Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. З. Насыров, Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые отметки, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 1, 123–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:30:53

Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые отметки

© 1997 г. А. З. Насыров

Проблема обхода плоских лабиринтов автоматами поставлена К. Шенноном в начале шестидесятих годов. Известно, что не существует конечного автомата, который обходил бы произвольный наперед заданный лабиринт. Поиски положительного решения проблемы обхода лабиринтов автоматами естественно вести в двух направлениях. Первое направление связано с рассмотрением более узких классов лабиринтов, а второе — с усилением возможностей автоматов при обходе ими лабиринтов. В данной работе показано, что существует автомат, оставляющий в вершинах лабиринта одну нестираемую отметку (краску) и обходящий произвольный прямоугольный лабиринт.

1. Формулировка полученного результата

Пусть X_α , $\alpha \in A$, — некоторое индексированное семейство множеств, причем A конечно. Для любого $\alpha \in A$ через Пр_α обозначим отображение проецирования произведения

$$\prod_{\beta \in A} X_\beta$$

на его α -й сомножитель X_α .

Пусть $\mathcal{L} = (V, \Gamma)$ — связный ориентированный граф, не имеющий петель и кратных дуг, V — множество вершин, Γ — множество дуг графа $\mathcal{L}$. Если в графе $\mathcal{L} = (V, \Gamma)$ вместе с дугой (v_1, v_2) содержится дуга (v_2, v_1) , то эта пара дуг называется ребром и обозначается $\langle v_1, v_2 \rangle$. Граф $\mathcal{L}$ называется симметрическим, если для любой дуги $(v_1, v_2) \in \Gamma$ имеет место включение $\langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \Gamma$.

Пусть $\mathbf{D} = \{e, n, w, s\}$. Пусть $M \in \mathbf{R}^2$, $N \in \mathbf{R}^2$, $M \neq N$, $\overline{MN} = \alpha_1 i + \alpha_2 j$, где i, j — единичные координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Будем считать, что отрезок $\overline{MN}$ идет в направлении e , если $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 = 0$, в направлении n , если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$, в направлении w , если $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 = 0$, в направлении s , если $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$. Множество T отрезков на плоскости называется конфигурацией, если любые два отрезка из этого множества могут иметь не более одной общей точки, причем, если она есть, то обязательно является концевой для обоих отрезков.

Пусть $\mathcal{L} = (V, \Gamma)$ — граф такой, что $V \subseteq \mathbf{R}^2$, и каждой дуге графа $\mathcal{L}$ приписаны отметки из множества $\mathbf{D}$ так, что разные дуги, выходящие из одной и той

же вершины, а также разные дуги, входящие в одну и ту же вершину, имеют различные отметки. Отметку дуги $\gamma \in \Gamma$ будем обозначать $|\gamma|$. Пусть $e^{-1} = w$, $n^{-1} = s$, $w^{-1} = e$, $s^{-1} = n$. Граф $L = (V, \Gamma)$ называется прямоугольным лабиринтом, если

- (1) $\mathcal{L}$ — связный симметрический граф;
- (2) для любых $u \in V$, $v \in V$, если $(u, v) \in \Gamma$, то $|(v, u)| = |(u, v)|^{-1}$, и отрезок $\overline{uv}$ идет в направлении $|(u, v)|$;
- (3) множество отрезков $T = \{\overline{uv} \mid (u, v) \in \Gamma\}$ является конфигурацией. Прямоугольный лабиринт $L = (V, \Gamma)$ называется инициальным, если в нем выделена некоторая вершина $v_0 \in V$; инициальные лабиринты будем обозначать $\mathcal{L}_{v_0}$. Множество всех прямоугольных лабиринтов с отметками дуг из множества $\mathbf{D}$ обозначим через $\mathcal{L}(\mathbf{D})$.

Пусть $A = E_2 \times (\mathbf{D} \cup \{\Lambda\})^4$, $B = E_2 \times \mathbf{D}$, причем для любого $(w, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ из A $w \in E_2$, $\sigma_1 \in \{e, \Lambda\}$, $\sigma_2 \in \{n, \Lambda\}$, $\sigma_3 \in \{w, \Lambda\}$, $\sigma_4 \in \{s, \Lambda\}$, $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\} \neq \Lambda$. Инициальный автомат $\mathcal{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ называется автоматом с одной краской для класса $\mathcal{L}(\mathbf{D})$, если для любых $q \in Q$, $a = (w, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ из A $\text{Pr}_2(\psi(q, a)) \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ и, кроме того, если $\text{Pr}_1(a) = 1$, то $\text{Pr}_1(\psi(q, a)) = 1$.

