для исследования предельного поведения последовательностей $\tilde{\eta}_{i,j}^{(k)}$ можно использовать результаты работы [1]. Заметим, что подгруппа G_1 , элементы $x_1, \sigma_{i,j}$ и числа $\nu(i, j)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, совпадают с определенными в §3 работы [1] подгруппой, элементами G и числами, имеющими те же обозначения. Кроме того, в [1] вводится минимальная подгруппа H_1 группы G среди ее подгрупп L , удовлетворяющих соотношению

$$g(z) \in x_1^{l(z)} \cdot L \quad \forall z \in Z^{(1)}. \quad (6)$$

Докажем, что $H_1 = H = \varphi(\Phi_0)$. Пусть $\tau \in H$, тогда $\tau = g(z)$ для некоторого $z \in Z^{(1)}$ такого, что $l(z) = 0$. Согласно соотношению (6), выполненному при $L = H_1$, имеет место включение $\tau \in H_1$. Следовательно, $H \subset H_1$. Пусть $z \in Z^{(1)}$, тогда $u = (z, (z')^{-l(z)}) \in Z^{(1)}$, $l(u) = 0$, $\varphi(u) = g(z) \cdot x_1^{-l(z)} \in H$ и $g(z) \in x_1^{l(z)} \cdot H$. Таким образом, (6) выполнено при $L = H$, тогда, в силу минимальности, $H_1 \subset H$. Итак, $H = H_1$. В силу основной теоремы §3 работы [1] последовательность распределений случайных величин $\tilde{\eta}_{i,j}^{(s_N)}$ имеет предел при $N \rightarrow \infty$, если и только если существует $l \in \{0, 1, \dots, r_1 - 1\}$, для которого $k_N \equiv l \pmod{r_1}$ для всех достаточно больших N , и при выполнении этого условия предельное распределение есть равномерное распределение на множестве $\sigma_{1,i}^{-1} \cdot x_1^{l+\nu(i,j)} \cdot H_1 \cdot \sigma_{1,j}$. С учетом (5) отсюда следует утверждение доказываемой теоремы.

Множество

$$H_{a_i, b_j} = \{[g; a_i, b_j] \mid g \in G\}$$

есть H -класс полугруппы S , являющийся пересечением ее R -класса с номером a_i и L -класса с номером b_j . Из соотношения (5) следует, что множество

$$\{s \in S \mid \mathbf{P}(\eta_{i,j}^{(k)} = s) > 0\} \subset H_{a_i, b_j},$$

если $\mathbf{P}(E_{\alpha_1} = E_i, E_{\alpha_{k+1}} = E_j) > 0$. В связи с этим представляет интерес следующее утверждение.

Следствие 1. Для произвольных $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $p(i) > 0$, последовательность векторов распределений случайных величин $\eta_{i,j}^{(s_N)}$, $s_N = \nu(i, j) + N \cdot d$, $N \geq 1$, сходится к вектору равномерного распределения на множестве H_{a_i, b_j} тогда и только тогда, когда отображение $\varphi: \Phi_0 \rightarrow G$ сюръективно.

Условие сюръективности φ на множестве Φ_0 можно переформулировать в терминах порождаемости группы G некоторым подмножеством ее элементов. Пусть t — число ненулевых элементов матрицы переходных вероятностей P . Согласно [4], группа $\Phi(\Gamma)$ есть свободная группа ранга $(t - n + 1)$, в [4] приведен способ выбора $t - n + 1$ свободных образующих $\Phi(\Gamma)$, основанный на выделении в Γ максимального подграфа, являющегося деревом с корнем E_1 .

Пусть $\pi_1, \dots, \pi_c \in \Phi(\Gamma)$ — произвольная система не обязательно свободных образующих группы $\Phi(\Gamma)$. Тогда нетрудно показать, что множество $\{g(\pi_1), \dots, g(\pi_c)\}$ порождает группу G_1 , а множество

$$A = \{x_1^k \cdot g(\pi_i) \cdot x_1^{-k-l(\pi_i)}, i = 1, 2, \dots, c, k = 0, 1, \dots, \text{ord } x_1 - 1\}$$

порождает группу H .

