Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Дьяконова, Ветвящийся процесс с миграцией
в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, вы-
пуск 1, 30–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:47:46

Ветвящийся процесс с миграцией в случайной среде

© 1997 г. Е. Е. Дьяконова

Рассматривается процесс Гальтона–Ватсона с миграцией, функционирующий в марковской случайной среде. Пусть $f_n(z)$ — производящая функция числа потомков частицы n -го поколения,

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} f'_n(1).$$

Показано, что стационарное распределение специальным образом нормированного числа частиц в процессе сходится к равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$ при $m \rightarrow 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 96-01-00338, и INTAS-RFBR 95-0099.

1. Введение, описание модели

Рассмотрим следующий процесс Гальтона–Ватсона $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ с миграцией, функционирующий в случайной среде. Предположим, что эволюция случайной среды с конечным множеством состояний описывается некоторой фиксированной марковской цепью $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ с множеством состояний $S = \{0, 1, \dots, l-1\}$, $l \geq 3$, и переходными вероятностями $p_{ij} > 0$, $i, j \in S$. Обозначим $\mathcal{P} = \|p_{ij}\|_{i,j=0}^{l-1}$ матрицу переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\omega_i\}$, $i = 0, \dots, l-1$, — стационарное распределение цепи $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$. Пусть $\mathbf{P}\{\eta_0 = i\} = \omega_i$, $i = 0, 1, \dots, l-1$. Предположим, что нам заданы наборы случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:

$$s_i(n) = \{\zeta_i(n), \xi_i^{(1)}(n), \xi_i^{(2)}(n), \dots, \xi_i^{(j)}(n), \dots\}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, \quad i \in S,$$

относительно которых предполагается, что при фиксированных i и n $\{\xi_i^{(j)}(n)\}_{j=1}^{\infty}$ есть последовательность независимых неотрицательных целочисленных случайных величин с производящей функцией

$$f_{(n,i)}(z) = f_i(z) = \mathbf{M} z^{\xi_i^{(j)}(n)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

а распределение случайной величины $\zeta_i(n)$ не зависит от $\{\xi_i^{(j)}(n)\}_{j=1}^{\infty}$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_i(n) = k\} &= p_k(i), \quad k = 0, 1, \dots, T, \\ \mathbf{P}\{\zeta_i(n) = -1\} &= q, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k(i) + q = 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Кроме того, предполагается, что все наборы $s_i(n)$, $n = 0, 1, \dots$, $i \in S$, независимы в совокупности. Обозначим

$$Q_i(z) = \mathbf{M} z^{\zeta_i(n)} = \sum_{k=0}^T p_k(i) z^k + \frac{q}{z}, \quad i \in S.$$

Определим процесс $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$ соотношениями $Z_0 = 0$,

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_{\eta_n}^{(1)}(n) + \xi_{\eta_n}^{(2)}(n) + \dots + \xi_{\eta_n}^{(Z_n + \zeta_{\eta_n}(n))}(n), & \text{если } Z_n + \zeta_{\eta_n}(n) > 0, \\ 0, & \text{если } Z_n + \zeta_{\eta_n}(n) \leq 0. \end{cases}$$

Введенный таким образом процесс $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$ описывает поведение популяции частиц, которая эволюционирует следующим образом. Размножение живущих в момент времени $n = 0, 1, \dots$ частиц происходит независимо друг от друга, от момента времени и от текущего состояния процесса, при этом число потомков каждой частицы задается производящей функцией $f_{\eta_n}(z)$, определяемой состоянием марковской цепи η_n , т.е. если $\eta_n = i$, $i \in S$, то производящая функция числа потомков каждой частицы в момент времени n есть $f_i(z)$. Кроме того, в каждый момент времени в процессе происходит иммиграция или эмиграция. А именно, в популяцию частиц, живущую в момент времени n , либо с вероятностью $p_k(\eta_n)$ иммигрируют k частиц, либо с вероятностью q из популяции эмигрирует $\min\{1, Z_n\}$ частица из числа Z_n частиц, присутствующих в процессе в момент времени n . То есть, если $\eta_n = i$, то число мигрирующих частиц $\zeta_i(n)$ задается производящей функцией $Q_i(z)$.

Отметим, что в данной модели миграция в каждом поколении происходит раньше, чем размножение.

Таким образом, процесс $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$ является ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона с миграцией в марковской случайной среде, где состояние среды определяет как закон размножения частиц, так и распределение числа мигрирующих частиц, при этом $\xi_{\eta_n}^{(j)}(n)$ можно интерпретировать как число потомков в $(n+1)$ -м поколении j -й частицы, живущей в n -м поколении, $\zeta_{\eta_n}(n)$ — число мигрирующих частиц в n -й момент времени, η_n — состояние среды в момент времени n , Z_n — число частиц в n -м поколении.