Пусть $\mathcal{A}_{q_0}$ — некоторый инициальный автомат с одной краской, $\mathcal{L}_{v_0}$ — некоторый инициальный лабиринт из $\mathcal{L}(\mathbf{D})$. Интерпретируем функционирование автомата $\mathcal{A}_{q_0}$ в лабиринте $\mathcal{L}_{v_0}$ следующим образом: Пусть вершины лабиринта $\mathcal{L}_{v_0}$ могут быть нагружены символами из E_2 и в начальный момент отметки всех вершин равны 0 (вершины неокрашены). Автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ помещается в начальный момент в вершину v_0 лабиринта $\mathcal{L}_{v_0}$. Предположим, что в какой-то момент автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ оказался в вершине v лабиринта $\mathcal{L}_{v_0}$ в состоянии q . Автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ обозревает нагруженную звезду, образованную исходящими из этой вершины дугами. Его входной буквой в этот момент будет пятерка $a(v) = (w(v), \sigma_1(v), \sigma_2(v), \sigma_3(v), \sigma_4(v))$, образованная отметкой вершины v и множеством отметок звезды. В следующий момент, если $\varphi(q, a(v)) = (w, \sigma)$, то автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ перемещается в вершину, в которую ведет дуга с отметкой σ , и переходит в состояние $\varphi(q, a(v))$; при этом он изменяет отметку вершины v на w (заметим, что из определения автомата с одной краской следует, что отметка вершины v может измениться лишь тогда, когда эта отметка — ноль, т.е. когда вершина v не окрашена).

Функционирование автомата $\mathcal{A}_{q_0}$ в лабиринте $\mathcal{L}_{v_0}$ можно трактовать как поведение $\mathcal{A}_{q_0}$ в $\mathcal{L}_{v_0}$. Последовательность

$$\pi(\mathcal{A}_{q_0}, \mathcal{L}_{v_0}) = ((q_0, v_0, a(v_0), w_0), (q_1, v_1, a(v_1), w_1), \dots)$$

называется поведением автомата $\mathcal{A}_{q_0}$ в лабиринте $\mathcal{L}_{v_0}$, если имеет место следующее. Пусть $i \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= \varphi(q_i, a(v_i)), & (v_i, v_{i+1}) &\in \Gamma, \\ |(v_i, v_{i+1})| &= \text{Pr}_2(\psi(q_i, a(v_i))), \\ w_i &= \text{Pr}_1(\psi(q_i, a(v_i))), \end{aligned}$$

$\text{Pr}_1(a(v_i)) = 0$, если либо $i = 0$, либо $i \geq 1$ и для всякого $j \in \{0, \dots, i-1\}$, $v_j \neq v_i$, $\text{Pr}_1(a(v_i)) = 1$, если существует $j \in \{0, \dots, i-1\}$ такое, что $v_j \neq v_i$, $w_j = 1$.

Пусть

$$\text{Int}(\mathcal{A}_{q_0}, \mathcal{L}_{v_0}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \text{Pr}_2(q_i, v_i, a(v_i), w_i)$$

есть множество всех вершин, которые обходит автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ в лабиринте $\mathcal{L}_{v_0}$, т.е. множество всех вторых компонент четверок, образующих последовательность $\pi(\mathcal{A}_{q_0}, \mathcal{L}_{v_0})$. Будем считать, что инициальный автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ обходит инициальный лабиринт $\mathcal{L}_{v_0} = (V, \Gamma)$, если $\text{Int}(\mathcal{A}_{q_0}, \mathcal{L}_{v_0}) = V$. Автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ сильно обходит лабиринт $\mathcal{L} = (V, \Gamma)$, если для любой $v_0 \in V$ автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ обходит инициальный лабиринт $\mathcal{L}_{v_0}$.

Теорема 1. *Существует автомат с одной краской, сильно обходящий любой прямоугольный лабиринт.*

2. Обход лабиринтов с использованием алгоритма обхода графа в глубину

Пусть $\mathcal{L} = (V, \Gamma)$ — произвольный прямоугольный лабиринт. Горизонталью (вертикалью) лабиринта $\mathcal{L}$ назовем последовательность $\langle v_1, v_2 \rangle, \dots, \langle v_{n-1}, v_n \rangle$ его ребер такую, что

- (1) $|(v_i, v_{i+1})| = e$ ($|(v_i, v_{i+1})| = n$);
- (2) для любого $v \in V$, если $(v, v_1) \in \Gamma$ или $(v_n, v) \in \Gamma$, то $|(v, v_1)| \neq e$, $|(v_n, v)| \neq e$ ($|(v, v_1)| \neq n$, $|(v_n, v)| \neq n$). Таким образом, каждая горизонталь (вертикаль) максимальна.