Следствие 2. Для произвольных $i, j \in \{s, \dots, n\}$, $p_0(i) > 0$, последовательность векторов распределений случайных величин $\eta_{i,j}^{(s_N)}$, $s_N = v(i, j) + N \cdot d$, $N \geq 1$, сходится к вектору равновероятного распределения на множестве H_{a_i, b_j} тогда и только тогда, когда множество A порождает группу G .

Рассмотрим теперь частный случай, когда простая полугруппа S является группой, то есть $(S, \circ) = (G, \cdot)$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $w(b, a) = e_G$ — единичный элемент G , $s_i = g_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, $g_{i,j} = g_i$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $p(i, j) > 0$.

В этом случае последовательность $\eta^{(k)}$ есть последовательность произведений случайных величин с значениями в конечной группе G , связанных в цепь Маркова или в случайный процесс, полученный объединением состояний цепи Маркова. Будем также предполагать, что цепь Маркова $\mathfrak{Z}$ положительно регулярна, то есть $d = 1$. В этом случае $v(i, j) = \gamma(i, j) = 0$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $l(z) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$ для любого $z \in Z^{(1)}$ вида (3).

Введем условие на цепь Маркова $\mathfrak{Z}$, в значительной степени упрощающее исследование предельного поведения последовательностей распределений случайных величин $\eta_{i,j}^{(k)}$. Пусть $(F_n, *)$ — свободная группа ранга n с множеством свободных образующих $f_1, f_2, \dots, f_n$. Аналогично гомоморфизму φ можно ввести гомоморфизм групп $\chi: \Phi(\Gamma) \rightarrow F_n$, полагая для $z \in Z^{(1)}$ вида (3)

$$\chi(z) = f_{i_1}^{\varepsilon_1} * f_{i_2}^{\varepsilon_2} * \dots * f_{i_k}^{\varepsilon_k}.$$

Введем обозначение

$$\Omega = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}.$$

Следствие 3. Пусть χ — эпиморфизм групп. Тогда

- (1) подгруппа G_1 есть подгруппа группы G , порожденная множеством Ω ; H есть минимальный нормальный делитель группы G_1 среди всех ее нормальных делителей L , удовлетворяющих условию $\Omega \subset g_1 \cdot L$;
- (2) для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p_0(i) > 0$, последовательность векторов распределений случайных величин $\eta_{i,j}^{(k_N)}$ имеет предел при $N \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда существует $l \in \{0, 1, \dots, r_1 - 1\}$ такое, что $k_N \equiv l \pmod{r_1}$ для всех достаточно больших N , при этом предельный вектор есть вектор равновероятного распределения на множестве $g_1^l \cdot H$.

Доказательство. Докажем первую часть. Обозначим через G_2 подгруппу в G , порожденную Ω , и докажем, что $G_2 = G_1$. Очевидно, что $G_1 \subset G_2$. Для доказательства обратного включения достаточно показать, что $\Omega \subset G_1$. Фиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$, так как χ — эпиморфизм, существует $z \in Z^{(1)}$ вида (3), для которого

$$\chi(z) = f_{i_1}^{\varepsilon_1} * \dots * f_{i_k}^{\varepsilon_k} = f_i. \quad (7)$$

Отображение $\lambda: f_i \rightarrow g_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, индуцирует гомоморфизм $\lambda: F_n \rightarrow G$, причем $\varphi = \chi \circ \lambda$. Следовательно,

$$\varphi(z) = \lambda(f_{i_1}^{\varepsilon_1} * \dots * f_{i_k}^{\varepsilon_k}) = \lambda(f_i) = g_i.$$

Таким образом, $g_i \in G_1$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, что и требовалось доказать.

