Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Омелянов, Оценки констант Камерона–Эрдеша,
Дискрет. матем., 2006, том 18, выпуск 2, 55–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm46>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:51:53

Оценки констант Камерона–Эрдеша

© 2006 г. К. Г. Омелянов

Множество B целых чисел называется свободным от сумм, если для любых $a, b \in B$ число $a + b$ не принадлежит множеству B . Обозначим через $s(n)$ число множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел $[1, n]$. Из работ П. Камерона, П. Эрдеша и А. А. Сапоженко известно, что существуют константы c_0 и c_1 такие, что $s(n) \sim (c_0 + 1)2^{\lceil n/2 \rceil}$ для четных n и $s(n) \sim (c_1 + 1)2^{\lceil n/2 \rceil}$ для нечетных n . Естественно называть c_0 и c_1 константами Камерона–Эрдеша. В статье получены верхние и нижние оценки констант Камерона–Эрдеша, позволяющие определить первые два десятичных знака их точного значения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04–01–00359.

Множество B целых чисел называется свободным от сумм (сокращенно МСС), если для любых $a, b \in B$ число $a + b$ не принадлежит множеству B . Для любых натуральных чисел a и b обозначим через $[a, b]$ множество натуральных чисел x таких, что $a \leq x \leq b$. Через $S(t, n)$ обозначим семейство всех множеств $B \subseteq [t, n]$, свободных от сумм. Пусть $s(t, n) = |S(t, n)|$, а $s(n) = |S(1, n)|$. П. Камерон и П. Эрдеш [1] предположили, что $s(n) = O(2^{n/2})$. Они доказали, что $s(n/3, n) = O(2^{n/2})$ и, кроме того, что существуют константы c_0 и c_1 такие, что $s(n/3, n) \sim c_0 2^{\lceil n/2 \rceil}$ для четных n и $s(n/3, n) \sim c_1 2^{\lceil n/2 \rceil}$ для нечетных n . Будем называть c_0 и c_1 константами Камерона–Эрдеша. Н. Алон [3] и Н. Калкин [4] доказали, что $\log s(n) \leq (n/2)(1 + o(1))$ (здесь и далее $\log m = \log_2 m$). В. Лев, Т. Лучак, Т. Шон [5] и А. А. Сапоженко [6] получили асимптотику для числа множеств, свободных от сумм в абелевых группах четного порядка. В [7] доказано, что $s(n/4, n) = O(2^{n/2})$. В [8] доказано, что $s(q, n) = O(2^{n/2})$ при $q \geq n^{3/4} \sqrt{\log n}$. Гипотеза Камерона–Эрдеша была доказана независимо Б. Грином [9] и А. А. Сапоженко [2] в 2003 г. Пусть $S^1(n)$ — семейство всех подмножеств множества нечетных чисел отрезка $[1, n]$ и $s^1(n) = |S^1(n)|$.

Теорема 1 ([2]). При $n \rightarrow \infty$

$$s(n) \sim s(n/3, n) + s^1(n). \quad (1)$$

Целью данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Для констант Камерона–Эрдеша справедливы неравенства

$$5,0709 \leq c_0 \leq 5,0995, \quad (2)$$

$$3,8103 \leq c_1 \leq 3,8336. \quad (3)$$

Из (1), [1] и того, что $s^1(n) = 2^{\lceil n/2 \rceil}$, следует, что

$$s(n) \sim \begin{cases} (c_0 + 1)2^{\lceil n/2 \rceil} & \text{при четных } n, \\ (c_1 + 1)2^{\lceil n/2 \rceil} & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Отсюда и из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Справедливы неравенства*

$$6,0709 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \lesssim s(n) \lesssim 6,0995 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \quad (4)$$

при четных n и

$$4,8103 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \lesssim s(n) \lesssim 4,8336 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \quad (5)$$

при нечетных n .

