Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Вероятности вырождения ограниченных снизу докритических многотипных ветвящихся процессов, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:29:19

Вероятности вырождения ограниченных снизу докритических многотипных ветвящихся процессов

© 1997 г. Б. А. Севастьянов

Первоначальный многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона

$$\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_m(t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

порождает ограниченный снизу ветвящийся процесс, если при попадании $\mu(t)$ в некоторое конечное множество S процесс останавливается. Изучается ограниченный снизу докритический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ с типами частиц $T_1, \dots, T_m$, поглощающие состояния которого образуют множество $S = \{0, e(j_1), \dots, e(j_{m_1})\}$, где $e(j) = (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jm})$, $1 \leq m_1 \leq m$, и 0 — нулевой вектор. Показано, что вероятность

$$q_j^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = e(j) \mid \xi(0) = n\},$$

где $n = (n_1, \dots, n_m)$ при $\bar{n} = n_1 + \dots + n_m \rightarrow \infty$, $n_i/\bar{n} \rightarrow a_i$, асимптотически сближается с функцией, периодической с периодом 1 относительно $\log_{1/R} \bar{n}$, $R < 1$ — перронов корень матрицы математических ожиданий первоначального ветвящегося процесса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-00338, и INTAS-RFBR 95-0099.

В этой работе рассматривается ограниченный снизу ветвящийся процесс с несколькими типами частиц, который является некоторой модификацией многотипного ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. Обозначим $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ множество неотрицательных целых чисел. Буквами n, k, μ, ξ и другими будем обозначать m -мерные векторы. Обозначение 0 будет использоваться и как m -мерный вектор и как числовой нуль. В дальнейшем будем использовать обозначения

$$a^b = a_1^{b_1} \dots a_m^{b_m},$$

где $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, и

$$e(j) = (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jm}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Положим

$$\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_m(t)), \quad \mu_i(t) \in N_0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\mu_i(t)$ — число частиц типа T_i в t -м поколении ветвящегося процесса с типами частиц $T_1, T_2, \dots, T_m$ и с дискретным временем $t = 0, 1, 2, \dots$. Производящие функции этого процесса

$$h_i(s_1, \dots, s_m) = h_i(s) = \mathbf{M}\{s^{\mu(1)} \mid \mu(0) = e(i)\},$$

где $s = (s_1, \dots, s_m)$, $i = 1, \dots, m$, будем записывать в векторной форме

$$h(s) = (h_1(s), \dots, h_m(s)).$$

В силу условия независимости размножения частиц ветвящегося процесса, производящая функция чисел частиц $\mu(1) = (\mu_1(1), \dots, \mu_m(1))$ типов $T_1, \dots, T_m$ в первом поколении ветвящегося процесса, начинающегося с совокупности частиц $\mu(0) = n \in N_0^m$, равна

$$h^n(s) = h_1^{n_1}(s) \dots h_m^{n_m}(s) = \mathbf{M}\{s^{\mu(1)} \mid \mu(0) = n\}.$$

Разлагая $h^n(s)$ в ряд, получаем, что

$$h^n(s) = \sum_{k \in N_0^m} p(n, k) s^k, \quad (1)$$

где $p(n, k)$ — вероятность того, что совокупность первоначальных частиц $\mu(0) = n$, определяющаяся вектором $n \in N_0^m$, превращается в первом поколении в совокупность частиц $\mu(1) = k$.

Зафиксируем подмножество $S \subset N_0^m$, состоящее из векторов

$$S = \{0, e(j_1), e(j_2), \dots, e(j_m)\}, \quad 1 \leq m_1 \leq m.$$

Ограниченным снизу, или S -ограниченным ветвящимся процессом назовем процесс $\xi(t)$, определяемый для $t = 0, 1, 2, \dots$ равенствами

$$\xi(t) = \begin{cases} \mu(t), & \text{если для всех } v, 0 \leq v < t, \mu(v) \notin S, \\ \mu(u), & \text{если для всех } v, 0 \leq v < u, \mu(v) \notin S, \mu(u) \in S, u < t. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, для S -ограниченного ветвящегося процесса $\xi(t)$ точки множества S являются состояниями поглощения, в то время как первоначальный процесс $\mu(t)$ имел только одну точку поглощения 0. Поэтому в отличие от процесса $\mu(t)$ в S -ограниченном ветвящемся процессе $\xi(t)$ размножения отдельных частиц в t -ом поколении независимы только в том случае, когда $\xi(t) \notin S$. В дальнейшем для удобства будем полагать

$$S = \{0, e(1), e(2), \dots, e(m_1)\},$$

что не ограничивает общности результата.

