Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков, Об асимптотике моментов числа непоявившихся s -цепочек, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 1, 12–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:46:09

Об асимптотике моментов числа непоявившихся s -цепочек

© 1997 г. М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков

В статье исследуется асимптотическое поведение числа $\mu_0(B)$ непоявившихся s -цепочек из множества $B \subset \{(i_1 \dots i_s): 1 \leq i_k \leq N, k = 1, \dots, s\}$ в полиномиальной схеме с исходами $1, 2, \dots, N$. Предполагается, что s постоянно, а изменения числа испытаний и вероятностей исходов соответствуют центральной области изменения параметров. Получены асимптотические формулы для $E\mu_0(B)$, $E\mu_0(B)(\mu_0(B) - 1)$ и $D\mu_0(B)$. Для широкого класса множеств B установлена асимптотическая нормальность $\mu_0(B)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-00531.

1. Введение

В работе М. И. Тихомировой [1] для полиномиальной схемы с N исходами $1, 2, \dots, N$ исследовалось асимптотическое поведение числа μ_0 непоявившихся s -цепочек из множества всех s -цепочек $A = \{(i_1, \dots, i_s): 1 \leq i_k \leq N, k = 1, \dots, s\}$. В данной работе исследуется поведение числа непоявившихся s -цепочек $\mu_0(B)$ среди s -цепочек из подмножества $B \subset A$. Так же, как в [1], будем предполагать, что при $N \rightarrow \infty$ число испытаний n и вероятности исходов $p_i, i = 1, \dots, N$, удовлетворяют условиям

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{n}{N^s} = \alpha \leq \alpha_2 < \infty, \quad 0 \leq Np_k \leq C, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

При выводе асимптотических формул моментов использование формул метода включения-исключения (см., например, [3, 4]) для вычисления вероятностей комбинаций событий и оценки мощностей некоторых множеств упрощает получение ряда оценок, для вывода которых в [1] были использованы уравнения в конечных разностях.

Асимптотическая нормальность $\mu_0(B)$ (так же, как и в [1]) получается в качестве следствия из результатов В. Г. Михайлова [2], если установлено, что в условиях (1) при $N \rightarrow \infty$

$$0 < C_0 \leq \sigma_N^2(B) \leq C_1 < \infty,$$

где $\sigma_N^2(B) = D\mu_0(B)/N^s$.

2. Формулы для моментов

Пусть

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t, \dots \quad (2)$$

— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и

$$\mathbf{P}\{\gamma_t = i\} = p_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Первые $n + s - 1$ членов последовательности (2) определяют последовательность s -цепочек $\eta_t = (\gamma_t, \gamma_{t+1}, \dots, \gamma_{t+s-1})$, $t = 1, 2, \dots, n$. Величину $\mu_0(B)$, равную числу s -цепочек из множества $B \subset A$, отсутствующих среди s -цепочек η_t , $t = 1, \dots, n$, можно представить в виде

$$\mu_0(B) = \sum_{I \in B} \varepsilon_I, \quad (3)$$

где $I = (i_1, \dots, i_s)$, $\varepsilon_I = 1$, если $\eta_t \neq I$ при всех $t = 1, 2, \dots, n$ и $\varepsilon_I = 0$ в противном случае. Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}\mu_0(B) = \sum_{I \in B} P_I, \quad (4)$$

$$\mathbf{E}\mu_0^{[2]}(B) = \sum_{I \neq J; I, J \in B} P_{IJ}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} m^{[k]} &= m(m-1)\dots(m-k+1), \quad I = (i_1, \dots, i_s), \quad J = (j_1, \dots, j_s), \\ P_I &= \mathbf{P}(\bar{A}_1(I) \cap \bar{A}_2(I) \cap \dots \cap \bar{A}_n(I)), \\ P_{IJ} &= \mathbf{P}((\bar{A}_1(I) \cap \bar{A}_1(J)) \cap (\bar{A}_2(I) \cap \bar{A}_2(J)) \cap \dots \cap (\bar{A}_n(I) \cap \bar{A}_n(J))), \\ A_t(I) &= \{\eta_t = I\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим

$$\begin{aligned} T(l) &= \{t = (t_1, \dots, t_l): 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n\}, \quad S_0(I) = 1, \quad S_0(I, J) = 1, \\ S_l(I) &= \sum_{t \in T(l)} \mathbf{P}(A_{t_1}(I) \cap A_{t_2}(I) \cap \dots \cap A_{t_l}(I)), \\ S_l(I, J) &= \sum_{t \in T(l)} \mathbf{P}((A_{t_1}(I) \cup A_{t_1}(J)) \cap \dots \cap (A_{t_l}(I) \cup A_{t_l}(J))) \quad I \neq J. \end{aligned} \quad (7)$$

Вероятности (6) удобно представить в следующем виде (см. [3, гл. IV]:

$$P_I = P_I(\varphi_n) + Q_I(\varphi_n), \quad P_{I,J} = P_{I,J}(\varphi_n) + Q_{I,J}(\varphi_n), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} P_I(\varphi_n) &= \sum_{l=0}^{\varphi_n-1} (-1)^l S_l(I), & P_{I,J}(\varphi_n) &= \sum_{l=0}^{\varphi_n-1} (-1)^l S_l(I, J), \\ |Q_I(\varphi_n)| &\leq S_{\varphi_n}(I), & |Q_{I,J}(\varphi_n)| &\leq S_{\varphi_n}(I, J). \end{aligned}$$

Отсюда и из формул (4), (5) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0(B) &= \sum_{l=0}^{\varphi_n-1} (-1)^l (\Sigma_l(1)) + \tilde{\Sigma}_n(1), \\ \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(B) &= \sum_{l=0}^{\varphi_n-1} (-1)^l (\Sigma_l(2)) + \tilde{\Sigma}_n(2), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Sigma_l(1) = \sum_{I \in B} S_l(I), \quad \Sigma_l(2) = \sum_{I \neq J; I, J \in B} S_l(I, J), \quad l = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

$$\tilde{\Sigma}_n(1) \leq \Sigma_{\varphi_n}(1), \quad \tilde{\Sigma}_n(2) \leq \Sigma_{\varphi_n}(2). \quad (11)$$

Для получения асимптотических формул моментов суммы (7) потребуется разбить на три части, полагая

$$S_l(I) = S_l^{(1)}(I) + S_l^{(2)}(I) + S_l^{(3)}(I), \quad (12)$$

$$S_l(I, J) = S_l^{(1)}(I, J) + S_l^{(2)}(I, J) + S_l^{(3)}(I, J). \quad (13)$$

Соответственно этим разбиениям представим суммы $\Sigma_l(1)$, $\Sigma_l(2)$ (в которые входят $S_l(I)$ и $S_l(I, J)$) тоже в виде трех слагаемых:

$$\Sigma_l(k) = \Sigma_l^{(1)}(k) + \Sigma_l^{(2)}(k) + \Sigma_l^{(3)}(k), \quad k = 1, 2.$$

