Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Л. Белоцерковский, Характеризация некоторых экстремальных графов с диаметром, не превосходящим трех, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 1, 134–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:43:36

Характеризация некоторых экстремальных графов с диаметром, не превосходящим трех

© 1997 г. Д. Л. Белоцерковский

Решается задача нахождения нижней границы числа ребер для графов, в которых после удаления произвольной вершины или ребра диаметр полученного графа не превосходит трех. Перечислены также графы, на которых найденная нижняя граница достигается.

1. Введение

При проектировании сетей передачи данных естественно возникают задачи синтеза сети минимальной стоимости с ограничениями на надежность (см. например, [1]). В процессе решения этой задачи рассматривается задача топологической оптимизации сети. При составлении алгоритмов для топологической оптимизации сети используются нижние оценки числа ребер для графов с заданными свойствами. Данная работа посвящена изучению графов, на которых эти оценки достигаются.

Пусть дан граф $G = (V, E)$, содержащий $N = |V|$ вершин и $M = |E|$ ребер. Далее используются следующие определения.

Диаметром графа $D(G)$ называется максимум среди всех расстояний между любой парой вершин графа G .

Простой цепью называется такой маршрут между двумя вершинами, что любая вершина в этом маршруте встречается ровно один раз.

Граф двусвязен, если существуют две непересекающиеся простые цепи между любыми двумя вершинами.

Обозначим через $R(N, d_1, d_2)$ класс таких графов G с диаметром $D(G) \leq d_1$, что $D(G - x) \leq d_2$ для любой вершины $x \in V$ и $D(G - e) \leq d_2$ для любого ребра $e \in E$. Обозначим через $M(N, d_1, d_2)$ минимальное число ребер в графе $G \in R(N, d_1, d_2)$, граф же, на котором достигается этот минимум, назовем экстремальным. Удаление произвольной вершины в графе G , приводит к конечному диаметру в этом графе, откуда следует, что G — двусвязный граф, а также, что $d_1 \leq d_2$. В этой работе рассмотрен случай $d_2 \leq 3$. Поэтому класс искомых графов обозначим $R(N, 3)$. Общая постановка задачи такова: найти все экстремальные графы класса $R(N, 3)$.

Обозначим через $X(N, d_1, d_2)$ класс таких графов с диаметром $D(G) \leq d_1$, что $D(G - x) \leq d_2$ для любой вершины $x \in V$ и через $E(N, d_1, d_2)$ класс таких графов с диаметром $D(G) \leq d_1$, что $D(G - e) \leq d_2$ для любого ребра $e \in E$. Пусть $M_x(N, d_1, d_2)$ и $M_e(N, d_1, d_2)$ — числа ребер в экстремальных графах класса $X(N, d_1, d_2)$ и $E(N, d_1, d_2)$ соответственно. Ранее в работах [2–11] изучались случаи, когда удаляются только вершины или только ребра. Были найдены экстремальные графы для различных значений d_1 и d_2 . Результаты этих исследований использовались в работах [12, 13] при составлении алгоритмов для топологической оптимизации сети. Однако в процессе совершенствования этих алгоритмов возникла необходимость найти все экстремальные графы класса $R(N, 3)$.

2. Экстремальные графы

2.1. Оценим значение $M(N, 3)$. Рассмотрим граф, представленный на рис. 2. Это граф класса $R(8, 3)$. Операция дублирования любой вершины степени 2 (на рис. 2 изображена пунктиром) приводит к графу класса $R(9, 3)$. Применяя эту операцию многократно, получаем серию графов класса $R(N, 3)$, $N \geq 8$, для которых $|E| = 2N - 5$. Рассмотрим также графы, представленные на рис. 5 и 17а, 17б. Используя операцию дублирования для графов на рис. 5 и 17б, получаем серии графов класса $R(N, 3)$, $N \geq 4$, $|E| = 2N - 4$ и $N \geq 24$, $|E| = 2N - 6$. Следовательно, $M \leq 2N - 4$ для $4 \leq N \leq 7$, $M \leq 2N - 5$ для $8 \leq N \leq 23$, $M \leq 2N - 6$ для $N \geq 24$. В дальнейшем мы покажем, что полученные для числа M неравенства являются равенствами для указанных значений N . Любые две вершины графа из $R(N, 3)$ соединены двумя непересекающимися простыми цепями с длинами, не превосходящими трех. В дальнейшем такую двусвязность будем называть заданной. Пусть w — минимальная степень в графе G класса $R(N, 3)$, в котором $|E| \leq 2N - 4$. Используя лемму о рукопожатиях и условие двусвязности G , получаем, что $2 \leq w \leq 3$ в G . Отсюда, возможны два случая: $w = 2$ и $w = 3$. Пусть $B = (V_B, E_B)$, $N_B = |V_B|$, $M_B = |E_B|$ — подграф искомого графа G , порожденный вершинами степени не менее трех в G , T — множество вершин степени 2 графа G . В случае $w = 3$ подграф B совпадает с графом G .