Вероятности вырождения к моменту времени t

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)),$$

где

$$\lambda_i(t) = \mathbf{P}\{\mu(t) = 0 \mid \mu(0) = e(i)\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

ветвящегося процесса $\mu(t)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\lambda(t+1) = h(\lambda(t)), \quad \lambda(0) = 0,$$

и $\lambda(t+1) \geq \lambda(t)$ покомпонентно (см. [1]).

Обозначим

$$q_j^n(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = e(j) \mid \xi(0) = n\}$$

вероятность вырождения S -ограниченного ветвящегося процесса $\xi(t)$ в состоянии $e(j) \in S$ к моменту времени t .

Теорема 1. Для любых $n \notin S$, $e(j) \in S$, $t \geq 1$ имеет место представление

$$q_j^n(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^t c_{ij}(t, l) \lambda^n(l) \frac{n_i}{\lambda_i(l)}, \quad (3)$$

где коэффициенты $c_{ij}(t, l)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$c_{ij}(t+1, l+1) = \sum_{\alpha=1}^m g_{i\alpha}(l+1) c_{\alpha j}(t, l), \quad (4)$$

$$c_{ij}(t+1, 1) = g_{ij}(1) - \sum_{e(\alpha) \in S} g_{i\alpha}(1) \sum_{l=1}^t c_{\alpha j}(t, l), \quad (5)$$

$$g_{ij}(l) = \left. \frac{\partial h_i(s)}{\partial s_j} \right|_{s=\lambda(l-1)}, \quad t \geq l \geq 1, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Доказательство. Так как

$$q_j^n(1) = p(n, e(j)) = \sum_{i=1}^m \lambda^n(1) \frac{n_i g_{ij}(1)}{\lambda_i(1)}, \quad (6)$$

представление (3) для $t = 1$ имеет место при $c_{ij}(1, 1) = g_{ij}(1)$. Предположим, что при некотором t имеет место формула (3). По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} q_j^n(t+1) &= \sum_{k \notin S} p(n, k) q_j^k(t) + p(n, e(j)) \\ &= \sum_{k \in N_0^m} p(n, k) \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^t c_{ij}(t, l) \lambda^k(l) \frac{k_i}{\lambda_i(l)} \\ &\quad + p(n, e(j)) - \sum_{e(\alpha) \in S} p(n, e(\alpha)) \sum_{l=1}^t c_{\alpha j}(t, l). \end{aligned} \quad (7)$$

Из равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N_0^m} p(n, k) \lambda^k(l) \frac{n_\beta}{\lambda_\beta(l)} &= \sum_{\alpha=1}^m \frac{h^n(\lambda(l)) n_\alpha}{h_\alpha(\lambda(l))} \left. \frac{\partial h_\alpha(s)}{\partial s_\beta} \right|_{s=\lambda(l)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \frac{\lambda^n(l+1)}{\lambda_\alpha(l+1)} n_\alpha g_{\alpha\beta}(l+1) \end{aligned}$$

следуют равенства (4). Заменяя в (7) вероятности $p(n, e(\alpha))$ их выражениями по формуле (6), получаем равенства (5).

Теорема доказана.

Обозначим $\mathbf{G}(l) = \|g_{ij}(l)\|$ квадратные $m \times m$ матрицы с элементами $g_{ij}(l)$, определенными в теореме 1, и пусть

$$\mathbf{C}(t, l) = \|c_{ij}(t, l)\|, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m_1,$$

— прямоугольная $m \times m_1$ матрица с m строками и m_1 столбцами, где $c_{ij}(t, l)$ также определены в теореме 1. Пусть $\tilde{\mathbf{G}}(l) = \|g_{ij}(l)\|$ — прямоугольная $m \times m_1$ подматрица $\mathbf{G}(l)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m_1$. Положим

$$\mathbf{F}(l) = \mathbf{G}(l)\mathbf{G}(l-1) \dots \mathbf{G}(2).$$

В этих обозначениях из формул (4) и (5) следуют матричные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t, l) &= \mathbf{F}(l)\mathbf{C}(t-l+1, 1) \\ \mathbf{C}(t+1, 1) &= \tilde{\mathbf{G}}(1) - \tilde{\mathbf{G}}(1) \sum_{l=1}^t \tilde{\mathbf{F}}(l)\mathbf{C}(t-l+1, 1), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\tilde{\mathbf{F}}(l)$ — прямоугольная $m_1 \times m$ подматрица матрицы $\mathbf{F}(l)$ с m_1 строками и m столбцами.