Рассмотрим лабиринт $\tilde{\mathcal{L}} = (V, \tilde{\Gamma})$, который получается из $\mathcal{L}$ после выполнения следующих операций:

- (1) каждая горизонталь $\langle v_1, v_2 \rangle, \dots, \langle v_{n-1}, v_n \rangle$ лабиринта $\mathcal{L}$ заменяется на ориентированный цикл $(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$ с отметками дуг

$$|(v_1, v_2)| = e, \dots, |(v_{n-1}, v_n)| = e, |(v_n, v_1)| = w;$$

- (2) каждая вертикаль лабиринта $\mathcal{L}$ заменяется на ориентированный цикл $(u_1, u_2), \dots, (u_{m-1}, u_m), (u_m, u_1)$ с отметками дуг

$$|(u_1, u_2)| = n, \dots, |(u_{m-1}, u_m)| = n, |(u_m, u_1)| = s.$$

Класс всех лабиринтов, получающихся из произвольных прямоугольных лабиринтов с помощью вышеуказанных операций, обозначим $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{D})$. Дуги с отметками n и s у лабиринтов из $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{D})$ будем называть вертикальными, а с отметками e и w горизонтальными.

Нетрудно убедиться в том, что для любого лабиринта $\tilde{\mathcal{L}} \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{D})$ выполняются следующие свойства.

Свойство 1. Лабиринт $\tilde{\mathcal{L}}$ сильносвязный;

Свойство 2. Из каждой вершины лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}$ выходит не более одной вертикальной (горизонтальной) дуги;

Свойство 3. В каждую вершину лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}$ входит не более одной вертикальной (горизонтальной) дуги;

Свойство 4. В вершину v лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}$ входит горизонтальная (вертикальная) дуга тогда и только тогда, когда из нее выходит горизонтальная (вертикальная) дуга.

Таким образом, лабиринт $\tilde{\mathcal{L}}$ распадается на конечное число ориентированных вертикальных и конечное число ориентированных горизонтальных циклов.

Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0} = (V, \tilde{\Gamma}, \tilde{\mathcal{L}}_{v_0} \in \mathcal{L}(\mathbf{D})$, — инициальный лабиринт с начальной вершиной v_0 . Рассмотрим алгоритм $\mathcal{U}$ обхода графа в глубину для лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0}$. Алгоритм $\mathcal{U}$ работает в дискретном времени $t = 1, 2, \dots$ и на каждом шаге (t -м шаге) своей работы, просматривая вершину v_i , формирует последовательность $\pi_{t+1} = (v_{i_1}, \dots, v_{i_t}, v_{i_{t+1}})$ вершин лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0}$. Процесс формирования последовательности π_{t+1} осуществляется следующим образом.

1. Инициализация. Полагаем $\pi_1 = (v_0)$.

Пусть $t \geq 1$ и к t -му шагу работы алгоритма $\mathcal{U}$ сформирована последовательность $\pi_t = (v_{i_1}, \dots, v_{i_t})$, $v_{i_1} = 0$, и алгоритм $\mathcal{U}$ просматривает вершину v_{i_t} лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0}$.

2. Углубление. Пусть либо $t = 1$, либо $t \geq 2$ и $(v_{i_{t-1}}, v_{i_t}) \in \tilde{\Gamma}$. Имеет место следующее:

- (1) пусть вершина v_{i_t} не совпадает ни с какой компонентой последовательности π_{t-1} . Тогда $v_{i_{t+1}}$ — вершина, в которую ведет из v_{i_t} выходящая вертикальная дуга и, если такой дуги нет, то $v_{i_{t+1}}$ — вершина, в которую ведет из v_{i_t} выходящая горизонтальная дуга; при этом алгоритм $\mathcal{U}$ возвращается к выполнению п.2;
- (2) пусть вершина v_{i_t} совпадает с одной из компонент последовательности π_{t-1} . Тогда $v_{i_{t+1}} = v_{i_{t-1}}$, и алгоритм $\mathcal{U}$ переходит к выполнению п. 3.

3. Возвращение. Пусть $t \geq 0$, $(v_{i_{t-1}}, v_{i_t}) \notin \tilde{\Gamma}$, но $(v_{i_t}, v_{i_{t-1}}) \in \tilde{\Gamma}$. Пусть $l \geq 1$, $v_{i_t} = v_{i_l}$, причем, если $l > 1$, то $v_{i_1} \neq v_{i_t}, \dots, v_{i_{l-1}} \neq v_{i_t}$. Имеет место следующее:

- (1) пусть дуга $(v_{i_t}, v_{i_{t-1}})$ вертикальна и существует горизонтальная дуга, выходящая из v_{i_t} . Тогда $v_{i_{t+1}}$ — вершина, в которую ведет эта дуга; при этом алгоритм $\mathcal{U}$ переходит к выполнению п.2;
- (2) пусть либо дуга $(v_{i_t}, v_{i_{t-1}})$ вертикальна, но из v_{i_t} не выходит горизонтальной дуги, либо дуга $(v_{i_t}, v_{i_{t-1}})$ горизонтальна. Тогда, если $v_{i_t} \neq v_0$, то $v_{i_{t+1}} = v_{i_{t-1}}$, и алгоритм возвращается к выполнению п.3, если $v_{i_t} = v_0$, то алгоритм $\mathcal{U}$ останавливается.