В суммы $S_l^{(1)}(I)$ и $S_l^{(1)}(I, J)$ включаются слагаемые, в которых s -цепочки $(\gamma_{t_i}, \gamma_{t_i+1}, \dots, \gamma_{t_i+s-1})$, $i = 1, \dots, l$, попарно не пересекаются, во вторые суммы включаются слагаемые, в которых пересекается ровно одна пара, в третьи суммы включаются все остальные слагаемые. Определим соответствующие множества начал s -цепочек $t = (t_1, t_2, \dots, t_l)$. Положим

$$\begin{aligned} M_i^{(u)} &= M_i^{(u)}(n, s, l) = \{t: t \in T(l), t_{i+1} - t_i = u\}, \quad i = 1, 2, \dots, l-1, \quad 1 \leq u \leq s-1, \\ M_i &= M_i(n, s, l) = \bigcup_{u=1}^{s-1} M_i^{(u)}(n, s, l). \end{aligned} \quad (14)$$

В суммах $S_l^{(v)}(I)$, $S_l^{(v)}(I, J)$, $v = 1, 2, 3$, суммирование проводится соответственно по $t = (t_1, \dots, t_l)$ из множеств

$$\begin{aligned} T_1(l) &= T(l) \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} M_i(n, s, l), \\ T_2(l) &= \bigcup_{i=1}^{l-1} \bigcup_{u=1}^{s-1} T_2^{(u)}(l, i, n), \\ T_3(l) &= T(l) \setminus (T_1(l) \cup T_2(l)), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$T_2^{(u)}(l, i, n) = \{t: t \in T(l), t_{i+1} - t_i = u, t_{j+1} - t_j \geq s, j \neq i\}. \quad (16)$$

Теперь можно записать суммы в (12) и (13) в следующем виде:

$$S_l^{(v)}(I) = \sum_{t \in T_v(I)} \mathbf{P}(A_{t_1}(I) \cap \dots \cap A_{t_l}(I)),$$

$$S_l^{(v)}(I, J) = \sum_{t \in T_v(I)} \mathbf{P}((A_{t_1}(I) \cup A_{t_1}(J)) \cap \dots \cap (A_{t_l}(I) \cup A_{t_l}(J))), \quad v = 1, 2, 3.$$

Нам потребуется оценка остаточных членов $\tilde{\Sigma}_n(1)$ и $\tilde{\Sigma}_n(2)$ в выражениях (9)

$$\tilde{\Sigma}_n(k) \leq \sum_{v=1}^3 \Sigma_{\varphi_n}^{(v)}(k), \quad k = 1, 2.$$

Докажем несколько лемм.

Лемма 1. Если $\varphi_n = 3s \ln N / \ln \ln N$ и выполнены условия (1), то равномерно по всем изменяющимся параметрам при любом $\delta > 0$

$$\Sigma_{\varphi_n}^{(1)}(1) < \frac{C_1}{N^{(2-\delta)s}}, \quad \Sigma_{\varphi_n}^{(1)}(2) < \frac{C_2}{N^{(1-\delta)s}},$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Отметим сначала, что в суммах $S_l^{(1)}(I)$, $S_l^{(1)}(I, J)$ события $A_{t_i}(I)$, $A_{t_i}(J)$ при различных i независимы и

$$\mathbf{P}(A_{t_i}(I) \cup A_{t_i}(J)) = \mathbf{P}(A_{t_i}(I)) + \mathbf{P}(A_{t_i}(J))$$

при $I \neq J$. Отсюда и из условий (1) получаем оценки

$$\mathbf{P}(A_{t_1}(I) \dots A_{t_l}(I)) = (p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s})^l \leq (C/N)^{ls},$$

$$\mathbf{P}((A_{t_1}(I) \cup A_{t_1}(J)) \cap \dots \cap (A_{t_l}(I) \cup A_{t_l}(J))) = (p_{i_1} \dots p_{i_l} + p_{j_1} \dots p_{j_l})^l \leq (2C^s/N^s)^l.$$

Число слагаемых в суммах $S_l^{(1)}(I)$ и $S_l^{(1)}(I, J)$ не превосходит $n^l/l!$, а число слагаемых в суммах $\Sigma_l^{(1)}(1)$ и $\Sigma_l^{(1)}(2)$ при любом $B \subset A$ не превосходит, соответственно, $|A| = N^s$ и $|A|^{[2]} < N^{2s}$. Из этих замечаний и равенства $n = \alpha N^s$ получаем, что

$$\Sigma_l^{(1)}(1) = \sum_{I \in B} S_l^{(1)}(I) \leq \frac{n^l}{l!} \left(\frac{C^s}{N^s} \right)^l N^s = \frac{(\alpha C^s)^l}{l!} N^s,$$

$$\Sigma_l^{(2)}(1) = \sum_{I \neq J; I, J \in B} S_l^{(1)}(I, J) \leq \frac{n^l}{l!} \left(\frac{2C^s}{N^s} \right)^l N^{2s} = \frac{(2\alpha C^s)^l}{l!} N^{2s}.$$

Отсюда при $l = \varphi(n) = 3s \ln N / \ln \ln N$ получаем утверждение леммы.

Лемма 2. Если $\varphi_n = 3s \ln N / \ln \ln N$ и выполнены условия (1), то равномерно по всем изменяющимся параметрам при любом $\delta > 0$

$$\Sigma_{\varphi_n}^{(2)}(1) < \frac{C_1}{N^{s(2-\delta)}}, \quad \Sigma_{\varphi_n}^{(2)}(2) < \frac{C_2}{N^{s(1-\delta)}},$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. В суммы $S_l^{(2)}(I)$, $S_l^{(2)}(I, J)$ входят слагаемые, в которых ровно одна пара s -цепочек пересекается. Число слагаемых с $t_2 - t_1 = u$, $1 \leq u \leq s - 1$, не превосходит $n^{l-1}/(l-1)!$. Вероятность события $A_{t_1}(I)A_{t_2}(I)$ при пересечении s -цепочки по u знакам, если u последних знаков первой цепочки совпадают с u первыми знаками второй цепочки, не превосходит C^{2s-u}/N^{2s-u} , а в остальных случаях $A_{t_1}(I)A_{t_2}(I) = \emptyset$. Число s -цепочек, приводящих к положительной вероятности, при любом $B \subset A$ не превосходит N^{s-u} . Отсюда следует, что сумма слагаемых в $\Sigma_l^{(2)}(1)$ с $t_2 - t_1 = u$ не превосходит

$$\frac{n^{l-1}}{(l-1)!} \frac{C^{2s-u}}{N^{2s-u}} N^{s-u} \left(\frac{C^s}{N^s} \right)^{l-2} = \left(\frac{n}{N^s} \right)^{l-1} \frac{1}{(l-1)!} C^{2s-u}.$$

Учитывая, что число значений u равно $s - 1$, а единственную пару сцепленных s -цепочек можно выбрать $l - 1$ способами, $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{l-1}, t_l)$, для всей суммы $\Sigma_l^{(2)}(1)$ получим оценку

$$\Sigma_l^{(2)}(1) \leq (s-1)(l-1) \frac{\alpha^{l-1}}{(l-1)!} C^{2s-1}.$$

Отсюда, при $l = \varphi_n$, получаем первую оценку леммы.