Далее будем предполагать, что выполняется следующее условие А: процесс $\mu(t)$ есть неразложимый докритический ветвящийся процесс и для всех i, j , $1 \leq i, j \leq m$,

$$\left. \frac{\partial h_i(s)}{\partial s_j} \right|_{s=0} > 0.$$

При условии А математические ожидания $A_{ij} = \mathbf{M}\{\mu_j(1) \mid \mu(0) = e(i)\}$ конечны, матрица математических ожиданий $\mathbf{A} = \|A_{ij}\|$ неразложима, а ее перронов корень $R < 1$. При этом $\mathbf{A}^t = \|A_{ij}(t)\|$, где при $t \rightarrow \infty$

$$A_{ij}(t) = \mathbf{M}\{\mu_j(t) \mid \mu(0) = e(i)\} = d_{ij}R^t(1 + o(1)), \quad (9)$$

и $d_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, m$.

Теорема 2. При условии А предельные вероятности вырождения

$$q_j^n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_j^n(t),$$

для всех $n \notin S$, $e(j) \in S$ представимы в виде ряда

$$q_j^n = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{\infty} c_{ij}(l) \lambda^n(l) \frac{n_i}{\lambda_i(l)}, \quad (10)$$

где

$$c_{ij}(l) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_{ij}(t, l), \quad l \geq 2,$$

— элементы $m \times m_1$ матрицы $\mathbf{C}(l) = \mathbf{G}(l)\mathbf{C}(1)$ и $\mathbf{C}(1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{C}(t, l)$.

Доказательство. В силу монотонности $q_j^n(t) \leq q_j^n(t+1) \leq 1$ существует предел $q_j^n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_j^n(t)$. Для того чтобы показать, что в (3) можно перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$, докажем сначала, что существуют пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} c_{ij}(t, 1) = c_{ij}(1)$. Обозначим $\nu_j(n)$ момент вырождения процесса $\xi(t)$ в состоянии $e(j) \in S$ при условии, что $\xi(0) = n$. Положим

$$p(n, k; t) = \mathbf{P}\{\mu(t) = k \mid \mu(0) = n\},$$

$$\tilde{p}(n, e(j); t) = \mathbf{P}\{\mu(1) \notin S, \mu(2) \notin S, \dots, \mu(t-1) \notin S, \mu(t) = e(j) \mid \mu(0) = n\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu_j(n) = r\} = \tilde{p}(n, e(j); r),$$

$$q_j^n(t) = \mathbf{P}\{\nu_j(n) \leq t\} = p(n, e(j)) + \sum_{r=2}^t \tilde{p}(n, e(j); r). \quad (11)$$

Так как

$$\begin{aligned} \tilde{p}(n, e(j); r) &= \sum_{k(1) \notin S, \dots, k(r-1) \notin S} p(n, k(1))p(k(1), k(2)) \dots p(k(r-1), e(j)) \\ &= \sum_{k(2) \notin S} p(n, k(2); 2)\tilde{p}(k(2), e(j); r-2) - \sum_{e(\alpha) \in S} p(n, e(\alpha))\tilde{p}(e(\alpha), e(j); r-1), \end{aligned}$$

из (6) и (11) следует, что

$$c_{ij}(t, 1) = g_{ij}(1) - \sum_{e(\alpha) \in S} g_{i\alpha}(1) \sum_{r=2}^t \tilde{p}(e(\alpha), e(j); r-1).$$

Поскольку при $r \rightarrow \infty$

$$\tilde{p}(e(i), e(j); r) \leq p(e(i), e(j); r) \leq A_{ij}(r) = d_{ij}R^r(1 + o(1)),$$

ряд

$$\sum_{r=2}^{\infty} \tilde{p}(e(\alpha), e(j); r)$$

сходится при всех $e(\alpha), e(j) \in S$, и поэтому существуют конечные пределы

$$c_{ij}(1) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_{ij}(t, 1), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m_1.$$

Отсюда и из формулы (8) следует существование пределов $c_{ij}(l) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_{ij}(t, l)$. Так как $\mathbf{F}(l) \leq \mathbf{A}^{l-1}$, то $c_{ij}(l) = O(R^l)$ и $c_{ij}(t, l) = O(R^l)$, и поэтому ряд (10) сходится и формула (10) справедлива.

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что

$$q_0^n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_0^n(t) = 1 - \sum_{e_j \in S} q_j^n.$$

Далее мы будем рассматривать ветвящиеся процессы, удовлетворяющие дополнительному условию В:
для любых $i, j = 1, 2, \dots, m$

$$\mathbf{M}\{\mu_j(1) \log \mu_j(1) \mid \mu(0) = e(i)\}$$

конечны.