Изучению ветвящихся процессов в случайной среде посвящено большое количество работ (см., например, [1–4]). Так, поведение критического процесса Гальтона–Ватсона в случайной среде, порождаемой последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, было исследовано в [5]. В [6] изучался случай обычного критического процесса Гальтона–Ватсона с миграцией, а переходные явления для этого процесса были описаны в [7, 9]. В настоящей работе мы обобщим результаты [7, 9] для процесса Гальтона–Ватсона с миграцией в случайной марковской среде.

2. Формулировка основного результата

Предположим, что все производящие функции числа потомков $f_i(z)$, $i \in S$, удовлетворяют следующим условиям

$$f_i(1-z) = 1 - m_i z + b_i z^2 + \alpha_i(z), \quad (2)$$

где $0 < c < m_i < 1$, $|\alpha_i(z)| \leq \gamma(z) = o(z^2)$ при $z \rightarrow 0$, $0 < b < b_i < B$, c, b и B — некоторые постоянные, $f_i(0) \geq k^* > 0$.

Положим

$$m = \min_i m_i, \quad i^* = \{i: m_i = m\}, \quad \omega_m = \omega_{i^*}. \quad (3)$$

Будем также предполагать, что все распределения мигрирующих частиц имеют нулевое среднее и конечную дисперсию

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k(i) - q = 0, \quad i \in S, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k(i) < \infty, \quad i \in S. \quad (5)$$

Из условий (1), (4), (5) следует, что функции $Q_i(z)$, $i \in S$, могут быть записаны в виде

$$Q_i(z) = 1 + L_i(1 - z)^2 + o(1 - z)^2, \quad (6)$$

где L_i — положительные постоянные.

Положим

$$M = \sum_{i=0}^{l-1} \omega_i \ln m_i,$$

где $\{\omega_i\}$ — стационарное распределение цепи $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Заметим, что

$$\frac{M}{\omega_m} \leq \ln m \leq M < 0. \quad (7)$$

Покажем, что в условиях (2)–(5) рассматриваемый процесс $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет стационарное распределение

$$\{\pi_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad \pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Z_n = i\}.$$

Для этого рассмотрим двумерный процесс $\{Z_n, \eta_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ясно, что $\{Z_n, \eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ является апериодической неприводимой цепью Маркова. Определим процесс $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, полагая $Y_n = lZ_n + \eta_n$. Заметим, что при этом η_n является вычетом Y_n по модулю l (мы будем это записывать как $\eta_n = \{Y_n\}$), а $Z_n = (Y_n - \{Y_n\})l^{-1} = [Y_n]$. Поэтому $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть цепь Маркова с множеством состояний $\{0, 1, 2, \dots\}$. Покажем, что $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ обладает стационарным распределением.

Действительно, несложно показать, что цепь $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ неприводима и апериодична. Так как для $0 < \varepsilon < 1$ при $y \geq l^2$ в силу (4)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(Y_{n+1} | Y_n = y) &= [y]m\{y\} + \mathbf{M}(\eta_{n+1} | \eta_n = \{y\}) \\ &< [y] + l - 1 < 2[y] \leq (l - 1)[y] < [y] + \{y\} - \varepsilon = y - \varepsilon, \end{aligned}$$

согласно критерию Фостера [8] цепь $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет стационарное распределение. Следовательно, процесс $\{Z_n, \eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ также имеет стационарное распределение, а значит, и процесс $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Пусть случайная величина ν имеет распределение, совпадающее со стационарным распределением $\{\pi_i\}_{i=0}^{\infty}$ процесса $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Теорема. Если выполнены условия (2)–(7), то при $M \rightarrow 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\ln \nu}{\ln(1/|M|)} \leq x \right\} \rightarrow x, \quad x \in [0, 1].$$

Замечание 1. Аналогичный результат имеет место и для процесса Гальтона-Ватсона с иммиграцией в состоянии 0 в марковской случайной среде при некоторых ограничениях на распределения иммигрирующих частиц и числа потомков. Утверждение теоремы верно, в частности, и для среды, задаваемой последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин.