Аналогично оценивается вторая сумма. Вероятность сцепленной пары цепочек представляется в виде

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}((A_{t_1}(I) \cup A_{t_1}(J)) \cap (A_{t_2}(I) \cup A_{t_2}(J))) \\ &= \mathbf{P}(A_{t_1}(I) \cap A_{t_2}(I)) + \mathbf{P}(A_{t_1}(I) \cap A_{t_2}(J)) + \mathbf{P}(A_{t_1}(J) \cap A_{t_2}(I)) + \mathbf{P}(A_{t_1}(J) \cap A_{t_2}(J)). \end{aligned}$$

Если $t_2 = t_1 + u$, $1 \leq u \leq s - 1$, то нужно оценить число вариантов пар (I, J) , при которых $\mathbf{P}(A_{t_1}(I) \cap A_{t_2}(I)) > 0$ и $\mathbf{P}(A_{t_1}(I) \cap A_{t_2}(J)) > 0$. В первом из этих случаев I можно выбрать, при любом B , не более, чем N^{s-u} способами, а выбор J ограничивается только условием $I \neq J$. Таким образом, в первом случае пара (I, J) может быть выбрана не более, чем N^{2s-u} способами. Такая же оценка получается во втором случае. Вероятность сцепленной пары цепочек не превосходит $(C/N)^{2s-u}$. Общая оценка $\Sigma_l^{(2)}(2)$ получается аналогично оценке $\Sigma_l^{(2)}(1)$:

$$\Sigma_l^{(2)}(2) \leq 4(s-1)(l-1) \frac{n^{l-1}}{(l-1)!} C^{2s-1} \left(\frac{2C^s}{N^s} \right)^{l-2}.$$

Отсюда, при $l = \varphi_n$, получаем второе неравенство доказываемой леммы.

В оценку сумм $\Sigma_l^{(3)}(k)$, $k = 1, 2$, войдут мощности множеств $B_1(u)$, $B_2(u)$, $1 \leq u \leq s - 1$, определяемых равенствами

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \{I: (i_1, \dots, i_u) = (i_{s-u+1}, \dots, i_s), I \in B\}, \\ B_2(u) &= \{(I, J): (i_{s-u+1}, \dots, i_s) = (j_1, \dots, j_u), I, J \in B, I \neq J\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Лемма 3. Если выполнены условия (1), то при любом $l \geq 3$, $3 \leq l \leq \varphi_n$, $\varphi_n = 3s \ln N / \ln \ln N$, и любом $\delta > 0$

$$\left| \Sigma_l^{(3)}(1) \right| \leq C_1 c_0^l \max_{1 \leq u \leq s-1} \frac{D_1(u)}{N^{s-u}}, \quad \left| \Sigma_l^{(3)}(2) \right| \leq C_1 c_0^l \max_{1 \leq u \leq s-1} N^u D_2(u),$$

где

$$D_1(u) = \frac{|B_1(u)|}{N^{s-u}} \leq 1, \quad D_2(u) = \frac{|B_1(u)||B| + |B_2(u)|}{N^{2s-u}} \leq 2.$$

C_1, c_0 — некоторые положительные постоянные.

При любом $\delta > 0$, любом $B \subseteq A$ и $\varphi_n = 3s \ln N / \ln \ln N$

$$\left| \Sigma_{\varphi_n}^{(3)}(1) \right| \leq C_1 / N^{1-\delta}, \quad \left| \Sigma_{\varphi_n}^{(3)}(2) \right| \leq C_1 N^{s-1+\delta}.$$

Доказательство. Каждому упорядоченному представлению l в виде суммы целых положительных слагаемых сопоставим разбиение l s -цепочек с началами в $(t_1, t_2, \dots, t_l)$ на группы сцепленных s -цепочек: слагаемое соответствует числу сцепленных s -цепочек в данной изолированной группе. Например, сумме $l = l_1 + l_2 + l_3$ соответствуют три изолированные группы s -цепочек: в первую входят цепочки с началами в $t_1, t_2, \dots, t_{l_1}$, во вторую группу цепочки с началами в $t_{l_1+1}, \dots, t_{l_1+l_2}$, а остальные l_3 цепочек входят в третью изолированную группу.

При каждом наборе $t = (t_1, \dots, t_l)$ определены следующие числа: m_1 — число изолированных s -цепочек, m_r — число изолированных групп из r сцепленных цепочек, $r = 2, \dots, l$. Очевидно, что

$$m_1 + 2m_2 + \dots + lm_l = l. \quad (18)$$

Для наборов $t \in T_3(l)$ выполняются неравенства

$$m_2 + m_3 + \dots + m_l \geq 1, \quad m_2 + 2m_3 + \dots + lm_l \geq 2. \quad (19)$$

Действительно, если $m_2 = 1$, а $m_3 = \dots = m_l = 0$, то $t \in T_2(l)$, а не $T_3(l)$. Число наборов t с заданными числами $m_1, \dots, m_l$ и с фиксированным разбиением на изолированные группы (их число равно $m_1 + \dots + m_l$) не превосходит $n^{m_1 + \dots + m_l} / (m_1 + \dots + m_l)!$. Число способов представления l в виде сумм упорядоченных слагаемых равно 2^{l-1} . В группе из v сцепленных s -цепочек каждую из $v-1$ цепочек можно располагать по отношению к соседней s -цепочке с меньшим номером $s-1$ способами. Для группы из v цепочек число их взаимных расположений равно $(s-1)^{v-1}$. Для всех m_v групп из v цепочек число вариантов не превосходит $(s-1)^{(v-1)m_v}$ и общее число вариантов взаимных расположений по всем группам не превосходит

$$(s-1)^{m_1 + 2m_2 + \dots + lm_{l-1}} = (s-1)^l.$$

Оценим теперь вероятности заданных групп s -цепочек в $S_l^{(3)}(I, J)$. Вероятность $\mathbf{P}((A_{t_1}(I) \cup A_{t_1}(J)) \cap \dots \cap (A_{t_l}(I) \cup A_{t_l}(J)))$ можно записать в виде суммы 2^l слагаемых, каждое из которых равно вероятности произведения l событий (при каждом t_i в произведение включается либо $A_{t_i}(I)$, либо $A_{t_i}(J)$).

Обозначим u наибольшее перекрытие s -цепочек с началами $t_1, \dots, t_l$. Пусть, например, $t_2 = t_1 + s - u$, а остальные $t_{i+1} - t_i \geq s - u$. Среди 2^l слагаемых встретятся слагаемые двух типов: слагаемые, содержащие произведение $A_{t_1}(I) \cap A_{t_2}(I)$, и слагаемые, содержащие произведение $A_{t_1}(I) \cap A_{t_2}(J)$. Числа пар (I, J) , дающих ненулевые вероятности в этих случаях, равны, соответственно, $|B_1(u)||B(u)|$ и $|B_2(u)|$.