Пусть $A, V \subseteq \mathbb{N}$; графом Кэли $\mathcal{C}_A(V)$ назовем пару (V, E) такую, что $(u, v) \in V \times V$ принадлежит E тогда и только тогда, когда $|u - v| \in A$ или $u + v \in A$. Будем говорить, что множество A порождает граф $\mathcal{C}_A(V)$. Число независимых множеств графа G будем обозначать через $I(G)$. Пусть X, Z — множества целых чисел, тогда

$$X \pm Z = \{x \pm z : x \in X, z \in Z\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$s(\lceil n/2 \rceil, n) = 2^{\lceil n/2 \rceil}.$$

Тогда для получения оценок констант Камерона–Эрдеша достаточно оценить число множеств $B \in S(n/3, n)$, свободных от сумм и имеющих непустое пересечение A с множеством $[\lceil n/3 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor]$. Мы можем оценить число интересующих нас множеств следующим образом. Будем перебирать все подмножества A множества $[\lceil n/3 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor]$ и оценивать мощность семейства

$$S(A) = \{B \in S(n/3, n) : B \cap [\lceil n/3 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor] = A\}.$$

Пусть фиксировано некоторое множество $A \subseteq [\lceil n/3 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor]$ и $a \in A$, тогда никакие два элемента $u, v \in [\lceil n/2 \rceil, n]$ такие, что $|u - v| = a$, не могут одновременно входить ни в одно из множеств семейства $S(A)$. Следовательно,

$$|S(A)| \leq I(\mathcal{C}_A([\lceil n/2 \rceil, n])).$$

Поскольку вычислить $I(\mathcal{C}_A([\lceil n/2 \rceil, n]))$ в общем случае затруднительно, мы будем оценивать число независимых множеств графа $\mathcal{C}_A([\lceil n/2 \rceil, n])$ числом независимых множеств его подграфа $\mathcal{C}_{\{a_1\}}([\lceil n/2 \rceil, n])$ или $\mathcal{C}_{\{a_1, a_2\}}([\lceil n/2 \rceil, n])$, где a_1 — наименьший элемент множества A , а a_2 — следующий за ним. В связи с этим, мы будем рассматривать отдельно семейства множеств

$$\hat{S}(t, n) = \{B \in S(\lfloor n/2 \rfloor - t, n) : \lfloor n/2 \rfloor - t \in B\},$$

где $\lfloor n/2 \rfloor - t$ будет наименьшим элементом множества A .

Заметим, что $A + A \subset [\lceil n/2 \rceil, n]$ и элементы этого множества не входят ни в одно из множеств семейства $S(A)$. Кроме того, мы сведем подсчет числа множеств, свободных от сумм, из $\hat{S}(t, n)$ к вычислению мощности семейства

$$S^+(t, n) = \{B \in \hat{S}(t, n) : n \in B\}.$$

Элементы множества $\{n\} - A$ не войдут ни в одно из множеств семейства $S^+(t, n) \cap S(A)$. Поэтому можно удалить из $\mathcal{C}_{\{a_1\}}([\lceil n/2 \rceil, n])$ ($\mathcal{C}_{\{a_1, a_2\}}([\lceil n/2 \rceil, n])$) вершины, принадлежащие множествам $A + A$, $\{n\} - A$, и оценивать число интересующих нас множеств числом независимых множеств в получившемся графе. При доказательстве теоремы 2 мы будем опираться на следующие утверждения.

Теорема 4 ([10]). Если множество K целых чисел таково, что

$$|K + K| \leq 2|K| - 1 + b,$$

где

$$0 \leq b \leq |K| - 3,$$

то K содержится в арифметической прогрессии длины $|K| + b$.