Доказательство теоремы. Введем случайный вектор (ν, φ) , имеющий распределение, совпадающее со стационарным распределением процесса $\{Z_n, \eta_n\}_{n=0}^{\infty}$. Положим

$$\begin{aligned} \pi(i, j) &= \mathbf{P}\{\nu = i, \varphi = j\}, & i = 0, 1, \dots, \quad j \in S, \\ \pi_i &= \mathbf{P}\{\nu = i\}, & i = 0, 1, \dots, \\ P_j(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i, j) z^i, & j \in S, \\ \Pi(z) = \mathbf{M}z^{\nu} &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i, j) z^i = \sum_{j=0}^{l-1} P_j(z). \end{aligned} \quad (8)$$

Получим сначала уравнение для производящей функции $\Pi(z)$ случайной величины ν . Стационарные вероятности $\pi(i, j)$ процесса $\{Z_n, \eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют уравнению

$$\pi(i, j) = \sum_{i_1, j_1} \pi(i_1, j_1) p_{(i_1, j_1)(i, j)}, \quad (9)$$

где $p_{(i_1, j_1)(i, j)}$ — вероятность перехода марковской цепи $\{Z_n, \eta_n\}$ из состояния (i_1, j_1) в состояние (i, j) . Используя соотношение

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{(i_1, j_1)(i, j)} z^i = p_{j_1 j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(j_1) f_{j_1}^{(i_1+k)}(z) + q f_{j_1}^{((i_1-1) \vee 0)}(z) \right), \quad (10)$$

где $x \vee y$ обозначает $\max\{x, y\}$, из уравнения (9) несложно получить, что

$$P_k(z) = \sum_{j=0}^{l-1} p_{jk} (P_j(f_j(z)) Q_j(f_j(z)) + \pi(0, j) q (1 - 1/f_j(z))). \quad (11)$$

Откуда, используя (8), находим, что

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{l-1} P_k(z) = \sum_{j=0}^{l-1} (P_j(f_j(z)) Q_j(f_j(z)) + \pi(0, j) q (1 - 1/f_j(z))). \quad (12)$$

Поскольку распределение начального значения η_0 есть $\{\omega_i\}_{i=0}^{l-1}$, после неоднократного применения соотношений (11) в равенстве (12) получаем, что

$$\Pi(z) = \Pi_1(z) - \Pi_2(z), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}\{Q_{\eta_0}(f_{\eta_0}(f_{\eta_1} \dots (f_{\eta_{n-1}}(z))))Q_{\eta_1}(f_{\eta_1} \dots (f_{\eta_{n-1}}(z))) \dots Q_{\eta_{n-1}}(f_{\eta_{n-1}}(z))\}, \\ \Pi_2(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ q \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\pi(0, \eta_0) \left(\frac{1}{f_{\eta_0}(f_{\eta_1} \dots (f_{\eta_{n-1}}(z)))} - 1 \right) \right. \\ &\quad \times Q_{\eta_1}(f_{\eta_1}(f_{\eta_2} \dots (f_{\eta_{n-1}}(z))))Q_{\eta_2}(f_{\eta_2} \dots (f_{\eta_{n-1}}(z))) \dots Q_{\eta_{n-1}}(f_{\eta_{n-1}}(z)) \}. \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится ряд вспомогательных результатов. Пусть

$$\begin{aligned} f^{(k,n)}(z) &= f_{\eta_k}(f_{\eta_{k+1}}(\dots f_{\eta_{n-1}}(z))), \\ \zeta_{(k,n)}^*(z) &= Q_{\eta_k}(f_{\eta_k}(f_{\eta_{k+1}} \dots (f_{\eta_{n-1}}(z))))Q_{\eta_{k+1}}(f_{\eta_{k+1}} \dots (f_{\eta_{n-1}}(z))) \\ &\quad \dots Q_{\eta_{n-1}}(f_{\eta_{n-1}}(z)), \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ f_{(j)}^{(n)}(z) &= f_{j=\eta_0}(f_{\eta_1}(\dots (f_{\eta_{n-1}}(z)))), \quad f^{(n)}(z) = f^{(0,n)}(z), \quad n \geq 1, \\ \zeta_1^*(z) &= 1, \quad \zeta_n^*(z) = \zeta_{1,n}^*(z), \quad n > 1. \end{aligned}$$

Лемма 1. Для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует такое $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что $1 - f^{(j,n)}(z) < \varepsilon$ при всех $n - j > k_0$, $z \in [0, 1]$ и M , достаточно близком к нулю.