В любой из m_v групп s -цепочек, сцепленных по v , наибольшая оценка вероятности получается при наибольшем перекрытии s -цепочек и, следовательно, вероятность каждой группы s -цепочек, сцепленных по v , не превосходит $(C/N)^{s+(s-u)(v-1)}$, а вероятность m_v изолированных групп не превосходит $(C/N)^{(s+(s-u)(v-1))m_v}$. Собирая вместе приведенные выше оценки, получаем, что

$$\Sigma_l^{(3)}(2) \leq 2^l 2^{l-1} (s-1)^l \max_{m_1, \dots, m_l} \max_{1 \leq u \leq s-1} \frac{n^{m_1+\dots+m_l}}{(m_1+\dots+m_l)!} N^{2s-u} D_2(u) \left(\frac{C}{N}\right)^{w_N},$$

где $w_N = s(m_1+\dots+m_l) + (s-u)(m_2+2m_3+\dots+(l-1)m_l)$. Отсюда и из неравенств (19) получаем оценку

$$\begin{aligned} \Sigma_l^{(3)}(2) &\leq \frac{1}{2} (4(s-1))^l \max_{m_1, \dots, m_l} \max_{1 \leq u \leq s-1} \frac{(C\alpha)^{m_1+\dots+m_l}}{(m_1+\dots+m_l)!} \\ &\quad \times \frac{N^{2s-u} C^{(s-u)(m_2+\dots+(l-1)m_l)}}{N^{(s-u)(m_2+\dots+(l-1)m_l)}} D_2(u). \quad (20) \end{aligned}$$

Величина $(C\alpha)^{m_1+\dots+m_l}/(m_1+\dots+m_l)!$ ограничена, а $m_2+\dots+(l-1)m_l \geq 2$. Отсюда и из (20) следует утверждение леммы для $\Sigma_l^{(3)}(2)$. Оценка для $\Sigma_l^{(3)}(1)$ проводится аналогично. В приведенных оценках нужно заменить N^{2s-u} и $D_2(u)$ на N^{s-u} и $D_1(u)$ и число слагаемых 2^l заменить на 1.

Полученные оценки позволяют ограничиться изучением сумм со слабо растущим числом слагаемых.

3. Асимптотические формулы для математического ожидания

Для получения асимптотической формулы для $E\mu_0(B)$ воспользуемся точной формулой (4) и оценками остаточных членов, полученными в леммах из предыдущего параграфа. Для вычисления главных членов потребуется асимптотическая формула для числа слагаемых в суммах $S_l^{(1)}(I)$ и $S_l^{(2)}(I)$.

Лемма 4. При $s \geq 2$, $l \geq 2$

$$\left| \bigcup_{i=1}^{l-1} M_i(n, s, l) \right| = \frac{n^{l-1}}{(l-2)!} (s-1) + \Delta_{n,l}, \quad (21)$$

где $M_i(n, s, l)$ определяется равенством (14),

$$\Delta_{n,l} \leq C_1 \frac{l^3 n^{l-2}}{(l-2)!},$$

C_1 — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Воспользуемся оценкой

$$\left| \left| \bigcup_{i=1}^{l-1} M_i(n, s, l) \right| - \sum_{i=1}^{l-1} |M_i(n, s, l)| \right| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq l-1} |M_i \cap M_j|. \quad (22)$$

Число наборов $t = (t_1, \dots, t_l) \in M_i^{(u)}(n, s, l)$ можно перебрать следующим образом. Положим $t_i = v$, $t_{i+1} = v + u$. Левее t_i из множества $(1, 2, \dots, v-1)$ нужно выбрать $t_1, \dots, t_{i-1}$, а правее t_{i+1} нужно из множества $(v+u+1, \dots, n)$ выбрать $t_{i+2}, \dots, t_l$. Это можно сделать $\binom{v-1}{i-1} \binom{n-v-u}{l-i-1}$ способами. Таким образом,

$$|M_i^{(u)}(n, s, l)| = \sum_{v=i}^{n-u-l+i+1} \binom{v-1}{i-1} \binom{n-v-u}{l-i-1},$$

$$\sum_{i=1}^{l-1} |M_i(n, s, l)| = \sum_{u=1}^{s-1} \sum_{i=1}^{l-1} |M_i^{(u)}(n, s, l)|, \quad l \geq 2,$$

$$\sum_{i=1}^{l-1} |M_i(n, s, l)| = \sum_{u=1}^{s-1} (n-u) \binom{n-u-1}{l-2} = (l-1) \sum_{u=1}^{s-1} \binom{n-u}{l-1}. \quad (23)$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{l-1} |M_i(n, s, l)| = (l-1) \left(\binom{n}{l} - \binom{n-s+1}{l} \right). \quad (24)$$

Представим $\binom{n}{l}$ в виде

$$\binom{n}{l} = \frac{n^l}{l!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{l-1}{n}\right) = \frac{n^l}{l!} \left(1 - \frac{1 + \dots + (l-1)}{n} + \Delta_1\right), \quad (25)$$

где

$$\Delta_1 < \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq l-1} ij < \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{l-1} i \right)^2 \frac{l^2(l-1)^2}{4n^2}. \quad (26)$$

Аналогично

$$\binom{n-s+1}{l} = \frac{n^l}{l!} \left(1 - \frac{s-1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{l+s-2}{n}\right) \times \frac{n^l}{l!} \left(1 - \frac{(s-1) + \dots + (l+s-2)}{n} + \Delta_2\right), \quad (27)$$

где

$$\Delta_2 < \frac{1}{n^2} \sum_{s-1 \leq i < j \leq l+s-2} ij < \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=s-1}^{s+l-2} i \right)^2. \quad (28)$$

Величину $|M_i(n, s, l) \cap M_j(n, s, l)|$ оценим следующим образом. Выбор $t_1, \dots, t_l$ без t_{i+1} и t_{j+1} можно сделать $\binom{n}{l-2}$ способами. Положим

$$t_{i+1} = t_i + u_1, \quad t_{j+1} = t_j + u_2, \quad 1 \leq u_1 \leq s-1, \quad 1 \leq u_2 \leq s-1.$$

Значения пары (u_1, u_2) можно выбрать $(s-1)^2$ способами. Отсюда следует, что

$$|M_i \cap M_j| \leq (s-1)^2 \binom{n}{l-2} \leq (s-1)^2 \frac{n^{l-2}}{(l-2)!}$$

и

$$\sum_{1 \leq i < j \leq l-1} |M_i \cap M_j| \leq (s-1)^2 \frac{l(l-1)}{2} \frac{n^{l-2}}{(l-2)!}.$$

Из этих оценок и оценок (24)–(28) следует утверждение леммы.

Из этой леммы нетрудно получить асимптотическую формулу для числа слагаемых в суммах $S_l^{(1)}(I)$, $S_l^{(1)}(I, J)$, равного мощности $|T_1(l)|$ множества $T_1(l)$, определенного равенством (15). Из равенств (15), равенств

$$|T_1(l)| = |T(l)| \setminus \left| \bigcup_{i=1}^{l-1} M_i(n, s, l) \right|, \quad |T(l)| = \binom{n}{l}$$

и леммы 4 получаем следующее утверждение.

Лемма 5. При любом $s \geq 2$, $2 \leq l \leq n$

$$|T_1(l)| = \frac{n^l}{l!} - \frac{n^{l-1}}{(l-2)!} \frac{2s-1}{2} + \Delta,$$

где $|\Delta| < C_1 l^3 n^{l-2} / (l-2)!$, C_1 — некоторая положительная постоянная.