Рассмотрим случай $w = 2$. Пусть $G = (V, E)$ — граф класса $R(N, 3)$, в котором определен $B = (V_B, E_B)$. Удалим произвольную вершину t из T . Получим подграф $G' = G - \{t\}$ с подграфом $B' = (V'_B, E'_B)$. Граф G назовем образующим графом класса $R(N, 3)$, если выполнено хотя бы одно из условий, $G' \notin R(N - 1, 3)$ или B' не изоморфен B .

Предложение 1. В образующем графе класса $R(N, 3)$ нет треугольника, которому принадлежит вершина t из T .

Доказательство. Допустим, что в образующем графе есть такой треугольник, состоящий из вершин t , a и b . Так как в образующем графе конечный диаметр и $N \geq 4$, существует вершина f , смежная, без ограничения общности, с вершиной a . Для заданной двусвязности вершин t и f существует простая цепь tf длины не более трех, содержащая вершину b и не содержащая вершину a . Следовательно, существует простая цепь ba , содержащая вершину f , длины не более

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

Рис. 11.

Рис. 12.

Рис. 13.

Рис. 14.

Рис. 15.

Рис. 16.

трех. Удалим вершину t . После этой операции получим граф класса $R(N, 3)$, что противоречит определению образующего графа.

Сформулируем теорему об экстремальных графах класса $R(N, 3)$.

Рис.17.

Теорема 1. Для экстремальных графов класса $R(N, 3)$

$$M = \begin{cases} 2N - 4, & 4 \leq N \leq 7, \\ 2N - 5, & 8 \leq N \leq 23, \\ 2N - 6, & N \geq 24. \end{cases}$$

Экстремальный образующий граф в случае $N \geq 24$ изображен на рис. 5.

Замечание 1. Все экстремальные образующие графы, для которых $w = 2$, и единственный экстремальный граф, для которого $w = 3$, в случае $N \leq 23$, изображены на рис. 1–4, 6–17. В доказательстве факта, что приведенные на рис. 1–4, 6–17 графы являются единственными, рассматриваются экстремальные графы в случае $N \leq 23$, и это доказательство весьма громоздко. Поэтому факт, что приведенные на рис. 1–4, 6–17 графы являются единственными, мы приводим без доказательства.

2.2. Докажем некоторые свойства образующего графа G класса $R(N, 3)$, в котором $|E| \leq 2N - 5$, и подграфа B этого графа.

Предложение 2. Пусть $G = (V, E)$ — образующий граф класса $R(N, 3)$, $|E| \leq 2N - 5$, $|T| \geq 2$. Тогда вершины t', t'' из T не смежны.

Доказательство. Предположим противное. Пусть t' и t'' смежны и также смежны с вершинами v' и v'' соответственно. Учитывая, что G двусвязный, $v' \neq v''$. Удаляем ребро, инцидентное t' и v' . Так как $d_2 \leq 3$, вершина v'' смежна с $N - 2$

вершинами. Возвратимся к исходному графу и выполним ту же операцию с ребром, инцидентным t'' и v'' . Аналогично, вершина v' смежна с $N - 2$ вершинами. Оценим общее количество ребер, инцидентных v', v'', t', t'' , ясно, что $|E| \geq 2N - 4$, что противоречит ограничению на значение $|E|$.

Предложение 3. В подграфе $B = (V_B, E_B)$ образующего графа $G = (V, E)$ класса $R(N, 3)$

$$\begin{aligned} M_B &\leq 2N_B - 6, & |E| &\leq 2N - 6, \\ M_B &\leq 2N_B - 5, & |E| &\leq 2N - 5. \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Используя предложение 2, получаем, что в графе $G = (V, E)$

$$|E| = 2|T| + M_B \leq 2N - 6 = 2(|T| + N_B) - 6.$$

Отсюда следует, что $M_B \leq 2N_B - 6$. Аналогично, для случая $|E| \leq 2N - 5$ получается указанная в предложении оценка.

Пусть $B_t = (V_t, E_t)$, $N_t = |V_t|$, $M_t = |E_t|$, — подграф подграфа B искомого графа G , порожденный вершинами, смежными с вершиной t из T , и $B_x = (V_x, E_x)$, $N_x = |V_x|$, $M_x = |E_x|$, — подграф подграфа B искомого графа G , порожденный вершинами, не смежными с вершиной t из T .

Предложение 4. Если $v \in V_t$, то в искомом графе G имеем $d(v, x) \leq 2$ для любой вершины x из G .

Доказательство. Пусть вершина t из T смежна вершинам v и q , вершина x — произвольная вершина в G . Удаляем ребро tq . Для существования простой цепи tx длины, не более трех, необходимо существование простой цепи vx длины, не более двух.