Обозначим через H_2 минимальный нормальный делитель группы G_1 среди всех ее нормальных делителей L , удовлетворяющих соотношению $\Omega \subset g_1 * L$, докажем, что $H_2 = H$. Группа G_1/H_2 циклическая, порожденная смежным классом $g_1 \cdot H_2$. Докажем, что $H \subset H_2$. Для любой петли $z \in Z^{(1)}$ вида (3)

$$\varphi(z) = g(z) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot g_{i_k}^{\varepsilon_k} \in g_1^{l(z)} \cdot H_2.$$

Следовательно, $H = \varphi(\Phi_0) \subset H_2$. Для доказательства включения $H_2 \subset H$ достаточно показать, что $\Omega \subset g_1 * H$. Фиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$ и выберем петлю $z \in Z^{(1)}$ вида (3), удовлетворяющую условию (7). Из (7) следует, что $l(z) = 1$. Пусть $u = (z, (z')^{-1})$, тогда $\varphi(u) = \varphi(z) \cdot \varphi(z')^{-1} = g_i \cdot x_1^{-1}$, $l(u) = 0$, $\varphi(u) \in \varphi(\Phi_0) = H$ и $g_i \in x_1 \cdot H$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Но тогда $\Omega \subset g_1 * H$.

Докажем вторую часть. В силу только что доказанной первой части, для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $R \in \mathbb{Z}$, $z \in L_R(i, j)$ верно включение $g(z) \in g_1^R \cdot H$. Следовательно, $x_1 \in g_1 \cdot H$, $\sigma_{i,j} \in H$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому справедливость второй части следствия непосредственно вытекает из утверждения теоремы.

Заметим, что при выполнении условия сюръективности χ предельное поведение последовательностей $\eta_{i,j}^{(N)}$ совпадает с предельным поведением произведений независимых одинаково распределенных случайных величин, у которых множество значений в G , принимаемых с положительной вероятностью, есть множество Ω . В этом смысле условие сюръективности χ есть условие предельной слабой зависимости случайных величин со значениями в конечной группе, связанных в функцию от состояний цепи Маркова $\mathfrak{Z}$.

Пусть $(A_n, +)$ — свободная абелева группа ранга n с множеством свободных образующих $\{a_1, \dots, a_n\}$. Аналогично определению гомоморфизма φ , определим гомоморфизм $\psi: \Phi(\Gamma) \rightarrow A_n$, полагая для всех $z \in Z^{(1)}$ вида (3)

$$\psi(z) = \varepsilon_1 \cdot a_1 + \varepsilon_2 \cdot a_2 + \dots + \varepsilon_n \cdot a_n.$$

В случае, когда G — конечная абелева группа, утверждение следствия 3 останется справедливым, если условие сюръективности отображения χ заменить на условие сюръективности ψ .

Условие сюръективности ψ совпадает с известным условием А. Н. Колмогорова [5] на цепь Маркова $\mathfrak{Z}$, обеспечивающим асимптотическую нормальность нормированных сумм вещественных случайных величин, определяемых цепью Маркова $\mathfrak{Z}$. Нетрудно видеть, что из сюръективности гомоморфизма χ следует сюръективность гомоморфизма ψ . Таким

образом, условие сюръективности χ можно рассматривать в качестве аналога условия А. Н. Колмогорова для произвольных конечных групп.

В заключение приведем условие на матрицу P , равносильное сюръективности χ . Пусть P' — матрица, транспонированная к P .

Предложение 1. Пусть P — неразложимая матрица. Тогда χ сюръективен тогда и только тогда, когда матрица $P'P$ неразложима.