Нам потребуются также оценки чисел в суммах $S_l^{(2)}(I)$ и $S_l^{(2)}(I, J)$.

Лемма 6. При любом $s \geq 2$, $2 \leq l \leq n$, $i = 1, \dots, l-1$

$$\begin{aligned} \left| \left| T_2^{(u)}(l, i, n) \right| - \left| M_i^{(u)}(n, s, l) \right| \right| &\leq (s-1)(l-1) \binom{n}{l-2} \leq \frac{(s-1)ln^{l-2}}{(l-2)!}, \\ \sum_{i=1}^{l-1} |M_i^{(u)}(n, s, l)| &= \frac{n^{l-1}}{(l-2)!} \left(1 + O\left(\frac{l^2}{n}\right) \right), \end{aligned}$$

где $T_2^{(u)}(l, i, n)$ и $M_i^{(u)}(n, s, l)$ определены равенствами (14) и (16).

Доказательство. Из равенств

$$T_2^{(u)}(l, i, n) = M_i^{(u)}(n, s, l) \setminus \bigcap_{j=1, j \neq i}^{l-1} \bar{M}_j(n, s, l), \quad \bar{M}_i = T(l) \setminus M_i,$$

следует, что

$$T_2^{(u)}(l, i, n) = M_i^{(u)}(n, s, l) \setminus \bigcup_{j \neq i} M_i \cap M_j^{(u)}$$

и

$$\left| \left| T_2^{(u)}(l, i, n) \right| - \left| M_i^{(u)}(n, s, l) \right| \right| \leq \sum_{j \neq i} |M_i \cap M_j^{(u)}|.$$

Набор $t = (t_1, t_2, \dots, t_l)$ с $t_{i+1} = t_i + u$, $t_{j+1} = t_j + v$, $1 \leq v \leq s-1$, с заданными u и v можно выбрать $\binom{n}{l-2}$ способами, v выбирается $s-1$ способами. Отсюда

и из последнего неравенства следует первое утверждение леммы. Используя равенство (23), получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l-1} |M_i^{(u)}(n, s, l)| &= \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{v=i}^{n-l-u+i+1} \binom{v-1}{i-1} \binom{n-v-u}{l-i-1} \\ &= \sum_{v=1}^{n-u} \binom{n-u-1}{l-2} = (n-u) \binom{n-u-1}{l-2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует второе утверждение леммы.

Перейдем теперь к оценке сумм

$$\Sigma_l^{(1)}(1) = \sum_{I \in B} S_l^{(1)}(I), \quad \Sigma_l^{(2)}(1) = \sum_{I \in B} S_l^{(2)}(I).$$

Лемма 7. Если выполнены условия (1), то

$$\begin{aligned} \Sigma_l^{(1)}(1) &= \sum_{I \in B} \left(\frac{(\alpha a(I))^l}{l!} - \frac{\alpha(2s-1)}{2N^2} a^2(I) \frac{(\alpha a(I))^{l-2}}{(l-2)!} \right) + O\left(\frac{|B|l^2}{(l-2)!N^{2s}}\right), \quad l \geq 2, \\ \Sigma_1^{(1)}(1) &= \alpha \sum_{I \in B} a(I), \quad \Sigma_0^{(1)}(1) = |B|, \end{aligned}$$

где

$$a(I) = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s}, \quad I = (i_1, \dots, i_s), \quad a_i = N p_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Доказательство. Равенства для $\Sigma_1^{(1)}(1)$, $\Sigma_0^{(1)}(1)$ следуют непосредственно из определения. Для оценки $\Sigma_l^{(1)}(1)$ найдем сначала $S_l^{(1)}(I)$. При $t \in T_1(l)$ события, относящиеся к разным s -цепочкам, независимы и, следовательно,

$$S_l^{(1)}(I) = \sum_{t \in T_1(l)} \mathbf{P}(A_{t_1}(I) \dots A_{t_l}(I)) = (p_{i_1} \dots p_{i_s})^l |T_1(l)|.$$

Отсюда и из леммы 5 получаем асимптотическую формулу для $\Sigma_l^{(1)}(1)$ при $l \geq 1$. Лемма доказана.

Лемма 8. Если выполнены условия (1), то

$$\Sigma_l^{(2)}(1) = \alpha \frac{\alpha^{l-2}}{(l-2)!} \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} \sum_{I \in B_1(u)} (a(I))^{l-2} a(I) a_{i_{u+1}} \dots a_{i_s} + O\left(\frac{l^3 C_0^l}{N^s (l-2)!}\right),$$

где множество $B_1(u)$ определено в первом равенстве (17), $a(I)$ в лемме 7, C_0 — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Представим $\Sigma_l^{(2)}(1)$ в виде

$$\Sigma_l^{(2)}(1) = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{u=1}^{s-1} \sum_{t \in T_2^{(u)}(l, i, n)} \sum_{I \in B} \mathbf{P}(A_{t_1}(I) \dots A_{t_l}(I)). \quad (29)$$

Вероятность произведения событий равна нулю, если $I \in B \setminus B_1(u)$. Если $t \in T_2^{(u)}(l, i, n)$ и $I \in B_1(u)$, то

$$\mathbf{P}(A_{t_1}(I) \dots A_{t_l}(I)) = (a(I))^{l-1} a_{i_{u+1}} \dots a_{i_s} \frac{1}{N^{(l-1)s+s-u}}.$$

Отсюда и из (29) получаем, что

$$\Sigma_l^{(2)}(1) = \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} \sum_{I \in B_1(u)} (a(I))^{l-1} a_{i_{u+1}} \dots a_{i_s} \frac{1}{N^{(l-1)s}} \sum_{i=1}^{l-1} |T_2^{(u)}(l, i, n)|. \quad (30)$$

В этом равенстве по лемме 6

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l-1} |T_2^{(u)}(l, i, n)| &= \sum_{i=1}^{l-1} |M_i^{(u)}(n, s, l)| + O\left(\frac{l^3 n^{l-2}}{(l-2)!}\right) \\ &= \frac{n^{l-1}}{(l-2)!} + O\left(\frac{l^3 n^{l-2}}{(l-2)!}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда и из (30) следует утверждение леммы, если воспользоваться неравенствами

$$|B_1(u)| \leq N^{s-u}, \quad \frac{1}{N^{s-u}} \sum_{I \in B_1(u)} (a(I))^{l-1} a_{i_{u+1}} \dots a_{i_s} \leq C_1^{sl},$$

где C_1 — постоянная, входящая в условие (1), $C_1 \geq 1$.

Теорема 1. Если выполнены условия (1), то при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0(B) &= A_1(1) - \frac{\alpha(2s-1)}{2N^s} A_1(a^2(I)) \\ &\quad + \alpha \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} \sum_{I \in B_1(u)} a(I) a_{i_{u+1}} \dots a_{i_s} e^{-\alpha a(I)} + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right), \end{aligned}$$

где

$$A_1(1) = \sum_{I \in B} e^{-\alpha a(I)}, \quad A_1(a^2(I)) = \sum_{I \in B} a^2(I) e^{-\alpha a(I)},$$

$B_1(u)$ определено первым равенством (17).