Рассмотрим подграф B_t в искомом графе G и пару вершин a и b , которые смежны с вершиной t из T . Вершины a и b вместе со смежными вершинами из B_t образуют сферы с центрами в вершинах a и b . Из выполнения предложения 4 для вершин a и b вытекает следующее утверждение.

Предложение 5. В подграфе B_t не более двух компонент.

Если в подграфе B_t существуют две непересекающиеся сферы, то не существует t из T , смежной с парой вершин из одной сферы.

2.3. Найдем образующие графы класса $R(N, 3)$, в которых $|E| \leq 2N - 6$, $N \geq 4$. Возможны три случая:

- (а) в искомом графе G нет подграфа B_x ;
- (б) в графе G есть подграф $\hat{B}_x$ и любая из вершин подграфа смежна с хотя бы одной вершиной из V_t ;
- (с) в графе G есть подграф B_x и среди вершин подграфа существует такая вершина, которая смежна только с вершинами из V_x .

Предложение 6. Для случаев (а) и (б) в подграфе B_t искомого графа G

$$M_t \leq 2N_t - 6. \quad (2)$$

Доказательство. В случае (а) нет подграфа B_x , поэтому $M_B = M_t$ и, используя (1), получаем предложение 6.

В случае (б) обозначим j число ребер, одновременно инцидентных вершинам из V_x и V_t . Используя то, что любая вершина из V_x имеет степень не менее 3, лемму о рукопожатиях и (1), получаем, что

$$4N_B - 12 \geq 2M_B \geq 2M_t + j + 3N_x.$$

Так как любая вершина из V_x смежна хотя бы с одной вершиной из V_t , то $j \geq N_x$. Отсюда, используя равенство $N_B = N_t + N_x$, получаем (2).

2.3.1. Пусть U — множество таких пар вершин подграфа B_t , что каждая пара этого множества смежна хотя бы с одной вершиной из T . Мы показали, что вершины такой пары образуют две сферы, которым принадлежат все вершины подграфа B_t . Две пары вершин будем считать различными, если четыре вершины различны. Пусть S — подмножество множества U , состоящее из максимального числа различных пар множества U . Пусть $|S| = s$.

Предложение 7. Пусть $G(V, E)$ — образующий граф класса $R(N, 3)$, $|E| \leq 2N - 6$. Тогда $M_t \geq 2N_t - 6$. Если $M_t = 2N_t - 6$, то $s = 2$ или $s = 3$, $N_t = 6$ и в подграфе B_t никакие две сферы с центрами, принадлежащими одной паре множества S , не пересекаются и $\deg_{B_t} f = 2$ для любой вершины $f \notin S$.

Доказательство. Рассмотрим пару вершин a и b из S и сферы, центрами которых они являются. Если в подграфе B_t сферы с центрами в вершинах a и b непересекающиеся, m_a — число вершин, принадлежащих сфере F_a с центром в вершине a , m_b — число вершин, принадлежащих сфере F_b с центром в вершине b , причем $m_a \geq m_b$, то $N_t = m_a + m_b$. Предположим, что $s = 1$. По предложению 1 вершины a и b не смежны. Допустим, что вершина $d \in V_t$ смежна с вершинами a и b . Пусть t из T смежна с вершинами d и f . Поскольку $s = 1$, то $d \in \{a, b\}$, что противоречит предложению 1. Следовательно, сферы с центрами в вершинах a и b не пересекаются.

Пусть $f \in F_a$ и t' из T смежна с вершинами f и d . Поскольку $s = 1$, справедливо равенство $d = b$. Но тогда любая вершина из T в силу того, что $s = 1$, и с учетом предложения 5, смежна с вершиной b . Следовательно, сфера F_b состоит из вершины b . Если $|F_a| = 1$, то в силу неравенства $m_a \geq m_b$ снова $|F_b| = 1$. Таким образом, каждая вершина t из T смежна с вершиной b и либо с вершиной a , либо с вершиной f , смежной с вершиной a . Поскольку вершины a и f равноправны, вершины сферы F_a порождают полный подграф в B_t и

$$2M_t \geq (m_a - 1)m_a = (N_t - 1)(N_t - 2).$$

Последнее выражение больше, чем $4N_t - 12$ при любом N_t .

Пусть теперь $s \geq 2$. Пусть $\deg_{B_t} x$ — степень вершины x в подграфе B_t . Тогда для вершин a и b , образующих пару вершин множества S

$$\deg_{B_t} a + \deg_{B_t} b \geq N_t - 2.$$

Рассмотрим $f \notin S$. Эта вершина принадлежит хотя бы s сферам. Следовательно, $\deg_{B_t} f \geq s$. Оценим сумму степеней всех вершин подграфа B_t . Заметим, что

$$\sum_{x \in B_t} \deg_{B_t} x \geq s(N_t - 2) + s(N_t - 2s),$$

и следовательно,

$$2M_t \geq s(N_t - 2) + s(N_t - 2s).$$

Нетрудно видеть, что $2M_t \geq 4N_t - 12$ при всех натуральных N_t .