Доказательство. Пусть матрица $P'P$ неразложима. Необходимо доказать, что для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует $v \in Z^{(1)}$ такой, что $\chi(v) = f_i$. Фиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$ и выберем $j \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $p(i, j) > 0$. Так как $P'P$ неразложима, существуют пути

$$\begin{aligned} v_1 &= (e_{i_1,1}^{-1}; e_{i_1,j_2}^{+1}; e_{i_3,j_2}^{-1}; e_{i_3,j_4}^{+1}; \dots; e_{i_q,j_{q-1}}^{-1}; e_{i_q,i}^{+1}) \in L_0(1, i), \\ v_2 &= (e_{t_1,j}^{-1}; e_{t_1,k_2}^{+1}; \dots; e_{t_l,k_{l-1}}^{-1}; e_{t_l,1}^{+1}) \in L_0(j, 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда путь $v = (v_1, e_{i,j}^{+1}, v_2) \in Z^{(1)}$ удовлетворяет условию $\chi(v) = f_i$.

Пусть χ сюръективно, докажем, что матрица $P' \cdot P$ неразложима. Достаточно доказать, что для каждого $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ существует путь v_1 вида (8). Так как χ — эпиморфизм, существует путь $z \in Z^{(1)}$, для которого $\chi(z) = f_i$. Будем предполагать, что z есть путь с минимальным числом ребер, удовлетворяющий данному условию. Пусть z имеет вид (3), тогда $\chi(z) = f_i = f_{i_1}^{\varepsilon_1} * \dots * f_{i_k}^{\varepsilon_k}$. Рассмотрим последовательность редуцированных слов $W_1, \dots, W_k$, полученную применением W -процесса к слову $f_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, f_{i_k}^{\varepsilon_k}$ в образующих $f_1, \dots, f_k$ (см. [6], §7.1). Напомним, что $W_1 = f_{i_1}^{\varepsilon_1}$, и если $W_1, \dots, W_v$ определены для $v \in \{1, \dots, k-1\}$, то в случае, когда $W_v = (V, f_{i_{v+1}}^{-\varepsilon_{v+1}})$ для некоторого слова V , $W_{v+1} = V$, в противном случае $W_{v+1} = (W_v, f_{i_{v+1}}^{\varepsilon_{v+1}})$. Из леммы 7.1.1 в [6] следует, что $W_k = f_i$. Пусть $m \in \{1, \dots, k\}$ — минимальное число, удовлетворяющее свойству $W_m = f_i$, так как $i \neq 1$, то $m > 1$. Используя свойство минимальности числа ребер в пути z , нетрудно показать, что m нечетно и $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = +1, \dots, \varepsilon_{m-2} = -1, \varepsilon_{m-1} = +1, \varepsilon_m = +1, i_m = i$. Но тогда $j_1 = 1, j_{m-1} = i$, и путь $e_{i_1,j_1}^{\varepsilon_1}, \dots, e_{i_{m-1},j_{m-1}}^{\varepsilon_{m-1}}$ имеет вид (8) при $q = m - 1$.

Предложение доказано.

Следствие 4. Если матрицы P и $P'P$ неразложимы, то цепь Маркова $\mathfrak{Z}$ удовлетворяет условию А. Н. Колмогорова.

Список литературы

1. Горчинский Ю. Н., Круглов И. А., Капитонов В. М., Вопросы теории распределений на конечных группах. *Труды по дискретной математике* (1997) 1, 85–112.
2. Алиев Ф. К., О предельных распределениях произведений случайных величин на конечной простой полугруппе с распределениями, заданными на переходах положительно-регулярной цепи Маркова. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1997) 4, №3, 316–318.
3. Лаллеман Ж., *Полугруппы и комбинаторные приложения*. Мир, Москва, 1985.
4. Бахтурин Ю. А., *Основные структуры современной алгебры*. Наука, Москва, 1990.
5. Сарымсаков Т. А., *Основы теории процессов Маркова*. ГИТТЛ, Москва, 1954.
6. Холл М., *Теория групп*. ИЛ, Москва, 1962.

Статья поступила 14.03.2006.