Таким образом, результатом работы алгоритма $\mathcal{U}$ в лабиринте $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0} = (V, \tilde{\Gamma})$ является последовательность $\pi_n = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$, $v_{i_1} = v_{i_n} = v_0$; t -й шаг работы алгоритма ($t \geq 1$) будем считать шагом углубления, если $(v_{i_t}, v_{i_{t+1}}) \in \tilde{\Gamma}$ (п.2, 1; п.3, 1) или шагом возвращения, если $(v_{i_t}, v_{i_{t+1}}) \notin \tilde{\Gamma}$, но $(v_{i_{t+1}}, v_{i_t}) \in \tilde{\Gamma}$ (п.2, 2; п.3, 2).

Нетрудно видеть, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Алгоритм $\mathcal{U}$ таков, что для любого лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0} = (V, \tilde{\Gamma})$, $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0} \in \mathcal{L}(\mathbf{D})$, имеет место равенство

$$\bigcup_{l=1}^n \{v_{i_l}\} = V.$$

Исходя из алгоритма $\mathcal{U}$, рассмотрим алгоритм $\tilde{\mathcal{U}}$, полагая, что вершины лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0}$ могут быть дополнительно нагружены символами из E_2 ; в начальный момент отметки всех вершин равны нулю; в процессе работы алгоритм $\tilde{\mathcal{U}}$ расставляет отметки в вершинах лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0}$ по следующему правилу: отметку начальной вершины v_0 алгоритм $\tilde{\mathcal{U}}$ оставляет равной нулю; если вершина v_{i_t} ($t \geq 2$) не является компонентой последовательности π_{t-1} , т.е. впервые встретилась на шаге углубления алгоритма $\mathcal{U}$, то алгоритм $\tilde{\mathcal{U}}$ помечает ее единицей в случае, когда дуга $(v_{i_{t-1}}, v_{i_t})$ вертикальна, и оставляет ее отметку равной нулю в случае, когда дуга $(v_{i_{t-1}}, v_{i_t})$ горизонтальна. Результатом работы алгоритма $\tilde{\mathcal{U}}$ в лабиринте $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0}$ является последовательность $\tilde{\pi}_n = ((v_{i_1}, w_{i_1}), \dots, (v_{i_n}, w_{i_n}))$, такая, что $v_{i_1} = v_{i_n} = v_0$, $w_{i_1} = w_{i_n} = 0$; для любого $t \geq 2$ w_{i_t} — отметка вершины v_{i_t} , которой алгоритм $\tilde{\mathcal{U}}$ помечает вершину v_{i_t} на t -м шаге своей работы.

Непосредственно из определения алгоритмов $\mathcal{U}$ и $\tilde{\mathcal{U}}$ следует справедливость следующих утверждений.

Лемма 2.

- (1) Пусть $t \in \{2, \dots, n-1\}$. Пусть $(v_{i_{t-1}}, v_{i_t}) \in \tilde{\Gamma}$, т.е. $(t-1)$ -й шаг работы есть шаг углубления алгоритма $\tilde{\mathcal{U}}$. Пусть для любого $j \in \{1, \dots, t-1\}$ $v_{i_j} \neq v_{i_t}$. Тогда
 - (а) если дуга $(v_{i_{t-1}}, v_{i_t})$ горизонтальна, то $w_{i_t} = 0$;
 - (б) если дуга $(v_{i_{t-1}}, v_{i_t})$ вертикальна, то $w_{i_t} = 1$;
- (2) пусть $l \in \{t+2, \dots, n-1\}$ и $v_{i_l} = v_{i_t}$. Тогда, если $w_{i_t} = 1$, то $w_{i_l} = 1$;
- (3) пусть $t \in \{2, \dots, n-1\}$, $(v_{i_{t-1}}, v_{i_t}) \in \tilde{\Gamma}$, $(v_{i_t}, v_{i_{t+1}}) \in \tilde{\Gamma}$, дуга $(v_{i_t}, v_{i_{t+1}})$ вертикальна. Неравенства $v_{i_t} \neq v_{i_{t+1}}, \dots, v_{i_{t-1}} \neq v_{i_t}$ одновременно имеют место тогда и только тогда, когда на $(t-1)$ -м шаге работы алгоритма $\tilde{\mathcal{U}}$ отметки вершин v_{i_t} и $v_{i_{t+1}}$ — нули.

Следствие 1. В каждом вертикальном ориентированном цикле лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0}$ алгоритм $\tilde{\mathcal{U}}$ все вершины, кроме одной, помечает символом 1; символом 0 остается помеченной либо вершина v_0 , либо вершина, через которую алгоритм $\tilde{\mathcal{U}}$ впервые попадает в этот цикл.