Утверждение этой теоремы легко следует из формулы (9), лемм 1–3, 7, 8, если в формулах (9)–(11) положить $\varphi_n = 3s \ln N / \ln \ln N$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Следствие 1. Если $p_i = 1/N$, $i = 1, \dots, N$, выполнены условия (1) и $|B| > 0$, то при любом $\delta > 0$

$$\mathbf{E}\mu_0(B) = |B|e^{-\alpha} \left(1 - \frac{\alpha(2s-1)}{2N^s} + \alpha \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} \frac{|B_1(u)|}{|B|} \right) + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right).$$

Положим

$$\begin{aligned} A_s &= \{I: I = (i_1, \dots, i_s) \in A, i_1, \dots, i_s \text{ различны}\}, \\ A_1 &= \{I: I = (i, i, \dots, i), i = 1, 2, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Если $B = A_s$, то $B_1(u) = \emptyset$ и $|B| = N^{[s]}$. При $B = A$ ясно, что $|B| = N^s$, $|B_1(u)| = N^{s-u}$. Если $B = A_1$, то $|B| = N$ и $|B_1(u)| = N$.

Следствие 2. Если $p_i = 1/N$, $i = 1, \dots, N$, выполнены условия (1) и $s \geq 2$, то при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0(A_s) &= N^{[s]}e^{-\alpha} - \frac{\alpha(2s-1)}{2}e^{-\alpha} + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right), \\ \mathbf{E}\mu_0(A) &= N^s e^{-\alpha} - \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha} + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right), \\ \mathbf{E}\mu_0(A_1) &= N e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha} + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right). \end{aligned}$$

4. Асимптотические формулы для вторых моментов

Для получения асимптотической формулы для $\mathbf{D}\mu_0(B)$ получим сначала асимптотическую формулу для второго факториального момента $\mathbf{E}\mu_0^{[2]}(B)$. Воспользуемся второй формулой (9) и оценками остаточных членов, полученными в леммах 1–3. Вывод асимптотической формулы для $\Sigma_l^{(v)}(2)$, $v = 1, 2$, проводится аналогично выводу асимптотической формулы для $\Sigma_l^{(v)}(1)$, $v = 1, 2$, проведенному в доказательствах лемм 7 и 8.

Лемма 9. Если выполнены условия (1), то

$$\begin{aligned} \Sigma_l^{(1)}(2) &= \sum_{(I,J) \in B^{[2]}} \left(\frac{(\alpha(a(I) + a(J)))^l}{l!} - \frac{\alpha^{l-1}(2s-1)}{2N^s(l-2)!} (a(I) + a(J))^l \right) \\ &\quad + O\left(\frac{|B^{[2]}|l^2}{(l-2)!N^{2s}}\right), \\ \Sigma_1^{(1)}(2) &= \alpha \sum_{(I,J) \in B^{[2]}} (a(I) + a(J)), \\ \Sigma_0^{(1)}(2) &= |B^{[2]}| = |B|(|B| - 1), \end{aligned}$$

где

$$B^{[2]} = \{(I, J): I \neq J, I, J \in B\}, \quad a(I) = a_{i_1}, \dots, a_{i_s}, \quad a_i = Np_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Доказательство. Найдем $S_l^{(1)}(I, J)$. При $t \in T_1(l)$ события $A_{t_i}(I) \cup A_{t_i}(J)$, $i = 1, \dots, l$, независимы и $A_{t_i}(I)A_{t_i}(J) = \emptyset$ при $I \neq J$. Отсюда

$$\begin{aligned} S_l^{(1)}(I, J) &= \sum_{l \in T_1(l)} \mathbf{P}((A_{t_1}(I) \cup A_{t_1}(J)) \cap \dots \cap (A_{t_l}(I) \cup A_{t_l}(J))) \\ &= (p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s} + p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_s})^l |T_1(l)|. \end{aligned}$$

Из этого равенства и из леммы 5 следует утверждение леммы 9.

Лемма 10. Если выполнены условия (1), то

$$\begin{aligned} \Sigma_l^{(2)}(2) &= N^s 2\alpha \sum_{u=1}^{s-1} \frac{\alpha^{l-2}}{N^{2s-u}(l-2)!} \\ &\quad \times \sum_{(I, J) \in B^{[2]}} (a(I) + a(J))^{l-2} (a_u(I, I) + a_u(I, J)) + O\left(\frac{c_0^l l^3}{(l-2)!}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_u(I, I) &= a(I) a_{i_{u+1}} \dots a_{i_s} \delta_u(I, I), & a_u(I, J) &= a(I) a_{j_{u+1}} \dots a_{j_s} \delta_u(I, J), \\ \delta_u(I, I) &= \delta_{i_1 i_s - u + 1} \dots \delta_{i_u i_s}, & \delta_u(I, J) &= \delta_{j_1 i_s - u + 1} \dots \delta_{j_u i_s}, \end{aligned} \quad (33)$$

c_0 — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Представим $\Sigma_l^{(2)}(2)$ в виде

$$\Sigma_l^{(2)}(2) = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{u=1}^{s-1} \sum_{t \in T_2^{(u)}(l, i, n)} \sum_{(I, J) \in B^{[2]}} P_t(I, J),$$

где

$$P_t(I, J) = \mathbf{P}((A_{t_1}(I) \cup A_{t_1}(J)) \cap \dots \cap (A_{t_l}(I) \cup A_{t_l}(J))), \quad t = (t_1, \dots, t_l).$$

При $t \in T_2^{(u)}(l, i, n)$

$$\begin{aligned} P_t(I, J) &= (p_{i_1} \dots p_{i_s} + p_{j_1} \dots p_{j_s})^{l-2} P_{t_i, t_{i+1}}(I, J) \\ &= (a(I) + a(J))^{l-2} P_{t_i, t_{i+1}}(I, J) N^{-s(l-2)}, \\ P_{t_i, t_{i+1}}(I, J) &= P(A_{t_i}(I) \cap A_{t_{i+1}}(I)) + P(A_{t_i}(I) \cap A_{t_i}(I) \cap A_{t_{i+1}}(J)) \\ &\quad + P(A_{t_i}(J) \cap A_{t_{i+1}}(I)) + P(A_{t_i}(J) \cap A_{t_{i+1}}(J)), \\ P(A_{t_i}(I) \cap A_{t_{i+1}}(I)) &= a_u(I, I) N^{-2s+u}, \\ P(A_{t_i}(I) \cap A_{t_{i+1}}(J)) &= a_u(I, J) N^{-2s+u}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Sigma_l^{(2)}(2) &= 2N^{-s(l-1)} N^s \\ &\quad \times \sum_{u=1}^{s-1} \sum_{i=1}^{l-1} |T_2^{(u)}(l, i, n)| \frac{1}{N^{2s-u}} \sum_{(I, J) \in B^{[2]}} (a(I) + a(J))^{l-2} (a_u(I, I) + a_u(I, J)). \end{aligned}$$

Из этого равенства, равенства (30) и неравенств

$$\sum_{(I,J) \in B^{[2]}} \delta_u(I, I) \leq N^{2s-u}, \quad \sum_{(I,J) \in B^{[2]}} \delta_u(I, J) \leq N^{2s-u}$$

нетрудно получить утверждение леммы 10.