Для случаев, когда $M_t = 2N_t - 6$, имеем либо $s = 2$, либо $s = 3$, $N_t = 6$ и $\deg_{B_t} f = 2$ для любой вершины $f \notin S$. Так как $\deg_{B_t} a + \deg_{B_t} b = N_t - 2$, в подграфе B_t никакие две сферы с центрами, принадлежащими одной паре множества S , не пересекаются.

Из предложений 6 и 7, следует, что для случаев (а) и (б) искомым граф G может существовать только, если $M_t = 2N_t - 6$.

2.3.2. Рассмотрим случай (а), где подграф B совпадает с подграфом B_t . Здесь мы найдем образующий граф $G(V, E)$, $|E| \leq 2N - 6$, и покажем, что он единственный в этом случае.

Пусть $s = 2$, пары вершин a, b и c, d принадлежат S , $c \in F_a$, $d \in F_b$, $m_a \geq m_b$. Будем называть отрезком подграф, порожденный двумя вершинами и одним ребром. Из предложения 7 следует, что подграф, порожденный вершинами a, b, c, d , является объединением пары изолированных отрезков. Если подграф B_t состоит из двух компонент, причем одна из них отрезок с концами d и b , то после удаления ребра bd в графе G получаем, что $d(b, d) \geq 4$, это противоречит условию $d_2 \leq 3$. Пусть $m_a \geq 3$, $m_b \geq 3$. Рассмотрим произвольную вершину $f \notin S$, смежную с вершиной b . Пусть вершина t' из T смежна с вершиной f и либо с вершиной a , либо с вершиной c . Для выполнения предложения 4 для вершин t' и d необходимо, чтобы вершина f была смежна с вершиной d . Так как $\deg_{B_t} f = 2$ и вершина f выбрана произвольным образом, то любая вершина $x \notin S$ смежна только с вершинами сферы F_i , $i \in \{a, b\}$. Отсюда следует, что подграф B_t состоит из двух компонент. Пусть $l \notin S$, $l \in F_a$. Так как $s < 3$, не существует вершины t из T , смежной с вершинами l и f . Следовательно, $d(l, f) \geq 3$, что противоречит предложению 4.

Пусть $s = 3$, $N_t = 6$. Следовательно, $|F_a| = 3$, $|F_b| = 3$. Так как $M_t = 2N_t - 6$ и все вершины в подграфе B_t равноправны, то $\deg_{B_t} x = 2$ для любой вершины x из V_t . Это значит, что подграф B_t представляет собой либо пару изолированных треугольников, либо простой цикл из 6 вершин. Пусть подграф B_t — пара изолированных треугольников. Построим образующий граф G . Для выполнения предложения 4 и условия заданной двусвязности для вершин из V_t необходимо, чтобы для любой пары вершин из разных компонент подграфа B_t существовало две вершины из T , смежных с вершинами этой пары. Полученный таким образом образующий граф $G = (V, E)$, $|V| = 24$, $|E| = 42$ изображен на рисунке 5. Пусть подграф B_t — простой цикл из 6 вершин, вершины $l \in F_a$ и $d \in F_a$, вершины $k \in F_b$ и $f \in F_b$, а также d смежна с f и l смежна с k . Для выполнения предложения 4 для вершин d и f необходимо, чтобы любая вершина из T , смежная с вершиной l , была смежна с вершиной f и любая вершина из T ,

смежная с вершиной k , была смежна с вершиной d . Удалим ребро lk . Получаем, что $d(l, k) = 4$ в графе G , что противоречит условию $d_2 \leq 3$.

2.3.3. Рассмотрим случай (b). Из предложений 6 и 7 следует, что $M_t = 2N_t - 6$ и $s > 1$. Так как в подграфе B_t не более двух компонент, $N_t \geq 4$. Как было показано в доказательстве оценки (2) для случая б), все вершины подграфа B_x имеют степень 3 в графе G и каждая из них смежна ровно с одной вершиной подграфа B_t . Рассмотрим произвольную вершину h из V_x . Пусть вершина h смежна с вершиной f из V_t и вершинами g и l из V_x , смежными с вершинами a и b из V_t соответственно. Пусть все указанные выше вершины подграфа B_t различны. Удалим ребро hf . Для выполнения условия $d(h, x) \leq 3$ для любой вершины x графа G необходимо, чтобы вершины a и b были смежны со всеми вершинами множества T . Отсюда следует, что вершины из T , смежные с вершиной f , смежны либо с вершиной b , либо с вершиной a . Теперь вернемся к исходному графу, восстановив ребро hf . Удалим ребро ga и повторим рассуждения, выполненные после удаления ребра hf . Получаем, что вершины f и b также смежны со всеми вершинами множества T . Отсюда следует, что вершины из T , смежные с вершиной a , смежны либо с вершиной b , либо с вершиной f . Снова вернемся к исходному графу, восстановив ребро ga , и затем, удалив ребро lb , получим, что вершины a и f также смежны со всеми вершинами множества T и вершина f смежна только с теми вершинами из T , которые смежны с вершинами a и b . Таким образом, кроме вершин a, b, f , других вершин подграфа B_t не существует, что противоречит условию $N_t \geq 4$. Допустим, что вершины a и b совпадают. После удаления вершины a получаем, что все вершины множества T смежны с вершиной f . Тогда $s = 1$, что противоречит условию $s > 1$.