Теорема 5 ([11]). Пусть $n, t, f \in \mathbb{N}$ и $f < t < n/4$, положим

$$\begin{aligned} A &= \{\lceil n/2 \rceil - t, \lceil n/2 \rceil - f\}, \\ V &= [\lceil n/2 \rceil + 1, \lceil n/2 \rceil + t] \cup [n - t + 1, n]. \end{aligned}$$

Пусть граф $\Gamma_A^m(V)$ получен из графа $\Gamma_A(V)$ удалением произвольных t вершин. Тогда

$$|I(\Gamma_A^m(V))| \leq \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right)^t \left(\frac{2\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right)^f \left(\frac{4}{3 + \sqrt{5}} \right)^m. \quad (6)$$

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$\hat{S}(t, n) = \{B \in S(n/2 - t, n) : n/2 - t \in B\}$$

и $\hat{s}(t, n) = |\hat{S}(t, n)|$. Заметим, что

$$s(n/3, n) = 2^{\lceil n/2 \rceil} + \sum_{t=0}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} \hat{s}(t, n) \quad (7)$$

при $n \equiv 1 \pmod{6}$ и

$$s(n/3, n) = 2^{\lceil n/2 \rceil} + \sum_{t=0}^{\lfloor n/6 \rfloor} \hat{s}(t, n) \quad (8)$$

при остальных значениях n . Положим

$$c_0(\tau) = 2^{\lceil n/2 \rceil} + \sum_{t=0}^{\tau-1} \hat{s}(t, n) \quad (9)$$

для четных n ,

$$c_1(\tau) = 2^{\lceil n/2 \rceil} + \sum_{t=0}^{\tau-1} \hat{s}(t, n) \quad (10)$$

для нечетных n .

Пусть

$$\delta_0(\tau) = \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor} \hat{s}(t, n) \quad (11)$$

для четных n ,

$$\delta_1(\tau) = \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor} \hat{s}(t, n) \quad (12)$$

для нечетных n . Ясно, что

$$c_0(\tau) \lesssim s(n/3, n) \lesssim c_0(\tau) + \delta_0(\tau) \quad (13)$$

при четных n ,

$$c_1(\tau) \lesssim s(n/3, n) \lesssim c_1(\tau) + \delta_1(\tau) \quad (14)$$

при нечетных n . Таким образом, величины $\delta_0(\tau)$ и $\delta_1(\tau)$ дают оценку погрешности при вычислении $s(n/3, n)$.

Пусть

$$\begin{aligned} S^+(t, n) &= \{B \in \hat{S}(t, n) : n \in B\}, & s^+(t, n) &= |S^+(t, n)|, \\ S^-(t, n) &= \{B \in \hat{S}(t, n) : n \notin B\}, & s^-(t, n) &= |S^-(t, n)|. \end{aligned}$$

Соответственно, $\hat{s}(t, n) = s^+(t, n) + s^-(t, n)$. Заметим, что

$$s^-(t, n) = \hat{s}(t-1, n-1) \quad (15)$$

при четных n ,

$$s^-(t, n) = \hat{s}(t, n-1) \quad (16)$$

при нечетных n . Следовательно, при четных n

$$\begin{aligned} \hat{s}(t, n) &= s^+(t, n) + s^-(t, n) = s^+(t, n) + \hat{s}(t-1, n-1) \\ &= s^+(t, n) + s^+(t-1, n-1) + \hat{s}(t-1, n-2). \end{aligned} \quad (17)$$

При нечетных n

$$\begin{aligned} \hat{s}(t, n) &= s^+(t, n) + s^-(t, n) = s^+(t, n) + \hat{s}(t, n-1) \\ &= s^+(t, n) + s^+(t, n-1) + \hat{s}(t-1, n-2). \end{aligned} \quad (18)$$

Докажем, что

$$\hat{s}(t, n) = 2\hat{s}(t, n - 2) \quad (19)$$

при $0 \leq t \leq \lceil n/6 \rceil - 1$. Построим взаимно однозначные отображения φ_0 :

$$[n/2 - t, n/2 + t] \cup [n - 2t, n] \longleftrightarrow [n/2 - t - 1, n/2 + t - 1] \cup [n - 2t - 2, n - 2]$$

при четных n и φ_1 :

$$[\lceil n/2 \rceil - t, \lceil n/2 \rceil + t] \cup [n - 2t - 1, n] \longleftrightarrow [\lceil n/2 \rceil - t - 1, \lceil n/2 \rceil + t - 1] \cup [n - 2t - 3, n - 2]$$

