Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Егоров, О минимальной укладке дерева с закрепленными вершинами, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 1, 147–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:57:02

О минимальной укладке дерева с закрепленными вершинами

© 1997 г. Е. Е. Егоров

Рассматривается задача минимальной укладки дерева на отрезок. Известно, что для деревьев с незакрепленными вершинами она решается за полиномиальное время. Здесь устанавливается, что при закреплении некоторых вершин дерева эта задача становится NP-полной.

1. Основные понятия и результаты

Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел. Для заданных a и b из $\mathbf{N}$ при $a \leq b$ обозначим через $[a, b]$ множество всех чисел c из $\mathbf{N}$ таких, что $a \leq c \leq b$, которое назовем отрезком. Для множества C обозначим через $\|C\|$ его мощность.

Обозначим через $D = (V, E)$ граф, имеющий вид дерева, в котором V и E суть множества вершин и ребер соответственно. Пусть $n, m \in \mathbf{N}$, $m \leq n$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $U = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $W \subset \mathbf{N}$ и $W = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Вершины из U называем закрепленными. Называем укладкой дерева D на отрезок $[1, n]$ биективное отображение $\varphi: V \rightarrow [1, n]$, для которого $\varphi(v_j) = i_j$ при $j \in [1, m]$. Значения φ также называем вершинами. Содержательно укладку можно интерпретировать как специальное геометрическое представление дерева. Если $(v, v') \in E$, то число $|\varphi(v) - \varphi(v')|$ будем называть длиной ребра (v, v') при укладке φ . Определим функционал

$$F(\varphi) = \sum_{(v,u) \in E} |\varphi(v) - \varphi(u)|.$$

Тем самым значение функционала F есть суммарная длина всех ребер из D при укладке φ . Укладка, которая доставляет минимум этого функционала, называется минимальной. Задачу нахождения минимальной укладки обозначим Z .

Теорема. *Задача Z является NP-полной.*

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим дерево D специального вида с корнем O . Вершины дерева D , инцидентные одному ребру, называем листьями. Длина цепи от корня к листу в D не превосходит двух. Длина цепи от корня к некоторой вершине дерева

Рис. 1.

называется глубиной вершины. Обозначим в дереве D вершины глубины один, являющиеся листьями, через $u^1, u^2, \dots, u^T$. Вершины глубины один, не являющиеся листьями, обозначим через $l^1, l^2, \dots, l^S$ и назовем предлистьями. Листья, инцидентные предлисту l^i , обозначим $l_1^i, l_2^i, \dots, l_{k_i}^i$.

Дерево задается числами $S, T, k_1, k_2, \dots, k_S$. Везде далее под деревом D будет подразумеваться дерево описанного вида. В качестве множества закрепленных вершин U возьмем $\{O\}$, а в качестве W множество $\{\|V\|/2\}$. Деревья такого вида называем регулярными.

Пусть D^i — поддерево в D , образованное вершиной l^i и ребрами, инцидентными l^i , но не инцидентными O . Множество вершин $B = \{O, u^1, u^2, \dots, u^T\}$ назовем барьером.

Рассмотрим укладку, обладающую следующими свойствами:

- (1) для любых трех вершин v_1, v_2, v_3 из V , если $\varphi(v_1) < \varphi(v_2) < \varphi(v_3)$ и вершины v_1 и v_3 суть вершины некоторого поддерева D^i , то v_2 тоже является вершиной D^i ;
- (2) если для v_1 из V^i и v_2 из V^j выполнены неравенства $\varphi(v_1) < \varphi(v_2) < \varphi(O)$, то $\|V^i\| \geq \|V^j\|$, а если для v_1 из V^i и v_2 из V^j выполнены неравенства $\varphi(O) < \varphi(v_1) < \varphi(v_2)$, то $\|V^i\| \leq \|V^j\|$.

Укладку, обладающую свойствами (1) и (2), назовем блочной, а образы поддеревьев D^i назовем блоками.

Лемма 1. Минимальная укладка регулярного дерева является блочной.

Доказательство. Покажем, что любую неблочную укладку дерева D можно преобразовать в блочную, при этом уменьшив значение F . Пусть φ — неблочная укладка. Воспользуемся геометрическим представлением укладки. Рассмотрим расположение какого-нибудь поддерева, пусть это будет $D^1 = (V^1, E^1)$ (см. рис.1). Пусть $\varphi(v_{\min}) = \min_{v \in V^1} \varphi(v)$ и $\varphi(v_{\max}) = \max_{v \in V^1} \varphi(v)$ суть крайние, соответственно, слева и справа вершины в укладке.

Внутри уложенного поддерева D^1 , то есть между $\varphi(v_{\min})$ и $\varphi(v_{\max})$, кроме других вершин поддерева D^1 , содержатся:

- (1) поддеревья, не содержащие внутри себя ничего, кроме своих вершин, которые обозначаем через $D^{i_1}, \dots, D^{i_r}$;

- (2) листья, принадлежащие отличным от $D^{i_1}, \dots, D^{i_r}$ поддеревьям ($l_j^i, i \neq 1, i_1, \dots, i_r$);
- (3) предлистья, принадлежащие отличным от $D^{i_1}, \dots, D^{i_r}$ поддеревьям ($l^i, i \neq 1, i_1, \dots, i_r$).

Теперь будем преобразовывать укладку.