2.3.4. Рассмотрим случай (c). Пусть $\deg_B z$ — степень вершины z в подграфе B . Множество вершин, смежных только с вершинами из V_x , обозначим V_{xx} , множество остальных вершин из V_x , обозначим V_{xt} , и пусть j — число ребер, одновременно инцидентных вершинам из V_{xt} и V_t . Покажем, что графов класса $R(N, 3)$, $|E| \leq 2N - 6$, в этом случае не существует. Пусть $\deg x$ — степень вершины x из V_x в графе G . Тогда $\deg x = \deg_B x \geq 3$. Выберем такую вершину y из V_{xx} , что $\deg y \leq \deg x$ для любой вершины x из V_{xx} . Рассмотрим два случая: $\deg y = 3$ и $\deg y \geq 4$. Покажем, что во втором случае $\deg y = 4$. Оценим сумму степеней вершин графа B :

$$4N_B - 12 \geq 2M_B \geq 2M_t + 3|V_{xt}| + j + |V_{xx}|\deg y. \quad (3)$$

Используя предложение 7, соотношения $N_B = N_t + |V_{xt}| + |V_{xx}|$ и $j \geq |V_{xt}|$, получаем, что $\deg y = 4$. Тогда неравенство (3) является равенством из которого следует, что все вершины множества V_{xx} имеют степень 4 в графе G , все вершины множества V_{xt} имеют степень 3 в графе G и каждая из них смежна ровно с одной вершиной подграфа V_t , в подграфе B_t имеем $M_t = 2N_t - 6$ и $s > 1$. Рассмотрим вершину x'' из V_{xt} , смежную с вершинами x' из V_{xx} , a из V_t , z из V_x . Удалим ребро ax'' . Пусть вершина z смежна с вершиной b из V_t . Для выполнения условия $d(x'', t) \leq 3$ в графе G для любой вершины t из T необходимо, чтобы все вершины множества T были смежны с вершиной b . Но тогда в подграфе B_t имеем $s = 1$, что противоречит условию $s > 1$.

Пусть $\deg y = 3$. Вначале покажем, что, если графы класса $R(N, 3)$, $|E| \leq 2N - 6$ существуют, то $\deg_B a \geq 3$ для любой вершины $a \in V_t$. Для выполнения предложения 4 для любой вершины a из V_t необходимо, чтобы вершина a была смежна с такой вершиной из V_{xt} , которая смежна с вершиной y . Следовательно, $j \geq N_t$. Покажем, что $\deg_B a \geq 2$. Действительно, если $\deg_B a = 1$, то после удаления ребра, инцидентного вершине a и вершине из V_{xt} , находим, что $d(a, y) \geq 4$ в искомом графе G , что противоречит условию $d_2 \leq 3$. Пусть существует вершина a , $\deg_B a = 2$. Необходимо рассмотреть два случая: вершина a смежна с вершинами q, z из V_{xt} и вершина a смежна с вершиной q из V_{xt} и вершиной z из V_t . Рассмотрим первый случай. Имеем $j \geq N_t + 1$, если $N_t \geq 3$, и $j \geq 4$, если $N_t = 2$. Следовательно, $j \geq 4$ для любого N_t . Для выполнения для вершины a предложения 4 $N_x - 2$ вершины подграфа B_x должны быть смежны с вершинами q, z . Учитывая заданную двусвязность между вершинами a и q , a и z , приходим к оценке

$$\deg q + \deg z \geq N_x + 1.$$

Так как подграф B_t состоит из двух компонент и одна компонента — изолированная вершина подграфа B_t , заключаем, что $s = 1$ и другая компонента — полный подграф подграфа B_t и поэтому $2M_t = (N_t - 1)(N_t - 2)$. Следовательно, $2M_t \geq 4N_t - 10$. Оценим сумму степеней вершин подграфа B :

$$4N_B - 12 \geq 2M_B \geq 2M_t + 3(N_x - 2) + j + \deg q + \deg z \geq 4N_t + 4N_x + j - 15.$$

Используя равенство $N_t + N_x = N_B$, получаем, что $j \leq 3$, что противоречит уже полученной оценке для значения j .