Доказательство. Легко видеть, что при всех M , достаточно близких к нулю, $k^* + m_i - 1 > d$, $i = 0, 1, \dots, l-1$ для некоторой константы d , $1 > d > 0$. Так как

$$1 - f_i(z) = m_i(1 - z) - b_i(z)(1 - z)^2, \quad i \in S, \quad (14)$$

из условия (3) следует, что $b_i(z) > d$ для всех $i \in S$ при M , достаточно близких к нулю, т.е. при $M \in (-\delta^*, 0) = U_{\delta^*}$. Таким образом, из (14) следует, что при $M \in U_{\delta^*}$

$$1 - f_i(z) \leq m_i(1 - z) - d(1 - z)^2 \leq (1 - z)(1 - d(1 - z)). \quad (15)$$

Из (15) вытекает, что при $z < 1 - \varepsilon$ выполняется неравенство

$$1 - f_i(z) \leq (1 - z)(1 - d\varepsilon), \quad i \in S, \quad M \in U_{\delta^*}. \quad (16)$$

Пусть k_0 таково, что $(1 - d\varepsilon)^{k_0} < \varepsilon$. Если $M \in U_{\delta^*}$ и

$$1 - f_{i_1}(f_{i_2}(\dots f_{i_{k_0-1}}(z))) \leq \varepsilon, \quad i_j \in S, \quad j = 1, \dots, k_0 - 1,$$

то $1 - f_{i_0}(f_{i_1}(\dots (f_{i_{k_0-1}}(z)))) < \varepsilon$ при всех $i_0 \in S$ в силу того, что $1 > f_i(z) > z$ при $0 \leq z < 1$, $i \in S$.

Если же $1 - f_{i_1}(f_{i_2} \dots (f_{i_{k_0-1}}(z))) > \varepsilon$, то из (16) следует, что при всех $i_0 \in S$, $M \in U_{\delta^*}$

$$1 - f_{i_0}(f_{i_1}(\dots (f_{i_{k_0-1}}(z)))) \leq (1 - z)(1 - d\varepsilon)^{k_0} < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого ε , $0 < \varepsilon < b$, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, $0 < \delta < 1$, что для всех $z \in U_\delta(1) = (1 - \delta, 1)$

$$\frac{m_i(u)}{1 + (b_i + \varepsilon)u} \leq 1 - f_i(z) \leq \frac{m_i(u)}{1 + (b_i - \varepsilon)u}, \quad (17)$$

где $u = 1 - z$, $i \in S$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 из [9] и мы здесь его не приводим.

Лемма 3. Если все $f_i(z)$, $i \in S$, дробно-линейны, то при $M \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(1/f_{(j)}^{(n)}(1 - |M|^x) - 1) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(1 - f_{(j)}^{(n)}(1 - |M|^x)) \\ &\sim \frac{1-x}{K} \ln \frac{1}{|M|}, \quad j \in S, \quad x \in [0, 1), \end{aligned} \quad (18)$$

где x фиксировано, $K = \mathbf{M}(b_\eta m_\eta^{-2})$, η — случайная величина, соответствующая стационарному распределению цепи $\{\eta_n\}$.

Доказательство. Положим

$$\kappa_{(j)}(n, u) = 1 - f_{(j)}^{(n)}(1 - u). \quad (19)$$

Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\kappa_{(j)}(n, u)$$

при $M \rightarrow 0$. Разобьем область суммирования на три части:

$$\sum_{n=1}^{\varepsilon/|M|} \mathbf{M}\kappa_{(j)}(n, u) + \sum_{n=\varepsilon/|M|}^{N/|M|} \mathbf{M}\kappa_{(j)}(n, u) + \sum_{n=N/|M|}^{\infty} \mathbf{M}\kappa_{(j)}(n, u). \quad (20)$$

Воспользуемся формулой Агрести [10] для суперпозиции дробно-линейных функций $f_i(z)$

$$\begin{aligned} 1 - f_0(\dots f_{n-1}(z)) \\ = \left\{ \left((1 - z) \prod_{i=0}^{n-1} f'_i(1) \right)^{-1} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f''_j(1)}{2(f'_j(1))^2} \left(\prod_{i=0}^{j-1} f'_i(1) \right)^{-1} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует, что

$$\kappa_{(j)}(n, u) = u \prod_{i=0}^{n-1} f'_{\eta_i}(1) \left(1 + u \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i} \prod_{k=j}^{n-1} f'_{\eta_k}(1) \right)^{-1}, \quad (22)$$

где $u = 1 - z$, $\eta_0 = j$, $g_{\eta_i} = b_{\eta_i}(m_{\eta_i})^{-2}$.