Лемма 3. Пусть $t \geq 2$, $(v_{i_{t-1}}, v_t) \in \tilde{\Gamma}$, т.е. $(t-1)$ -й шаг работы алгоритма $\mathcal{U}$ является шагом углубления. Имеет место следующее:

- (1) дуга $(v_{i_{t-1}}, v_i)$ вертикальна. Тогда существует $v \in V$ такое, что $(v_i, v) \in \tilde{\Gamma}$, (v_i, v) вертикальна; при этом, если отметка вершины v есть ноль, то $w_{i_t} = 1$, $v_{i_{t+1}} = v$, если отметка вершины v есть единица, то $w_{i_t} = 0$, $v_{i_{t+1}}$ (см. п.2, 1, 2) описания работы алгоритма $\mathcal{U}$, а также п.1а и п.3 леммы 2);
- (2) дуга $(v_{i_{t-1}}, v_i)$ горизонтальна и существует вертикальная дуга $(v_i, v) \in \tilde{\Gamma}$. Пусть $v' \in V$ таково, что $(v', v_i) \in \tilde{\Gamma}$, дуга (v, v_i) вертикальна. Тогда, если отметка вершины v есть ноль, то $w_{i_t} = 0$, $v_{i_{t+1}} = v$, если отметка вершины v есть единица и отметка вершины v_i есть единица, то $v_{i_{t+1}} = v'$, если отметка вершины v есть единица, а отметка вершины v_i на $(t-1)$ -м шаге работы алгоритма $\mathcal{U}$ есть ноль, $v_i \neq v_0$, то $w_{i_t} = 0$, $v_{i_{t+1}} = v_{i_{t-1}}$, если $v_i = v_0$, то алгоритм $\mathcal{U}$ прекращает свою работу. (см. п.2 и 3 описания работы алгоритма $\mathcal{U}$, а также п.1а и 3 леммы 2);
- (3) дуга $(v_{i_{t-1}}, v_i)$ горизонтальна и не существует вертикальной дуги, выходящей из v_i . Тогда существует $v \in V$ такое, что $(v_i, v) \in \tilde{\Gamma}$, (v_i, v) горизонтальна; при этом $w_{i_t} = 0$, $w_{i_{t+1}} = 1$.

Лемма 4. Пусть $t \geq 2$, $(v_{i_{t-1}}, v_i) \notin \tilde{\Gamma}$, но $(v_i, v_{i_{t-1}}) \in \tilde{\Gamma}$, т.е. $(t-1)$ -й шаг работы алгоритма $\mathcal{U}$ является шагом возвращения. Имеет место следующее:

- (1) отметка вершины v_i остается без изменений;
- (2) дуга $v_i, v_{i_{t-1}}$ вертикальна и существует горизонтальная дуга $(v_i, v) \in \tilde{\Gamma}$. Тогда $v_{i_{t+1}} = v$ (см. п.3, 1 в описании работы алгоритма $\mathcal{U}$);
- (3) дуга $(v_i, v_{i_{t-1}})$ вертикальна и не существует горизонтальной дуги, выходящей из v_i . Тогда существует $v \in V$ такое, что $(v, v_i) \in \tilde{\Gamma}$, (v, v_i) вертикальна. В этом случае, если $w_{i_t} = 1$, то $v_{i_{t+1}} = v$, если $w_{i_t} = 0$, то $v_i = v_0$, и алгоритм $\mathcal{U}$ прекращает свою работу (см. п.3, 2) в описании работы алгоритма $\mathcal{U}$);
- (4) дуга горизонтальна и существует вертикальная дуга $(v, v_i) \in \tilde{\Gamma}$. Пусть $v' \in V$ таково, что $(v', v_i) \in \tilde{\Gamma}$, дуга (v', v_i) горизонтальна. Тогда, если $w_{i_t} = 1$, то $v_{i_{t+1}} = v$, если $w_{i_t} = 0$, $v_i \neq v_0$, то $v_{i_{t+1}} = v'$, если $v_i = v_0$, то алгоритм $\mathcal{U}$ прекращает свою работу (см. п.3, 2 в описании работы алгоритма $\mathcal{U}$);
- (5) дуга $(v_i, v_{i_{t-1}})$ горизонтальна и не существует вертикальной дуги, выходящей из v_i . Тогда существует $v \in V$ такое, что $(v, v_i) \in \tilde{\Gamma}$, (v, v_i) горизонтальна, при этом $v_{i_{t+1}} = v$.