Из второй формулы (9), лемм 1–3 и лемм 9, 10 получаем следующую теорему.

Теорема 2. Если выполнены условия (1), то при любом $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(B) &= A_1^2(1) - A_2(1) - \frac{\alpha(2s-1)}{N^s} \sum_{(I,J) \in B^{[2]}} e^{-\alpha(a(I)+a(J))} (a^2(I) + a(I)a(J)) \\ &+ 2\alpha \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} \sum_{(I,J) \in B^{[2]}} e^{-\alpha(a(I)+a(J))} (a_u(I, I) + a_u(I, J)) + O\left(\max_{1 \leq u \leq s-1} N^{u+\delta} D_2(u)\right), \end{aligned}$$

где $a_u(I, I)$, $\delta_u(I, I)$, $a_u(I, J)$, $\delta_u(I, J)$ определены равенствами (33),

$$\begin{aligned} A_1(1) &= \sum_{I \in B} e^{-\alpha a(I)}, \quad A_2(1) = \sum_{I \in B} e^{-2\alpha a(I)}, \\ D_2(u) &= \frac{(|B_1(u)||B| + |B_2(u)|)}{N^{2s-u}} \leq 2, \end{aligned}$$

$a(I)$, $B^{[2]}$ определены в формулировке леммы 9, $B_1(u)$, $B_2(u)$ определены равенствами (17).

Приведем формулу для $\mathbf{E}\mu_0^{[2]}(B)$ в нескольких простых случаях.

Следствие 3. Если $p_i = 1/N$, $i = 1, \dots, N$, и выполнены условия (1), то при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(B) &= |B|^{[2]} e^{-2\alpha} \left(1 - \frac{2\alpha(2s-1)}{N^s}\right) \\ &+ 2\alpha e^{-2\alpha} \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} (|B_1(u)||B| + |B_2(u)|) + O\left(\max_{1 \leq u \leq s-1} N^{u+\delta} D_2(u)\right). \end{aligned}$$

Следствие 4. Если $p_i = 1/N$, $i = 1, \dots, N$, $s \geq 2$ и выполнены условия (1), то при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(A_s) &= (N^{[s]})^2 e^{-2\alpha} - e^{-2\alpha} N^s (1 + 2s\alpha) + O(N^{s-1+\delta}), \\ \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(A) &= N^{2s} e^{-2\alpha} - N^s e^{-2\alpha} (1 + 2\alpha) + O(N^{s-1+\delta}), \\ \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(A_1) &= e^{-2\alpha} (N^2 - N(1 - 2\alpha)) + O(N^\delta), \end{aligned}$$

где A_s , A_1 определены равенствами (32).

Используя теоремы 1 и 2, можно найти асимптотическую формулу для $D\mu_0(B)$ по формуле

$$D\mu_0(B) = E\mu_0^{[2]}(B) + E\mu_0(B) - (E\mu_0(B))^2.$$

Удобно использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_v(1) &= \sum_{I \in B} e^{-v\alpha a(I)}, \\ A_v(a^r(I)) &= \sum_{I \in B} a^r(I) e^{-va(I)}, \\ A_v(a_u(I, I)) &= \sum_{I \in B} a_u(I, I) e^{-va(I)}, \\ C(u) &= \sum_{I, J \in B} a_u(I, J) e^{-\alpha(a(I)+a(J))}, \quad r, v = 1, 2, \end{aligned} \quad (34)$$

где $a_u(I, I)$, $a_u(I, J)$ определены равенствами (33).

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} E\mu_0(B) &= A_1(1) - \frac{\alpha(2s-1)}{2N^s} A_1(a^2(I)) + \alpha \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} A_1(a_u(I, I)) + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right), \\ E\mu_0^{[2]}(B) &= A_1^2(1) - A_2(1) - \alpha \frac{2s-1}{N^s} (A_1(1)A_1(a^2(I)) + A_1^2(a(I)) - 2A_2(a^2(I))) \\ &\quad + 2\alpha \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} (A_1(1)A_1(a_u(I, I)) + C(u) - 2A_2(a_u(I, I))) \\ &\quad + O\left(\max_{1 \leq u \leq s-1} N^{u+\delta} D_2(u)\right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая оценки $A_2(a^2(I)) = O(N^s)$, $A_2(a_u(I, I)) = O(N^{s-u})$, получим следующую теорему.

Теорема 3. Если выполнены условия (1), то при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} D\mu_0(B) &= |B|\sigma_N^2(B) + O\left(|B|/N^{s-\delta} + \max_{1 \leq u \leq s-1} (N^{u+\delta} D_2(u) + 1)\right), \\ \sigma_N^2(B) &= \frac{1}{|B|} \left(A_1(1) - A_2(1) - \frac{\alpha(2s-1)}{N^s} A_1^2(a(I)) + 2\alpha \sum_{u=1}^{s-1} \frac{C(u)}{N^{s-u}} \right), \end{aligned}$$

где $A_1(1)$, $A_2(1)$, $A_1(a(I))$, $C(u)$ определены формулами (34), а $D_2(u)$ определено в теореме 2.

Чтобы установить асимптотическую нормальность $\mu_0(B)$, нужно оценить снизу $\sigma^2(B)$. Для этого преобразуем $C(u)$ и $A_1^2(a(I))$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} i &= (i_1, \dots, i_{s-u}), \quad k = (k_1, \dots, k_u), \quad j = (j_1, \dots, j_{s-u}), \quad I = (i, k), \quad J = (k, j), \\ B_0(u) &= \{k: \text{найдутся } i \text{ и } j \text{ такие, что } (i, k) \in B, (k, j) \in B\}, \\ B_{0k} &= \{i: (i, k) \in B\}, \quad B_{k0}(u) = \{j: (k, j) \in B\}, \quad k \in B_0(u), \\ a(i) &= a_{i_1} \dots a_{i_{s-u}}, \quad a(k) = a_{k_1} \dots a_{k_u}, \quad a(j) = a_{j_1} \dots a_{j_{s-u}}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях $C(u)$ можно записать в виде

$$C(u) = \sum_{k \in B_0(u)} a(k) \sum_{i \in B_{0k}(u)} e^{-\alpha a(k)a(j)} a(i) \sum_{j \in B_{k0}(u)} e^{-\alpha a(k)a(j)} a(j).$$

Будем предполагать, что при всех u , $1 \leq u \leq s-1$, множество B можно представить в виде

$$B = \bigcup_{k \in B_0(u)} B_{k0} = \bigcup_{k \in B_0(u)} B_{0k}. \quad (35)$$

Условие (35) можно сформулировать следующим образом: для любой цепочки $I \in B$ при любом u , $1 \leq u \leq s-1$, найдутся цепочки $I', I'' \in B$ такие, что u последних знаков I совпадают с u первыми знаками I' , и u последних знаков I'' совпадают с u первыми знаками I .

Пусть сначала

$$\sum_{i \in B_{0k}(u)} e^{-a(k)a(i)} a(i) \leq \sum_{j \in B_{k0}(u)} e^{-\alpha a(k)a(j)} a(j). \quad (36)$$

Другой случай рассматривается аналогично.