Оценим сначала

$$\sum_{n \in V_1} \mathbf{M} \kappa_{(j)}(n, u),$$

где $V_1 = [1, \varepsilon/|M|]$, ε достаточно мало. Заметим, что при $n \in V_1$

$$m^{\varepsilon/|M|} \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i} \leq \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i} \prod_{j=1}^n f'_{\eta_j}(1) \leq \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i}. \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что последовательность $\{g_{\eta_i}\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена, т. е. существуют такие константы $0 < G_1 < G_2 < \infty$, что $G_1 < g_{\eta_i} < G_2$ для всех i .

Из (22) и (23) следует, что при $n \in V_1$

$$m^{\varepsilon/|M|} \mathbf{M} \frac{u}{1 + un \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i}/n} \leq \mathbf{M} \kappa_{(j)}(n, u) \leq \mathbf{M} \frac{u}{1 + um^{\varepsilon/|M|} n \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i}/n}. \quad (24)$$

Введем события

$$A_n = \left\{ \left| \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i}/n - K \right| < \delta \right\}, \quad \bar{A}_n = \left\{ \left| \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i}/n - K \right| \geq \delta \right\},$$

где $K = \mathbf{M} g_{\eta}$.

В силу закона больших чисел для функционала от цепи Маркова для всех $\delta > 0$ и любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое N_0 , что при всех $n > N_0$

$$\mathbf{P}\{\bar{A}_n\} = \varepsilon_0 < \varepsilon_1, \quad \mathbf{P}\{A_n\} = 1 - \varepsilon_0 \geq 1 - \varepsilon_1. \quad (25)$$

Так как в силу (7)

$$\exp\{-\varepsilon/\omega_m\} < m < \exp\{-\varepsilon\},$$

из (24) и (25) следует, что при $n \in V_1$, $n > N_0$

$$\begin{aligned} g_3(n, u)(1 - \varepsilon_0)e^{-\varepsilon/\omega_m} &\equiv ue^{-\varepsilon/\omega_m}(1 - \varepsilon_0)(1 + un(K + \delta))^{-1} \leq \mathbf{M} \kappa_{(j)}(n, u) \\ &\leq (1 - \varepsilon_0)u(1 + un(K - \delta)e^{-\varepsilon/\omega_m})^{-1} + \varepsilon_0 u(1 + G_1 n u e^{-\varepsilon/\omega_m}) \\ &\equiv g_1(n, u)(1 - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 g_2(n, u). \end{aligned} \quad (26)$$

Положим

$$D_1 = (K - \delta)e^{-\varepsilon/\omega_m}, \quad D_2 = G_1 e^{-\varepsilon/\omega_m}, \quad D_3 = (K + \delta). \quad (27)$$

Так как

$$\begin{aligned} A^{(i)}(u) &\equiv \sum_{n=k_1}^{\varepsilon/|M|} g_i(n, u) = \sum_{n=k_1}^{\varepsilon/|M|} \frac{u}{1 + unD_i} \\ &\sim \int_{k_1}^{\varepsilon/|M|} \frac{u dx}{1 + D_i u x} \sim \frac{1}{D_i} \ln \left(\frac{u}{|M|} \right), \quad M \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где k_1 — постоянная, при $u = c|M|^x$, $x \in [0, 1]$, $c \in (0, 1)$

$$A^{(i)}(c|M|^x) \sim \frac{1-x}{D_i} \ln \left(\frac{1}{|M|} \right), \quad M \rightarrow 0. \quad (29)$$

В силу произвольности $\varepsilon, \varepsilon_1, \delta$ из (26)–(29) следует, что при $u = c|M|^x$, $x \in [0, 1)$, $c \in (0, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\varepsilon/|M|} \mathbf{M}\kappa_{(j)}(n, c|M|^x) \sim \frac{1-x}{K} \ln \left(\frac{1}{|M|} \right), \quad M \rightarrow 0. \quad (30)$$

Оценим теперь

$$\sum_{n=N/|M|}^{\infty} \mathbf{M}\kappa_{(j)}(n, u), \quad \sum_{n=\varepsilon/|M|}^{N/|M|} \mathbf{M}\kappa_{(j)}(n, u).$$

Из (21) и (22) следует, что

$$\begin{aligned} \kappa_{(j)}(n, u) &\leq \prod_{i=0}^{n-1} f'_{\eta_i}(1) \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} g_{\eta_i} \prod_{k=i}^{n-1} f'_{\eta_k}(1) \right)^{-1} \\ &\leq \prod_{i=0}^{n-1} f'_{\eta_i}(1) \left(1 + G_1 \frac{1-m^n}{1-m} \right)^{-1} = \kappa(n). \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим

$$\mathbf{M} \prod_{i=0}^{n-1} f'_{\eta_i}(1).$$

Напомним, что $i^* = \{i: m_i = m\}$. Положим

$$P_i^{(1)} = \sum_{j \neq i^*} p_{ij}, \quad r = \max_i P_i^{(1)}.$$

Так как $p_{ij} > 0$ для всех $i, j \in S$, то $r > 1$.