Рассмотрим второй случай. Здесь $N_t \geq 3$. Для выполнения для вершины a предложения 4 $N_x - 1$ вершина подграфа B_x должна быть смежна с вершинами q и z . Пусть вершина z смежна с n вершинами подграфа B_x . Тогда $j \geq N_t - 1 + n$. Учитывая заданную двусвязность между вершинами a и q , получаем, что $\deg q \geq N_x - n + 1$. Оценим сумму степеней вершин подграфа B :

$$4N_B - 12 \geq 2M_B \geq 3(N_x - 1) + j + \deg q + 2M_t \geq 2M_t + 4N_x + N_t - 3.$$

Используя равенство $N_t + N_x = N_B$, получаем, что $2M_t \leq 3N_t - 9$. Используя предложение 7 и то, что число $2M_t$ четное, получаем оценку $N_t \leq 2$, что противоречит уже полученной оценке для значения N_t . Итак, мы доказали, что, если образующие графы класса $R(N, 3)$, $|E| \leq 2N - 6$, существуют, то $\deg_B x \geq 3$, где x — произвольная вершина подграфа B искомого графа G . Рассмотрим произвольную вершину z из V_x , $\deg z = 3$ в графе G . Пусть вершины k, l, p смежны с вершиной z . Обозначим K_z множество вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины z в подграфе B и L_z множество вершин, находящихся на расстоянии 3 от вершины z в подграфе B . Из предложения 4 следует, что все вершины из L_z принадлежат подграфу B_x .

Предложение 8. Пусть $G(V, E) \in R(N, 3)$, $w = 2$, $|B_{xx}| > 0$, $|E| \leq 2N - 6$. Тогда для произвольной вершины z из B_x , $\deg z = 3$, существует вершина $z' \in B_x$, $\deg z' = 3$, $z' \in L_z$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть все вершины из L_z имеют степень не менее 4. Тогда

$$\deg k + \deg l + \deg p + \deg z \geq |K_z| + 6,$$

а также

$$\sum_{x \in K_z} \deg x \geq 3|K_z|, \quad \sum_{u \in L_z} \deg u \geq 4|L_z|.$$

Используя лемму о рукопожатиях, получаем неравенство

$$4N_B - 12 \geq 2M_B \geq 4|L_z| + 4|K_z| + 6.$$

Учитывая, что $N_B = |K_z| + |L_z| + 4$, заключаем, что неравенство не имеет решений. Предложение 8 доказано.

Рассмотрим подграф G_z графа B , порожденный вершинами, находящимися на расстоянии, не более 2, от вершины z . Пусть $\deg_{G_z} x$ — степень вершины x в подграфе G_z .

Предложение 9. (1) *Каждой вершине из L_z инцидентны хотя бы два ребра, инцидентных вершинам из K_z .*

(2) $\deg_{G_z} x \geq 2$ для любой вершины $x \in K_z$.

(3) Если $z \in V_{xx}$, то

$$\deg_B k + \deg_B l + \deg_B p \geq \frac{N_B + 4}{2}. \quad (4)$$

(4) Если $z \in V_{xt}$, то

$$\deg_B k + \deg_B l + \deg_B p \geq \frac{N_B + 10}{2}. \quad (5)$$

Доказательство. Часть 1 предложения 9 следует из заданной двусвязности между вершинами из L_z и вершиной z . Часть 2 следует из заданной двусвязности между вершинами из K_z и вершиной z . Докажем часть 3 предложения 9. Из определения вершин k, l, p следует, что

$$\deg_B k + \deg_B l + \deg_B p \geq |K_z| + 3. \quad (6)$$

Используя части 1 и 2 предложения 9, оценим сумму степеней вершин подграфа B :

$$\begin{aligned} 4N_B - 12 &\geq 2M_B \\ &\geq \deg_B k + \deg_B l + \deg_B p + \deg z + \sum_{x \in K_z} \deg_{G_z} x + 2|L_z| + \sum_{u \in L_z} \deg u \\ &\geq 3|K_z| + 6 + 5|L_z|. \end{aligned}$$

Используя равенство $N_B = |K_z| + 4 + |L_z|$, получаем, что $|K_z| \geq (N_B - 2)/2$. Подставляя это выражение в формулу (6), получаем формулу (4).