Определим для класса $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{D})$ понятие автомата с возвращением. Пусть

$$\tilde{A} = \{(0, b, 2), (0, b, \Lambda), (0, 2, \Lambda), (1, b, 2), (1, b, \Lambda), (1, 2, \Lambda)\},$$

$$\tilde{B} = \{(0, b, 1), (0, 2, 1), (0, b, -1), (0, 2, -1), (1, b, 1), (1, 2, 1), (1, b, -1), (1, 2, -1)\}.$$

Инициальный автомат $\mathcal{A}_{q_0} = (\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{B}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, q_0)$ называется автоматом с возвращением, если для любых $\tilde{a} \in \tilde{A}$, $q \in \tilde{Q}$,

$$\text{Пр}_2(\psi(q, \tilde{a})) \in \{\text{Пр}_2(\tilde{a})\} \cup \{\text{Пр}_3(\tilde{a})\},$$

$\text{Пр}_2(\psi(q, \tilde{a})) \neq \Lambda$; при этом, если $\text{Пр}_1(\tilde{a}) = 1$, то $\text{Пр}_1(\psi(q, \tilde{a})) = 1$.

Функционирование $\mathcal{A}_{q_0}$ в инициальном лабиринте $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0} = (V, \tilde{\Gamma}, \tilde{\mathcal{L}}_{v_0} \in \mathcal{L}(\mathbf{D})$ будем интерпретировать следующим образом. Находясь в некоторый момент в вершине v лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0}$ и в состоянии q , автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ получает на вход тройку $\tilde{a} = (w, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ такую, что w — отметка вершины v , $\tilde{\sigma}_1 = b$, если из v исходит вертикальная дуга, $\tilde{\sigma}_2 = 2$, если из v исходит горизонтальная дуга, $\tilde{\sigma}_1 = \Lambda$, $\tilde{\sigma}_2 = \Lambda$, если из v не исходит вертикальная, горизонтальная дуги соответственно. В следующий момент автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ переходит в состояние $\tilde{\varphi}(q, \tilde{a})$ и, если $\psi(q, \tilde{a}) = (w', \tilde{\sigma}, \alpha)$, то автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ пометает вершину v символом w' ($w \leq w'$) и перемещается в смежную с v вершину, двигаясь по входящей в v ($\alpha = -1$) или выходящей из v ($\alpha = 1$) вертикальной ($\tilde{\sigma} = b$) или горизонтальной ($\tilde{\sigma} = 2$) дуге. Таким образом, автомат с возвращением отличается от автомата с одной краской тем, что он может перемещаться как вдоль направлений дуг, так и против.

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в случае автомата с одной краской, можно ввести понятия поведения автомата с возвращением $\mathcal{A}_{q_0}$ в лабиринте $\tilde{\mathcal{L}}_{v_0} \in \mathcal{L}(\mathbf{D})$, обхода и сильного обхода автоматами с возвращением лабиринтов из $\mathcal{L}(\mathbf{D})$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 5. *Существует автомат с возвращением, сильно обходящий любой лабиринт из $\mathcal{L}(\mathbf{D})$.*

3. Доказательство леммы 5 и теоремы 1

Доказательство леммы 5. Автомат $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$, сильно обходящий любой лабиринт из класса $\mathcal{L}(\mathbf{D})$ будем строить в соответствии с п.1, 2, 3 леммы 3 и п.2, 3, 4, 5 леммы 4. Пусть

$$\tilde{\mathcal{A}}_{q_0} = (\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{B}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, q_0),$$

где $\tilde{Q} = \{q_0, q_1, \dots, q_{12}\}$. Пусть $w \in E_2$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_w &= \{(w, b, 2), (w, b, \Lambda), (w, \Lambda, 2)\}, & \tilde{A}_{w,b,2} &= \{(w, b, 2)\}, \\ \tilde{A}_{w,b} &= \{(w, b, 2), (w, b, \Lambda)\}, & \tilde{A}_{w,2} &= \{(w, b, 2), (w, \Lambda, 2)\}. \end{aligned}$$

Функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ автомата $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$ определим следующим образом:

- (1) перевод автомата $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$ в вершину, из которой выходит вертикальная дуга.

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{w,2}$, но $\tilde{a} \notin \tilde{A}_{w,b}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(q_0, \tilde{a}) &= q_1, \\ \tilde{\psi}(q_0, \tilde{a}) &= (w, 2, 1), \\ \tilde{\varphi}(q_1, \tilde{a}) &= q_1, \\ \tilde{\psi}(q_1, \tilde{a}) &= (w, 2, 1). \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{w,b}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(q_0, \tilde{a}) &= \bar{\varphi}(q_1, \tilde{a}) = q_2, \\ \tilde{\psi}(q_0, \tilde{a}) &= \tilde{\psi}(q_1, \tilde{a}) = (w, b, 1), \\ \bar{\varphi}(q_2, \tilde{a}) &= q_3, \\ \tilde{\psi}(q_2, \tilde{a}) &= (w, b, -1);\end{aligned}$$

(2) углубление по вертикали (п.1 леммы 3). Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{0,b}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(q_3, \tilde{a}) &= q_4, \\ \tilde{\psi}(q_3, \tilde{a}) &= (0, b, 1), \\ \bar{\varphi}(q_4, \tilde{a}) &= q_5, \\ \tilde{\psi}(q_4, \tilde{a}) &= (1, b, 1).\end{aligned}$$