Лемма 4. *Справедлива оценка*

$$\mathbf{M} \prod_{i=0}^{n-1} f'_{\eta_i}(1) < C(m(1-r) + r)^n, \quad (32)$$

где C — постоянная.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Заметим сначала, что

$$p_{ji^*} = 1 - P_j^{(1)} \geq 1 - r. \quad (33)$$

Пусть $\eta_0 = j$. Имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \mathbf{M} f'_{\eta_0}(1) f'_{\eta_1}(1) &= \left\{ m p_{ji^*} + \sum_{i \neq i^*} p_{ij} f'_i(1) \right\} < m(1-r + p_{ji^*} - (1-r)) + \sum_{i \neq i^*} p_{ji} \\ &< m(1-r) + p_{ji^*} - (1-r) + P_j^{(1)} = m(1-r) + r. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathbf{M} \prod_{i=0}^{k-1} f'_{\eta_i}(1) < C(m(1-r) + r)^k.$$

Покажем, что

$$\mathbf{M} \prod_{i=0}^k f'_{\eta_i}(1) < C(m(1-r) + r)^{k+1}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \prod_{i=0}^k f'_{\eta_i}(1) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} p_{ji_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{k-2} i_{k-1}} \prod_{l=0}^{k-1} f'_{\eta_{i_l}}(1) \left(m p_{i_{k-1} i^*} + \sum_{i_k \neq i^*} f'_{\eta_{i_k}}(1) p_{i_{k-1} i_k} \right) \\ &< \sum_{i_1, \dots, i_k} p_{ji_1} \dots p_{i_{k-2} i_{k-1}} \prod_{l=0}^{k-1} f'_{\eta_{i_l}}(1) (m(1-r) + m(p_{i_{k-1} i^*} - (1-r)) + P_{i_{k-1}}^{(1)}) \\ &< \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} p_{ji_1} \dots p_{i_{k-2} i_{k-1}} \prod_{l=0}^{k-1} f'_{\eta_{i_l}}(1) (m(1-r) + 1 - P_{i_{k-1}}^{(1)} - (1-r) + P_{i_{k-1}}^{(1)}) \\ &= \mathbf{M} \prod_{i=0}^{k-1} f'_{\eta_i}(1) (m(1-r) + r) \leq C(m(1-r) + r)^{k+1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Итак, из (31), (32) следует, что

$$\mathbf{M} \chi_{(j)}(n, u) \leq c \frac{(m(1-r) + r)^n}{1 + G_1(1 - m^n)/(1 - m)}, \quad (34)$$

где c — некоторая постоянная.

Так как в силу (7) $1/m < (1+r)/(2r)$, при всех M , достаточно близких к нулю, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \ln(m(1-r) + r) &< \ln m + \ln(1 + (1+r)(1-m)/2) \\ &< \ln m + (1+r)(1-m)/2 \\ &< \ln m(1 - (1+r)/2) < Ma, \end{aligned}$$

где $0 < a = (1-r)/2 < 1$.

Таким образом, при M , достаточно близких к 0,

$$\frac{(m(1-r) + r)^n}{1 + G_1(1 - m^n)/(1 - m)} \leq \frac{e^{nMa}}{1 + G_1(1 - e^{nM/\omega_m})/(1 - e^{M/\omega_m})} = y(M, n). \quad (35)$$

Оценим

$$\sum_{n=\varepsilon/|M|}^{N/|M|} y(M, n), \quad \sum_{n=N/|M|}^{\infty} y(M, n).$$

Положим $b = 1/\omega_m$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=N/|M|}^{\infty} y(M, n) &\leq c + \int_{N/|M|}^{\infty} e^{xMa} / \left(+G_1 \frac{1 - e^{xMb}}{1 - e^{Mb}} \right) dx \\ &\leq c + \frac{1 - e^{Mb}}{|M|a} \int_0^{e^{-Na}} \frac{dy}{G_1(1 - y^{b/a})} = O(1), \quad M \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (36)$$