Докажем часть 4 предложения 9. Рассмотрим вершину k . Для заданной двусвязности между вершиной z и вершиной k необходимо, чтобы вершина k была смежна либо с вершиной g , $g \in \{l, p\}$, либо с вершиной r из K_z , которая смежна с вершиной g . Отсюда получаем, что

$$\deg k + \deg l + \deg p \geq |K_z| + 5. \quad (7)$$

Используя части 1 и 2 предложения 9, оценим сумму степеней вершин подграфа B :

$$\begin{aligned} 4N_B - 12 &\geq 2M_B \\ &\geq \deg k + \deg l + \deg p + \deg z + \sum_{x \in K_z} \deg_{G_z} x + 2|L_z| + \sum_{u \in L_z} \deg u \\ &\geq 3|K_z| + 8 + 5|L_z|. \end{aligned}$$

Используя равенство $N_B = |K_z| + 4 + |L_z|$, получаем, что $|K_z| \geq N_B/2$. Подставляя это выражение в формулу (7), получаем формулу (5).

Рассмотрим теперь вершину y из V_{xx} , $\deg y = 3$, и вершину y' из V_x такую, что $\deg y' = 3$ и $y' \in L_z$. Из предложения 8 следует, что такая вершина y' существует. Пусть вершины k, l, p смежны с вершиной y и вершины k', l', p' смежны с вершиной y' . Так как $d(y, y') = 3$ в графе G , вершины k', l', p', k, l, p различны. Из предложения 9 следует, что

$$\deg k + \deg l + \deg p \geq \frac{N_B}{2} + 5, \quad \deg_B k' + \deg_B l' + \deg_B p' \geq \frac{N_B}{2} + 2.$$

Оценим сумму степеней вершин подграфа B :

$$2M_B \geq 3(N_B - 6) + \deg k + \deg l + \deg p + \deg_B k' + \deg_B l' + \deg_B p' > 4N_B - 12. \quad (8)$$

Но необходимо, чтобы $2M_B \leq 4N_B - 12$; получаем противоречие с (6). Следовательно, образующих графов класса $R(N, 3)$ в случае, когда $w = 2$ и $|V_{xx}| > 0$, с $|E| \leq 2N - 6$ не существует.

2.4. Рассмотрим случай, когда $w = 3$. В этом случае подграф B совпадает с искомым графом. Допустим, что мы нашли граф $G(V, E)$, $|E| \leq 2N - 6$. Рассмотрим произвольную вершину z степени 3 графа G и смежные с ней вершины k, l, p . Обозначим K_z множество вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины z , и L_z — множество вершин, находящихся на расстоянии 3 от вершины z .

Предложение 10. Пусть $G(V, E) \in R(N, 3)$, $w = 3$, $|E| \leq 2N - 6$, тогда для произвольной вершины z , $\deg z = 3$, существует вершина $z' \in L_z$ такая, что $\deg z' = 3$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть все вершины из L_z имеют степень не менее 4. Тогда

$$\deg k + \deg l + \deg p + \deg z \geq |K_z| + 6,$$

а также

$$\sum_{x \in K_z} \deg x \geq 3|K_z|, \quad \sum_{y \in L_z} \deg y \geq 4|L_z|.$$

Используя лемму о рукопожатиях, получаем неравенство

$$4N - 12 \geq 2|E| \geq 4|L_z| + 4|K_z| + 6.$$

Учитывая равенство $N = |K_z| + |L_z| + 4$, заключаем, что неравенство не имеет решений, что доказывает предложение 10.

Рассмотрим подграф G_z графа G , порожденный вершинами, находящимися на расстоянии, не более 2, от вершины a .

Предложение 11. *Каждой вершине из L_z инцидентно хотя бы два ребра, инцидентных вершинам из K_z ,*

$$\deg_{G_z}(x \in K_z) \geq 2, \quad (9)$$

$$\deg k + \deg l + \deg p \geq \frac{N}{2} + 5. \quad (10)$$

Доказательство. Первое утверждение следует из заданной двусвязности между вершинами из L_z и вершиной z . Оценка (9) следует из заданной двусвязности между вершинами из K_z и вершиной z . Докажем оценку (10). Из определения вершин k, l, p следует, что $\deg k + \deg l + \deg p \geq |K_z| + 3$. Для заданной двусвязности между вершиной z и вершиной k необходимо, чтобы вершина k была либо смежна с вершиной $g, g \in \{l, p\}$, либо с вершиной r из K_z , которая смежна с вершиной g . Отсюда получаем, что

$$\deg k + \deg l + \deg p \geq |K_z| + 5. \quad (11)$$

Используя первые два утверждения предложения 11, оценим сумму степеней вершин искомого графа G :

$$\begin{aligned} 4N - 12 \geq 2|E| &\geq \deg k + \deg l + \deg p + \deg z + \sum_{x \in K_z} \deg_{G_z} x + 2|L_z| + \sum_{y \in L_z} \deg y \\ &\geq 3|K_z| + 8 + 5|L_z|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $N = |K_z| + 4 + |L_z|$, получаем оценку $|K_z| \geq N/2$. Подставляя ее в формулу (11), получаем (10).