Пусть $w \in E_2$, $\tilde{a} \in \tilde{A}_{w,b}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(q_5, \tilde{a}) &= q_6, \\ \tilde{\psi}(q_5, \tilde{a}) &= (w, b, 1).\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{0,b}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(q_6, \tilde{a}) &= q_7, \\ \tilde{\psi}(q_6, \tilde{a}) &= (0, b, -1), \\ \bar{\varphi}(q_7, \tilde{a}) &= q_5, \\ \tilde{\psi}(q_7, \tilde{a}) &= (1, b, 1).\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{1,b}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(q_6, \tilde{a}) &= q_8, \\ \tilde{\psi}(q_6, \tilde{a}) &= (1, b, -1).\end{aligned}$$

q_3 — состояние входа в вертикальный ориентированный цикл.

(3) возвращение по вертикали (п.2 и 3 леммы 4).

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{w,b}$, но $\tilde{a} \notin \tilde{A}_{w,2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(q_8, \tilde{a}) &= q_8, \\ \tilde{\psi}(q_8, \tilde{a}) &= (w, b, -1).\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{w,b,2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(q_8, \tilde{a}) &= q_9, \\ \tilde{\psi}(q_8, \tilde{a}) &= (w, 2, 1).\end{aligned}$$

q_9 — состояние углубления по горизонтали.

(4) углубление по горизонтали (п.2 и 3 леммы 3).

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{0,2}$, но $\tilde{a} \in \tilde{A}_{0,b}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(q_9, \tilde{a}) &= q_9, \\ \tilde{\psi}(q_9, \tilde{a}) &= (0, 2, 1).\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{1,b,2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(q_9, \tilde{a}) &= q_8, \\ \tilde{\psi}(q_9, \tilde{a}) &= (1, 2, -1).\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{0,b,2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(q_9, \tilde{a}) &= q_{10}, \\ \tilde{\psi}(q_9, \tilde{a}) &= (0, b, 1).\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{0,b}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(q_{10}, \tilde{a}) &= q_3, \\ \tilde{\psi}(q_{10}, \tilde{a}) &= (0, b, -1).\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{1,b}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(q_{10}, \tilde{a}) &= q_{11}, \\ \tilde{\psi}(q_{11}, \tilde{a}) &= (1, b, -1).\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{0,b,2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(q_{11}, \tilde{a}) &= q_{12}, \\ \tilde{\psi}(q_{11}, \tilde{a}) &= (0, 2, -1);\end{aligned}$$

(5) возвращение по горизонтали (п.4 и 5 леммы 4)

Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}_{0,2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(q_{12}, \tilde{a}) &= q_{12}, \\ \tilde{\psi}(q_{12}, \tilde{a}) &= (0, 2, -1).\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что траектория автомата $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$, т.е. последовательность вершин, по которым он перемещается, будет содержать в себе последовательность π_n . Заметим, что траектория автомата $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$ бесконечна, т.е. автомат $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$ в процессе своих перемещений по лабиринту, вообще говоря, не останавливается. Кроме того, автомат $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$ частичный. Однако, как легко видеть, его можно доопределить так, что его траектория при этом не изменится.

Доказательство теоремы 1. Автомат с одной краской $\mathcal{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, сильно обходящий любой прямоугольный лабиринт определим исходя из построенного в лемме 5 автомат с возвращением $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0} = (\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{B}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, q_0)$. Элементам входного алфавита A автомата $\mathcal{A}_{q_0}$ поставим в соответствие элементы входного алфавита $\tilde{A}$ автомата $\tilde{\mathcal{A}}$. Для этого определим отражение $\Phi: a \rightarrow \tilde{A}$. Пусть $w \in E_2$, $a = (w, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ — произвольный элемент A . Тогда

$$\Phi(a) = (w, b, 2), \text{ если } \{\sigma_1, \sigma_3\} \neq \{\Lambda\}, \{\sigma_2, \sigma_4\} \neq \{\Lambda\};$$

$$\Phi(a) = (w, b, \Lambda), \text{ если } \{\sigma_1, \sigma_3\} = \{\Lambda\};$$

$$\Phi(a) = (w, 2, \Lambda), \text{ если } \{\sigma_2, \sigma_4\} = \{\Lambda\}.$$

Определим подалфавиты A_e, A_n, A_w, A_s алфавита A , полагая $a \in A_e$, если $\sigma_1 = e$, $a \in A_n$, если $\sigma_2 = n$, $a \in A_w$, если $\sigma_3 = w$, $a \in A_s$, если $\sigma_4 = s$.

Определим множество Q состояний автомата $\mathcal{A}_{q_0}$, а также функции φ и ψ . Множество Q содержит в себе множество $\tilde{Q}$. Кроме того, для любых i, j из множества $\{0, 1, \dots, 12\}$, $\sigma \in \{e, n, w, s\}$ в Q содержатся состояния, которых в множестве $\tilde{Q}$ нет.