Оценим сверху $A_1^2(a(I))$. Используя неравенство Коши–Буняковского, находим, что

$$\begin{aligned} A_1^2(a) &= \left(\sum_{I \in B} a_{i_1} \dots a_{i_s} e^{-\alpha a_{i_1} \dots a_{i_s}} \right)^2 = \left(\sum_{k \in B_0(u)} 1 \left(\sum_{i \in B_{0k}(u)} e^{-\alpha a(k)a(i)} a(i) \right) a(k) \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{k \in B_0(u)} a_k \right) \sum_{k \in B_0(u)} \left(\sum_{i \in B_{0k}(u)} e^{-\alpha a(k)a(i)} a(i) \right)^2 a(k). \end{aligned}$$

Заменив здесь один сомножитель квадрата на правую часть неравенства (36), получим, что

$$\begin{aligned} A_1^2(a) &\leq \left(\sum_{k \in B_0(u)} a_k \right) \sum_{k \in B_0(u)} a_k \left(\sum_{i \in B_{0k}(u)} e^{-\alpha a(k)a(i)} a(i) \right) \left(\sum_{j \in B_{k0}(u)} e^{-\alpha a(k)a(j)} a(j) \right) \\ &= N^u \sum_{k_1, \dots, k_u \in B} p_{k_1} \dots p_{k_u} C(u). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_1^2(a) \leq N^u \sum_{k_1, \dots, k_u \in B} p_{k_1} \dots p_{k_u} C(u). \quad (37)$$

Представим $\sigma^2(B)$ в виде

$$\sigma^2(B) = \frac{1}{|B|} \left(A_1(1) - A_2(1) - \frac{\alpha A_1^2(a(I))}{N^s} - 2\alpha \sum_{u=1}^{s-1} \left(\frac{1}{N^s} A_1^2(a) - \frac{1}{N^{s-u}} C(u) \right) \right).$$

Воспользовавшись неравенством (37), получим оценку

$$\sigma_N^2(B) \geq \frac{1}{|B|} \left(A_1(1) - A_2(1) - \frac{\alpha A_1^2(a(I))}{N^s} \right. \\ \left. - 2\alpha \sum_{u=1}^{s-1} \frac{1}{N^{s-u}} \left(\sum_{k \in B_0(u)} p_{k_1} \cdots p_{k_s} - 1 \right) C(u) \right)$$

Отсюда и из неравенств

$$\sum_{k \in B_0(u)} p_{k_1} \cdots p_{k_s} \leq 1, \quad C(u) \geq 1$$

следует, что

$$\sigma_N^2(B) \geq \frac{1}{|B|} \left(A_1(1) - A_2(1) - \frac{\alpha}{N^s} A_1^2(a(I)) \right)$$

или

$$\sigma_N^2(B) \geq \frac{1}{|B|} \sum_{I \in B} e^{-\alpha a(I)} - \frac{1}{|B|} \sum_{I \in B} e^{-2\alpha a(I)} - \frac{\alpha N^s}{|B|} \left(\sum_{I \in B} \frac{a(I)}{N^s} e^{-a(I)} \right)^2.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\left(\sum_{I \in B} \frac{a(I)}{N^s} e^{-\alpha a(I)} \right)^2 = \left(\sum_{I \in B} e^{-\alpha a(I)} p_{i_1} \cdots p_{i_s} \right)^2 \leq \sum_{I \in B} p_{i_1} \cdots p_{i_s} \sum_{I \in B} e^{-2\alpha a(I)} p_{i_1} \cdots p_{i_s},$$

получим, что

$$\sigma_N^2(B) \geq \frac{1}{|B|} \sum_{I \in B} e^{-\alpha a(I)} \left(1 - e^{-\alpha a(I)} - \alpha a(I) \sum_{I \in B} p_{i_1} \cdots p_{i_s} e^{-\alpha a(I)} \right).$$

Заменяя здесь $\sum_{I \in B} p_{i_1} \cdots p_{i_s}$ на единицу, приходим к окончательной оценке

$$\sigma_N^2(B) \geq \frac{1}{|B|} \sum_{I \in B} \sigma_N^2(\alpha a(I)), \quad (38)$$

где $\sigma_N^2(\beta) = e^{-\beta}(1 - (1 + \beta)e^{-\beta})$.

Отсюда так же, как в [5, с. 113], получим следующее утверждение.

Теорема 4. Если $N \rightarrow \infty$, выполнены условия (1), (35), $|B| \rightarrow \infty$ и найдутся $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ такие, что

$$\frac{|\{I: I \in B, p_{i_1} \cdots p_{i_s} \geq \Delta_1/N^s\}|}{|B|} > \Delta_2, \quad (39)$$

то величина $\sigma^2(B)$, определенная в теореме 3, удовлетворяет при $N > N_0$ неравенству

$$\sigma^2(B) \geq \sigma_0^2 > 0,$$

где σ_0^2, N_0 — некоторые постоянные.

Отметим, что полученное выражение для $\sigma_N^2(B)$ при $B = A_s$ ($s \geq 3$ и есть p_i отличные от $1/N$) отличается от σ_N^2 , приведенного в лемме 1 работы [1]. Это связано с тем, что в [1] некоторые коэффициенты уравнений в конечных разностях являются приближенными. Неточность в вычислениях повлияла только на величину σ_N^2 в указанных случаях. Все теоремы и следствия, содержащиеся в [1], сохраняются.

Используя результаты [2], так же, как в [1], доказывается асимптотическая нормальность $\mu_0(B)$ в тех случаях, когда

$$0 < b_1 \leq |B|/N^s. \quad (40)$$

Теорема 5. Если выполнены условия (1), (35), (39) и (40), то величина $\mu_0(B)$ асимптотически нормальна с параметрами $\mathbf{E}\mu_0(B)$ и $\mathbf{D}\mu_0(B)$.

Приведем формулы для $\mathbf{D}\mu_0(B)$ в некоторых частных случаях. Из теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие 5. Если $p_i = 1/N$, $i = 1, \dots, N$ и выполнены условия (1), то при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mu_0(B) &= N^s \sigma_N^2(\alpha) + O(N^{s-1+\delta}), & B &= A, \\ \mathbf{D}\mu_0(B_s) &= N^s \sigma_N^2(\alpha) + O(N^{s-1+\delta}), & B &= A_s, \\ \mathbf{D}\mu_0(B_1) &= N e^{-\alpha}(1 - e^{-\alpha}) + O(N^\delta), & B &= A_1, \end{aligned}$$

где $\sigma_N^2(\alpha) = e^{-\alpha}(1 - (1 + \alpha)e^{-\alpha})$, а A_1 , A_s определены равенствами (32).

Список литературы

1. Тихомирова М. И. Об асимптотической нормальности числа непоявившихся s -цепочек. *Дискретная математика* (1992) 4, №2, 122–129.
2. Михайлов В. Г. Асимптотическая нормальность разделимых статистик от частот m -цепочек. *Дискретная математика* (1989) 1, №4, 92–103.
3. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т.1. Мир, Москва, 1984.
4. Сачков В. Н. *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
5. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.

Статья поступила 02.04.96.