при нечетных n , поставив в соответствие друг другу элементы с одинаковым порядковым номером. При этих отображениях множества, свободные от сумм, переходят в множества, свободные от сумм. Отсюда и из того, что

$$s(n/2 + t + 1, n - 2t - 1) = 2s(n/2 + t, n - 2t - 3)$$

при четных n и

$$s(\lceil n/2 \rceil + t + 1, n - 2t - 2) = 2s(\lceil n/2 \rceil + t, n - 2t - 4)$$

при нечетных n , вытекает требуемое утверждение. Из теоремы 3 в [8] следует, что $\hat{s}(\lfloor n/6 \rfloor, n) = o(2^{n/2})$. Отсюда и из равенств (11), (12), (17), (18) и (19) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta_0(\tau) &= o(2^{n/2}) + \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} \hat{s}(t, n) \\ &\lesssim \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} [s^+(t, n) + s^+(t - 1, n - 1)] + \frac{1}{2} \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} \hat{s}(t - 1, n) \\ &< \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} [s^+(t, n) + s^+(t - 1, n - 1)] + \frac{1}{2} \hat{s}(\tau - 1, n) + \frac{1}{2} \delta_0(\tau) \end{aligned} \quad (20)$$

для четных n и

$$\begin{aligned} \delta_1(\tau) &= o(2^{n/2}) + \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} \hat{s}(t, n) \\ &\lesssim \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} [s^+(t, n) + s^+(t, n - 1)] + \frac{1}{2} \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} \hat{s}(t - 1, n) \\ &< \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} [s^+(t, n) + s^+(t - 1, n - 1)] + \frac{1}{2} \hat{s}(\tau - 1, n) + \frac{1}{2} \delta_1(\tau) \end{aligned} \quad (21)$$

для нечетных n .

Таким образом,

$$\delta_0(\tau) \lesssim \hat{s}(\tau - 1, n) + 2 \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} [s^+(t, n) + s^+(t - 1, n - 1)] \quad (22)$$

для четных n и

$$\delta_1(\tau) \lesssim \hat{s}(\tau - 1, n) + 2 \sum_{t=\tau}^{\lfloor n/6 \rfloor - 1} [s^+(t, n) + s^+(t, n - 1)] \quad (23)$$

для нечетных n .

Пусть $B \in S^+(t, n)$, положим

$$A = A(B) = B \cap [\lfloor n/2 \rfloor - t, \lfloor n/2 \rfloor].$$

Обозначим через $\{\lfloor n/2 \rfloor - f\}$ следующий за $\{\lfloor n/2 \rfloor - t\}$ элемент из A . Положим

$$A' = A \setminus \{\lfloor n/2 \rfloor - t, \lfloor n/2 \rfloor - f\}, \quad a = |A|, \quad a' = |A'| = a - 2.$$

Пусть

$$\alpha = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{2\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}},$$

$$\rho = \frac{4}{3 + \sqrt{5}}, \quad \gamma = \beta \left(1 + \frac{\rho^3}{2}\right), \quad \mu = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Оценим $s^+(t, n)$ при четных n . Пусть

$$V' = [n/2 + 1, n/2 + t - 1] \cup [n - t + 1, n - 1].$$

Положим

$$G'_{t,f} = \mathcal{C}_{\{n/2-t, n/2-f\}}(V'), \quad G'_t = \mathcal{C}_{\{n/2-t\}}(V').$$

Обозначим через $\tilde{G}'_{t,f}$ ($\tilde{G}'_t$) граф, получающийся из графа $G'_{t,f}$ (G'_t) удалением вершин $(\{n\} - (A \setminus \{n/2 - t\})) \cup (A + A) \cap [n - t + 1, n - 1]$. Заметим, что

$$|(A + A) \cap [n/2 + t + 1, n - t]| \geq |\{n/2 - t\} + A| = a,$$

и элементы $\{n/2\}$, $\{n/2 + t\}$ не могут принадлежать ни одному множеству из $S^+(t, n)$.