Пусть $i \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $w \in E_2$, $a = (w, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$. Пусть

$$\tilde{\psi}(q_i, \Phi(a)) = (w, \tilde{\sigma}, \alpha), \quad \alpha \in \{1, -1\},$$

$$\tilde{\varphi}(q_i, \Phi(a)) = q_j, \quad 0 \leq j \leq 12.$$

Имеет место следующее.

- (1) Пусть либо $\tilde{\sigma} = 2, \alpha = 1, \sigma_1 = e$, либо $\tilde{\sigma} = 2, \alpha = -1, \sigma_3 = w$, либо $\tilde{\sigma} = b, \alpha = 1, \sigma_2 = n$, либо $\tilde{\sigma} = b, \alpha = -1, \sigma_4 = s$, т.е. автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ находится во внутренней вершине максимальной вертикали или максимальной горизонтали прямолинейного лабиринта. Тогда соответственно $\text{Пр}_2(\psi(q_i, a)) = e$, $\text{Пр}_2(\psi(q_i, a)) = w$, $\text{Пр}_2(\psi(q_i, a)) = n$, $\text{Пр}_2(\psi(q_i, a)) = s$; при этом $\text{Пр}_1(\psi(q_i, a)) = \text{Пр}_1(\tilde{\psi}(q_i, \Phi(a)))$, $\varphi(q_i, a) = q$.
- (2) Пусть либо $\tilde{\sigma} = 2, \alpha = 1$, но $\sigma_1 = \Lambda$, либо $\tilde{\sigma} = 2, \alpha = -1$, но $\sigma_3 = \Lambda$, либо $\tilde{\sigma} = b, \alpha = 1$, но $\sigma_2 = \Lambda$, либо $\tilde{\sigma} = b, \alpha = -1$, но $\sigma_4 = \Lambda$. Это означает, соответственно, что автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ находится в крайней правой вершине максимальной горизонтали, в крайней левой вершине максимальной горизонтали, в крайней верхней вершине максимальной вертикали, в крайней нижней вершине максимальной вертикали прямоугольного лабиринта. Пусть, например, $\tilde{\sigma} = 2, \alpha = 1, \sigma_1 = \Lambda$. Тогда

$$\varphi(q_i, a) = q_{i,j}^w, \quad \psi(q_i, a) = (\text{Пр}_1(\tilde{\psi}(q_i, a)), w)$$

для любого $a \in A_w$,

$$\varphi(q_{i,j}^w, a) = q_{i,j}^w, \quad \psi(q_{i,j}^w, a) = (\text{Пр}_1(a), w)$$

для любого $a \notin A_w$,

$$\varphi(q_{i,j}^w, a) = \tilde{q}_{i,j}^w, \quad \psi(q_{i,j}^w, a) = (\text{Пр}_1(a), e),$$

для любого $a \in A_w$,

$$\varphi(\tilde{q}_{i,j}^w, a) = q_j, \quad \psi(\tilde{q}_{i,j}^w, a) = (\text{Пр}_1(a), w).$$

Совершенно аналогично рассматриваются остальные случаи; при этом используются группы состояний $q_{i,j}^e, q_{i,j}^s, q_{i,j}^n$ ($i, j \in \{0, 1, \dots, 12\}$).

Нетрудно видеть, что автомат с одной краской $\mathcal{A}_{q_0}$ для любого прямоугольного лабиринта $\mathcal{L} = (V, \Gamma)$ моделирует поведение автомата с возвращением $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$ в лабиринте $\tilde{\mathcal{L}} = (V, \Gamma)$, который однозначно определяется по лабиринту $\mathcal{L}$. Так как множества вершин в лабиринтах $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ совпадают, а автомат $\tilde{\mathcal{A}}_{q_0}$ проходит через все вершины лабиринта $\tilde{\mathcal{L}}$, то и автомат $\mathcal{A}_{q_0}$ пройдет через все эти вершины. Так же, как и автомат $\tilde{\mathcal{A}}_q$, автомат $\mathcal{A}$ частичный. Легко видеть, однако, что этот автомат можно доопределить так, что его поведение в любом прямоугольном лабиринте не изменится. Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. Budach L. Automata and labyrinths. *Math. Nachrichten* (1978) **86**, 195–282.
2. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
3. Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах. *Дискретная математика* (1992) **4**, № 3, 3–28.
4. Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха–Подколзина. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 135–146.
5. Зыричев А. Н. О синтезе автомата, обходящего плоские лабиринты с ограниченными дырами. *Дискретная математика* (1991) **3**, №1, 105–113.
6. Золотых А. А. Обход лабиринтов с ограниченными в фиксированных направлениях дырами. *Дискретная математика* (1993) **5**, № 1, 59–69.

Статья поступила 23.10.96.