так как $0 < y^{b/a} < e^{-Nb} < 1$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{n=\varepsilon/|M|}^{N/|M|} y(M, n) &\leq c + \int_{\varepsilon/|M|}^{N/|M|} e^{xbM} e^{xM(a-b)} \left(1 + G_1 \frac{1 - e^{xbM}}{1 - e^{bM}} \right)^{-1} dx \\ &\leq c + e^{N(b-a)} \int_{\varepsilon/|M|}^{N/|M|} e^{xbM} \left(1 + G_1 \frac{1 - e^{xbM}}{1 - e^{bM}} \right)^{-1} dx \\ &= O(1), \quad M \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (37)$$

В силу (35)–(37)

$$\sum_{n=\varepsilon/|M|}^{\infty} \mathbf{M}\chi_{(j)}(n, u) = O(1), \quad M \rightarrow 0. \quad (38)$$

Из (38), (30) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(1 - f_{(j)}^{(n)}(1 - c|M|^x)) \sim \frac{1-x}{K} \ln \frac{1}{|M|}, \quad M \rightarrow 0. \quad (39)$$

Пользуясь леммой 1, из (39) получаем соотношение (18).

Лемма 5. Утверждение леммы 3 остается в силе для всех $f_j(z)$, $j \in S$, удовлетворяющих условиям (2), (3).

Доказательство леммы 5 проводится тем же приемом, что и доказательство леммы 4 из [9], с использованием утверждений лемм 1–3.

Положим $B(z) = \Pi_2(z)/\Pi_1(z)$, где $\Pi_2(z)$, $\Pi_1(z)$ были определены в соотношении (13).

Лемма 6. При $M \rightarrow 0$

$$B(1 - |M|^x) \sim \frac{q\pi_0}{K} (1-x) \ln \frac{1}{|M|}, \quad x \in [0, 1). \quad (40)$$

Доказательство. Заметим, что из (25), (26) следует, что для $n \in V_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\chi_{(j)}(n, 1-z)\zeta_n^*(z)) &\leq g_1(n, u)(1 - \varepsilon_0)\mathbf{M}\zeta_n^*(z) \\ &\quad + \mathbf{M}\{\zeta_n^*(z)\mathbf{I}\{\bar{A}_n\}\}\{\varepsilon_0 g_2(n, u) - g_1(n, u)(1 - \varepsilon_0)\}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\mathbf{I}\{\bar{A}_n\}$ — индикатор события $\bar{A}_n$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$, $u = 1 - z$.

Аналогично, при $n \in V_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\chi_{(j)}(n, 1 - z)\zeta_n^*(z)) \\ \geq g_3(n, u)(1 - \varepsilon_0)\mathbf{M}\zeta_n^*(z) - \mathbf{M}(\zeta_n^*(z)\mathbf{I}\{\bar{A}_n\})g_3(n, u)(1 - \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (42)$$

Так как множество S конечно и максимальное число иммигрирующих частиц T также конечно, найдется число $j^* \in S$ такое, что $Q_{j^*}(z) \geq Q_j(z)$ для всех $j \in S$ и z из некоторой окрестности $U^*(1)$ единицы. Пусть

$$F(z) = 1 - \frac{1 - z}{1 + G_1(1 - z)}.$$

Введем последовательность

$$F^2(z) = F(F(z)), \dots, F^{(k+1)}(z) = F(F^k(z)).$$

Положим

$$\tilde{\zeta}_n^*(z) = Q_{j^*}(F^{(n-1)}(z))Q_{j^*}(F^{(n-2)}(z)) \dots Q_{j^*}(F(z)).$$

Ясно, что $\tilde{\zeta}_n^*(z) \geq \zeta_n^*(z)$ при $z \in U^*(1)$ в силу монотонного убывания $Q_j(z)$, $j \in S$, по z . Заметим, что $\tilde{\zeta}_n^*(z)$ соответствует значению $\zeta_n^*(z)$ для критического процесса $\{Z_n^*\} = \{Z_n\}$ с одним состоянием среды, т.е. с фиксированной производящей функцией распределения числа потомков $F(z)$ и фиксированной миграционной компонентой, задаваемой $Q_{j^*}(z)$. Такой процесс $\{Z_n^*\}$ был рассмотрен в [5], где показано (см. формулу (21) в [5]), что $\tilde{\zeta}_n^*(z) < \infty$. Поэтому в силу леммы 1

$$\mathbf{M}(\zeta_n^*(z)\mathbf{I}\{\bar{A}_n\}) \leq C_1 \mathbf{P}\{\bar{A}_n\} \leq C_1 \varepsilon_1. \quad (43)$$

Используя леммы 1, 2, 3 и учитывая произвольность ε_1 , из (41)–(43) и (30) получаем, что

$$\begin{aligned} \Pi_1(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}\zeta_n^*(0) < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\varepsilon/|M|} \mathbf{M}\pi(0, \eta_0)(1 - f^{(n)}(0))\zeta_n^*(0)/\Pi_1(0) &\sim \frac{1}{K} \ln \frac{1}{|M|} \pi_0, \quad M \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (44)$$