Рассмотрим теперь вершину z графа G степени 3 такую, что $d(z, z') = 3$ в графе G . Пусть вершины k', l', p' смежны с вершиной z' . Так как предложение 10 доказано для произвольной вершины степени 3 искомого графа G , $\deg k' + \deg l' + \deg p' \geq N/2 + 5$. Так как $d(z, z') = 3$, вершины k', l', p', k, l, p различны. Теперь оценим сумму степеней искомого графа G :

$$2|E| \geq 3(N - 6) + \deg k + \deg l + \deg p + \deg k' + \deg l' + \deg p' \geq 4N - 8. \quad (12)$$

Но необходимо, чтобы $2|E| \leq 4N - 12$, что противоречит (12). Следовательно, графов класса $R(N, 3)$, $w = 3$, $|E| \leq 2N - 6$, не существует.

Итак, мы доказали, что для экстремальных графов класса $R(N, 3)$ параметр $M = 2N - 6$ при $N \geq 24$ и любой экстремальный граф строится на базе графа, изображенного на рис. 5, с помощью операции дублирования любой вершины степени 2 в этом графе. Мы также показали, что для экстремальных графов класса $R(N, 3)$ параметр $M > 2N - 6$ при $N < 24$.

2.5. Покажем, что при $N < 8$ для экстремальных графов класса $R(N, 3)$ параметр $M = 2N - 4$. Допустим, что существует образующий граф G класса $R(N, 3)$ с числом $|E| = 2N - 5$ ребер при $N < 8$. Тогда для такого графа выполнены предложения 1, 3, 4, 5 и неравенство (1). Следовательно, $M' = 2N_B - 5$ и $N_B \geq 3$.

Оценивая сумму степеней вершин G , находим, что $3N_B + 2|T| = 4N_B + 4|T| - 10$. Отсюда $N_B = 10 - 2|T|$. Но при $N_B = 3$ и $N_B \geq 5$ целых значений $|T|$, являющихся решениями уравнения $N_B = 10 - 2|T|$ и неравенства $N_B + |T| \leq 7$ не существует. Пусть $N_B = 4$. Тогда $M_B = 3$. Рассмотрим всевозможные графы с 4 вершинами и 3 ребрами. Это простая цепь длины 3, звезда и объединение изолированной вершины и треугольника. Если подграф B — звезда, то, по предложению 1, в искомом графе центр звезды — вершина подграфа B_x . Но тогда подграф B_t представляет собой три изолированные вершины, что противоречит предложению 5. На рис. 2 и 6 изображены экстремальные образующие графы с 8 вершинами, у которых подграф B есть объединение изолированной вершины и треугольника (рис. 6) и простая цепь длины 3 (рис. 2). Следовательно, образующего экстремального графа с такими подграфами B при $N \leq 7$ не существует. Отсюда, экстремальных графов класса $R(N, 3)$ с $M = 2N - 5$ при $N \leq 7$ не существует.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за ряд замечаний, существенно улучшивших изложение результатов статьи.

Список литературы

1. Жожикашвили В. А., Вишневский В. М. *Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ*. Радио и связь, Москва, 1988.
2. Bollobas B. *Extremal graph theory*. Acad. Press, London, 1978.
3. Vijlan K., Murty U. S. R. On accessibility in graphs. *Sankhya* (1964) **26**, 279–302.
4. Murty U. S. R. On some extremal graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1968) **19**, 67–74.
5. Caccetta I. Extremal graphs with given diameter and connectivity. *Annals of New York Acad. of Sci. Topics in graph theory*. (1979) **328**, 76–94.
6. Bollobas B. A problem in the theory of communication networks. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1968) **19**, 78–80.
7. Caccetta I. Extremal graphs of diameter 3. *J. Austral. Math. Soc.* (1979) **28**, №1, 63–84.
8. Caccetta I. Extremal graphs of diameter 4. *J. Comb. Theory* (1976) **21**, 104–115.
9. Caccetta I. Characterization of extremal graph of diameter 4. *Ars Combinatoria* (1979) **7**, 301–317.
10. Usami Y. Extremal graphs of diameter at most 8 after deleting only vertex. *J. Graph Theory* (1985) **9**, №2, 221–234.
11. Usami Y. Extremal graphs of diameter at most 8 after deleting any vertex. *Utilitas Mathematica* (1986) **3**, 153–180.
12. Федотов Е. В. *Разработка и исследование алгоритмов синтеза топологической структуры сетей передачи данных автоматизированных систем массового обслуживания*. ИПУ РАН, Москва, 1988.
13. Вишневский В. М., Федотов Е. В. *Топологическое проектирование сетей пакетной коммутации*. ИППИ РАН, Москва, 1992.

Статья поступила 03.07.94.

Переработанный вариант поступил 14.02.97.