Если выполнены условия А и В, то (см. [2]) при $l \rightarrow \infty$

$$1 - \lambda_j(l) = K_j R^l (1 + o(1)), \quad K_j > 0, \quad (12)$$

и

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{F}^l}{R^l} = \mathbf{B} = \|b_{ij}\| > 0. \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия А, В и

$$\lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \frac{n_i}{\bar{n}} = a_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$n = (n_1, \dots, n_m), \quad \bar{n} = n_1 + \dots + n_m, \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

В этом случае при $\bar{n} \rightarrow \infty$ для любого $e(j) \in S$

$$q_j^n - d_j(a) H_a(\log_R \bar{n}) \rightarrow 0, \quad (14)$$

где

$$d_j(a) = \sum_{i, \alpha=1}^m a_i b_{i\alpha} c_{\alpha j}(1) > 0,$$

b_{ij} определены в (13), а $H_a(x)$ — периодическая функция с периодом 1, определяемая равенствами

$$H_a(x) = \sum_{L=-\infty}^{\infty} R^{L+x} e^{-K(a)R^{L+x}}, \quad K(a) = \sum_{i=1}^m K_i a_i,$$

константы $K_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, определены в формуле (12).

Доказательство. В условиях теоремы 3 общий член ряда (10) при больших l и $\bar{n} = n_1 + \dots + n_m$ с помощью формул (12) и (13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m c_{ij}(l) \lambda^n(l) \frac{n_i}{\lambda_i(l)} &= \bar{n} \sum_{i, \alpha=1}^m a_i b_{i\alpha} c_{\alpha j}(1) R^l \prod_{\beta=1}^m (1 - K_\beta R^l (1 + o(1)))^{\bar{n}_\beta} (1 + o(1)) \\ &= \bar{n} d_j(a) R^l e^{-\bar{n} K(a) R^l} (1 + o(1)) \\ &= d_j(a) R^{l + \log_R \bar{n}} \exp\{-K(a) R^{l + \log_R \bar{n}}\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (15)$$

Легко видеть, что при любом $l \geq 1$

$$\sum_{i=1}^m c_{ij}(l) \lambda^n(l) \frac{n_i}{\lambda_i(l)} = O(R^{l + \log_R \bar{n}} \exp\{-K(a) R^{l + \log_R \bar{n}}\}). \quad (16)$$

Выберем $L_1 < L_2$ такими, чтобы суммы

$$\sum_{L=L_2}^{\infty} R^L e^{-K(a)R^L}, \quad \sum_{L=-\infty}^{L_1} R^L e^{-K(a)R^L} \quad (17)$$

были малы. Положим

$$l_i + \log_R \bar{n} = L_i + x_{i\bar{n}}, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq x_{i\bar{n}} \leq 1.$$

Из (15), (16) и (17) следует, что L_1 , L_2 и n_0 можно выбрать так, чтобы суммы (17) и хвосты суммы (10) в пределах от l_2 до бесконечности и от единицы до l_1 все вместе при $n \geq n_0$ были бы меньше $\varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Члены ряда (10) с $l, l_1 < l < l_2$, заменяем их асимптотическими выражениями (15), так как при $n \rightarrow \infty$ такие $l \rightarrow \infty$. Всего слагаемых в сумме (10) с индексами $l, l_1 < l < l_2$, конечное число, так как $l_2 - l_1 - 1 = L_2 - L_1 - 1$, поэтому n_0 можно выбрать таким, чтобы для всех $n \geq n_0$ ошибка при этом также была меньше $\varepsilon/2$. Отсюда следует утверждение (14), так как $\varepsilon > 0$ произвольно. Для окончательного доказательства теоремы нам надо доказать, что $d_j(a) > 0$. Этот факт вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. При выполнении условий А и В существует такая константа $\theta > 0$, что при всех $n \notin S$ и $e(j) \in S$

$$q_j^n > \theta. \quad (18)$$

Доказательство. В силу монотонности по t при любом t

$$q_j^n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_j^n(t) \geq q_j^n(t), \quad n = (n_1, \dots, n_m).$$

Пусть $\mu(t)$ — многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, удовлетворяющий условиям А и В. Известно ([2], [3], гл. 6, п. 2), что в этом случае при постоянных $n, k \in N_0^m$, $n \neq 0$, $k \neq 0$, имеет место предельная теорема

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\mu(t) = k \mid \mu(0) = n, \mu(t) \neq 0\} = p_k^*;$$