С другой стороны, согласно лемме 1 и ограниченности $Q(z)$

$$\sum_{n=\varepsilon/|M|}^{\infty} \mathbf{M}(\chi_{(j)}(n, 1 - z)\zeta_n^*(z)) < c + c_1 \sum_{n=\varepsilon/|M|}^{\infty} \mathbf{M}(\chi_{(j)}(n, 1 - z^*)\tilde{\zeta}_n^*(z^*)), \quad (45)$$

где $z^* \in U^*(1)$, и, поскольку, как было показано выше, $\zeta_n^*(z^*) < \tilde{\zeta}_n^*(z^*)$ для всех $z^* \in U^*(1)$,

$$\sum_{n=\varepsilon/|M|}^{\infty} \mathbf{M}(\chi_{(j)}(n, 1)\zeta_n^*(0)) < c + c_2 \sum_{n=\varepsilon/|M|}^{\infty} \mathbf{M}\chi_{(j)}(n, z^*) = O(1) \quad (46)$$

согласно (38). Из (46), (44) следует (40) при $x = 0$.

Заметим теперь, что при M , достаточно близком к 0,

$$1 \leq \Pi_1(1 - |M|^x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_n^*(1 - |M|^x), \quad x \in (0, 1),$$

и

$$\lim_{M \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_n^*(1 - |M|^x) = 1, \quad x \in (0, 1). \quad (47)$$

Таким образом, в силу леммы 5 при $x \in (0, 1)$

$$\Pi_2(1 - |M|^x) \sim q\pi_0 \frac{(1-x)}{K} \ln \frac{1}{|M|}, \quad M \rightarrow 0, \quad (48)$$

откуда и следует (40) при $x \in (0, 1)$.

Покажем теперь, что при $M \rightarrow 0$

$$\Pi(1 - |M|^x) \rightarrow x, \quad x \in [0, 1]. \quad (49)$$

Так как, согласно (13), $\Pi(z) = \Pi_1(z)(1 - B(z))$, используя (47), (40), получаем, что

$$\lim_{M \rightarrow 0} \Pi(1 - |M|^x) = \lim_{M \rightarrow 0} (1 - B(1 - |M|^x)) = 1 - \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\pi_0(1-x)}{K} q \ln \frac{1}{|M|}. \quad (50)$$

Заметим теперь, что из (13) и соотношения $\Pi(0) = \pi(0)$ следует, что

$$\pi_0/\pi_1(0) = (1 - \pi_2(0)/\Pi_1(0)). \quad (51)$$

Из (40), (51) находим, что

$$\pi_0 \sim q/(K \ln 1/|M|), \quad M \rightarrow 0. \quad (52)$$

Подставляя (52) в (50), приходим к (49). Из (49) следует (см. [9]) утверждение теоремы.

Замечание 2. Утверждение теоремы остается в силе и при замене ограничений, наложенных на m_i в (2), на условия $0 < c < m_i \leq 1$, $M < 0$.

Список литературы

1. Smith W. L. On branching processes in random environments. *Ann. Math. Statist.* (1969) **40**, №3, 814–827.
2. Athreya K. B., Karlin S. Branching processes with random environments. I. Extinction probabilities. *Ann. Math. Statist.* (1971) **42**, №5, 1499–1520.
3. Athreya K. B., Karlin S. Branching processes with random environments, II. Limit theorems. *Ann. Math. Statist.* (1971) **42**, №6, 1843–1858.

4. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №2, 513–540.
5. Нагаев С. В., Хан Л. В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с миграцией. *Теория вероятностей и ее применения* (1980) **25**, №3, 523–534.
6. Yanev G. P., Yanev N. M. On a new model of branching migration processes. *C. R. Acad. Bulg. Sci.* (1991) **44**, №3, 19–22.
7. Dyakonova E. E. On transient phenomena for a branching migration process. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proceedings of the Third Petrozavodsk Conference*. TVP/VSP, Moscow/Utrecht, 1993, pp. 148–154.
8. Foster F. G. On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. *Ann. Math. Statist.* (1953) **24**, №2, 355–360.
9. Дьяконова Е. Е. Близкие к критическим ветвящиеся процессы с миграцией. *Теория вероятностей и ее применения* (1996) **41**, №1, 186–192.
10. Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Probab.* (1975) **12**, №1, 39–46.

Статья поступила 14.12.95.