Шаг 1. Пусть имеется лист l_j^i , подпадающий под пункт 2. Укладку φ заменяем на φ' путем обмена местами l_j^i и одной из вершин $\varphi(v_{\min})$ или $\varphi(v_{\max})$, той, с которой l_j^i лежит по одну сторону относительно l^i . Рассмотрим два случая (см. рис. 2, 3):

- (а) ребро из l_j^i ведет в противоположную от l^i сторону;

Рис. 2.

- (б) ребро из l_j^i ведет в направлении l^i .

Рис. 3.

В случае (а) функционал уменьшится, а в случае (б) не увеличится.

Повторяем шаг 1, пока возможно, то есть пока есть листья, удовлетворяющие пункту 2.

Шаг 2. Пусть имеется предлист l^i , подпадающий под пункт 3. Из вершины l^i ведут $1 + k_i$ ребер, одно в вершину O , а другие к листьям l_j^i . Обменяем вершину l^i с той из $\varphi(v_{\min}), \varphi(v_{\max})$, в чью сторону из l^i ведет большее число ребер. Функционал при этом не уменьшится.

Повторяем шаг 2 пока это возможно.

Шаг 3. К этому времени внутри уложенного поддерева D^1 остались только целые поддеревья $D^{i_1}, \dots, D^{i_r}$. Их нужно “разогнать по краям”, как показано на рис. 4.

Рис. 4.

Функционал при этом уменьшится. (Если при начальной укладке φ внутри D^1 нет целых поддеревьев, то хотя бы раз будет применен случай (а) шага 1, и функционал все равно уменьшится.)

Теперь свойство 1 выполняется для поддерева D^1 , причем переукладка поддерева D^1 не меняет свойства 1 других поддеревьев.

Описанную последовательность действий проводим для каждого поддерева, постепенно превращая их в целые блоки. Переставляя целые блоки, очевидно, можно добиться выполнения свойства 2. Лемма доказана.

Пусть задана укладка φ дерева D с корнем O . Обозначим

$$\Delta_{\varphi} D = \left| \sum_{\substack{\varphi(v) < \varphi(O) \\ v \in V^i}} \|V^i\| - \sum_{\substack{\varphi(v) > \varphi(O) \\ v \in V^i}} \|V^i\| \right|,$$

и V^i — множество вершин поддерева D^i дерева D .

Лемма 2. При минимальной укладке дерева D с корнем O величина $\Delta_{\varphi} D$ принимает минимальное значение.

Доказательство. Подсчитаем функционал F при минимальной укладке.

Из леммы 1 следует, что минимальная укладка дерева D будет блочной, поэтому только одно поддерево D^i может содержать в себе барьер B . Значит, функционал можно представить в виде

$$F(\varphi) = \sum_{i=1}^s F^i + P(\varphi) + S(\varphi).$$

Рис. 5.

Здесь F^i — значение функционала F при укладке блока D^i , и тем самым слагаемое

$$\sum_{i=1}^s F^i$$

не зависит от выбора блочной укладки. Далее, значение выражения

$$S(\varphi) = \sum_{i=1}^s |\varphi(0) - \varphi(l^i)|$$

определяется ребрами (O, l^i) , а слагаемое

$$P(\varphi) = T\Delta$$

появляется в результате разрыва одного из блоков барьером (см. рис. 5). Так как для любых двух блочных укладок φ_1 и φ_2 имеют место неравенства

$$|S(\varphi_1) - S(\varphi_2)| < \sum_{i=1}^s k_i < T,$$

а $P(\varphi)$ кратно T , то блочная укладка, минимальная относительно F , будет иметь минимальное значение $P(\varphi)$, а поэтому и $\Delta_\varphi D$ будет минимальна. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 1.

Напомним задачу о разбиении (ЗоР), которая состоит в следующем. В заданном множестве A натуральных чисел требуется выбрать подмножество A' такое, чтобы

$$\sum_{a \in A'} a = \sum_{a' \in A \setminus A'} a', \quad \|A'\| = \|A \setminus A'\|.$$

Эта задача является, как известно, NP-полной [1]. Доказательство теоремы осуществим путем сведения к задаче Z указанной задачи ЗоР, при этом задачу Z рассматриваем применительно к регулярным деревьям.

Возьмем задачу ЗоР для $A = \{a_1, \dots, a_s\}$. Построим соответствующее дерево D , для чего положим

$$k_j = M + a_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad T, M > 2 \sum_{j=1}^s a_j.$$

Найдем для полученного дерева минимальную укладку, то есть решим задачу Z . Пусть в отрезок $[1, a]$ целиком попали поддеревья $D^{i_1}, \dots, D^{i_{s/2}}$. Образует множество $A' = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{s/2}}\}$. Из леммы 2 следует, что величина

$$\sum_{a \in A'} a - \sum_{a' \in A \setminus A'} a'$$

достигла минимума. Если оказалось, что

$$\sum_{a \in A'} a = \sum_{a' \in A \setminus A'} a', \quad \|A'\| = \|A \setminus A'\|,$$

тогда ответом в задаче ЗоР будет A' , иначе отвечаем, что искомого разбиения не существует.

Остается заметить, что из рассмотренного случая регулярных деревьев вытекает справедливость утверждения для задачи Z в общем случае.

Теорема доказана.

Автор благодарит С. В. Алешина, под руководством которого выполнена работа.

Список литературы

1. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.

Статья поступила 23.10.96.