производящая функция

$$\varphi(s) = \sum_{k \in N_0^m} p_k^* s^k$$

не зависит от n и удовлетворяет функциональному уравнению

$$1 - \varphi(h(s)) = R(1 - \varphi(s)) \quad (19)$$

и равенствам $\varphi(0, \dots, 0) = 0$, $\varphi(1, \dots, 1) = 1$. Продифференцируем обе части равенства (19) по s_j в точке $s = 0$. Получаем равенство

$$Rp_j^* = \sum_{i=1}^m \varphi'_i(\lambda(1)) g_{ij}(1)$$

где

$$\varphi'_i(s) = \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s_i}, \quad p_{e(j)}^* = \varphi'_j(0), \quad \lambda(1) = h(0), \quad g_{ij}(1) = \left. \frac{\partial h_i(s)}{\partial s_j} \right|_{s=0}.$$

Так как $\lambda(1) \neq 0$, найдется такое i , что $\varphi'_i(\lambda(1)) > 0$. По условию А все $g_{ij}(1) > 0$. Отсюда следует, что все $p_{e(j)}^* > 0$.

Разобьем ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $\mu(t)$ на сумму трех независимых процессов Гальтона–Ватсона

$$\mu(t) = \mu'(t) + \mu''(t) + \mu'''(t),$$

где $\mu'(0) = \mu''(0) = e(i)$, $\mu'''(0) = (n_i - 2)e(i)$, $n_i \geq 3$. Такое разбиение начальных частиц можно произвести $n_i(n_i - 1)$ способами. Положим

$$U = \bigcap_{i=1}^3 U_i,$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\mu'(0) = e(i), \mu'(t) = e(j)\}, \\ U_2 &= \{\mu''(0) = e(i), \mu''(t-1) \neq 0, \mu''(t) = 0\}, \\ U_3 &= \{\mu'''(0) = (n_i - 2)e(i), \mu'''(t) = 0\}. \end{aligned}$$

Имеет место неравенство

$$q_j^{n_i e(i)} \geq n_i(n_i - 1) \mathbf{P}\{U \mid \mu'(0) = \mu''(0) = e(i), \mu'''(0) = (n_i - 2)e(i)\}. \quad (20)$$

Далее будем считать, что $n_i \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ так, что $n_i R^t \rightarrow V > 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \lim n_i \mathbf{P}\{U_1 \mid \mu'(0) = e(i)\} &= \lim n_i \mathbf{P}\{\mu'(t) \neq 0 \mid \mu'(0) = e(i)\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\mu'(t) = e(j) \mid \mu'(t) \neq 0, \mu'(0) = e(i)\} \\ &= \lim n_i K_i R^t p_{e(j)}^* = K_i V p_{e(i)}^* > 0, \\ \lim (n_i - 1) \mathbf{P}\{\mu''(t-1) \neq 0, \mu''(t) = 0 \mid \mu''(0) = e(i)\} \\ &= \lim n_i \mathbf{P}\{\mu''(t-1) \neq 0 \mid \mu''(0) = e(i)\} \\ &\quad \times \sum_{k \in N_0^m} \mathbf{P}\{\mu''(t-1) = k \mid \mu''(t-1) \neq 0, \mu''(0) = e(i)\} \lambda^k(1) \\ &= \frac{K_i V}{R} \varphi(\lambda(1)) > 0, \end{aligned}$$

$$\lim \mathbf{P}\{\mu'''(t) = 0 \mid \mu'''(0) = (n_i - 2)e(i)\} = \lim (1 - K_i R^t (1 + o(1)))^{(n_i - 2)} = e^{-K_i V} > 0.$$

Отсюда, с помощью (20) следует, что при достаточно больших n справедливо неравенство (18). Справедливость неравенства (18) для любого конечного числа n устанавливается просто.

Лемма доказана.

Соответствующий результат при $m = 1$ был доказан в [3]. Ограниченные снизу ветвящиеся процессы с непрерывным временем и с одним типом частиц рассматривались также в [4].

Список литературы

1. Севастьянов Б. А. *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
2. Kesten H., Stigum B. P. A limit theorem for multidimensional Galton–Watson processes. *Ann. Math. Statistics* (1966) **37**, 1211–1223.
3. Севастьянов Б. А. Вероятности вырождения ограниченных снизу ветвящихся процессов. *Теория вероятностей и ее применения* (1995) **40**, 556–564.
4. Севастьянов Б. А. Ограниченные снизу ветвящиеся процессы. *Докл. АН СССР* (1978) **238**, 511–513.

Статья поступила 18.12.96.