Рассмотрим подсемейство

$$J_0(t) = \{B \in S^+(t, n) : |A + A| \geq 3|A| - 3\}.$$

Заметим, что число множеств $B \in J_0(t)$ таких, что $B \cap [n/2 - t, n/2 - 1] = A$, не превосходит величины $I(\tilde{G}'_{t,f})2^{|\{n/2+t+1, n-t\} \setminus (A+A)|}$ при $a \geq 2$. Если же $a = 1$, то $A = \{n/2 - t\}$ и число множеств B , свободных от сумм, с таким $A(B)$ не превосходит величины $I(G'_t)2^{n/2-2t-1}$. Оценим $I(\tilde{G}'_{t,f})$. Будем действовать так же, как при доказательстве теоремы 1 в [11]. Положим $r = t - f$, $\tilde{r} = t - r \lfloor t/r \rfloor$. Заметим, что граф $G'_{t,f}$ состоит из $\tilde{r} - 1$ цепей длины $2\lfloor t/r \rfloor + 2$ и $r - \tilde{r} + 1$ цепей длины $2\lfloor t/r \rfloor$. Тогда, учитывая, что число $S(\lambda)$ независимых множеств в цепи длины λ равно члену последовательности Фибоначчи с номером $\lambda + 2$, получаем, что

$$I(G'_{t,f}) = [S(2\lfloor t/r \rfloor + 2)]^{\tilde{r}-1} [S(2\lfloor t/r \rfloor)]^{r-\tilde{r}+1}$$

$$\leq \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \right]^r [\mu^{2\lfloor t/r \rfloor + 4}]^{\tilde{r}-1} [\mu^{2\lfloor t/r \rfloor + 2}]^{r-\tilde{r}+1} = 2^{2t} \frac{\rho}{2} \alpha^t \beta^f. \quad (24)$$

Таким же образом, как и в доказательстве теоремы 1 из [11], получаем, что если граф $\tilde{G}'_{t,f}$ получен из $G'_{t,f}$ удалением t произвольных вершин, то

$$I(\tilde{G}'_{t,f}) \leq \rho^m I(G'_{t,f}).$$

Так как граф G'_t представляет собой паросочетание из $t - 1$ ребер, справедливо равенство $I(G'_t) = 3^{t-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |J_0(t)| &\leq I(G'_t) 2^{n/2-2t-1} + \sum_A I(\tilde{G}'_{t,f}) 2^{|[n/2+t+1, n-t] \setminus (A+A)|} \\ &\leq 2^{n/2} \left(\frac{3^{t-1}}{2^{2t+1}} + \sum_{f=1}^{t-1} \sum_{A' \subseteq [n/2-f+1, n/2-1]} I(\tilde{G}'_{t,f}) 2^{-|(A+A) \cap [n/2+t+1, n-t]| - 2t} \right) \\ &\leq 2^{n/2} \left(\frac{3^{t-1}}{2^{2t+1}} + \sum_{f=1}^{t-1} \frac{I(G'_{t,f})}{2^{2t}} \sum_{A' \subseteq [n/2-f+1, n/2-1]} \frac{\rho^{|n-A' \setminus \{n/2-t\}|} \rho^{|(A+A) \cap [n-t+1, n-1]|}}{2^{|(A+A) \cap [n/2+t+1, n-t]|}} \right) \\ &\leq 2^{n/2} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \sum_{f=1}^{t-1} \frac{\rho}{2} \alpha^t \beta^f \sum_{a'=0}^{f-1} \binom{f-1}{a'} \frac{\rho^{a'+1} \rho^{2a'+1}}{2^{a'+2}} \right) \\ &= 2^{n/2} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \frac{\rho^3}{8} \alpha^t \sum_{f=1}^{t-1} \beta^f \sum_{a'=0}^{f-1} \binom{f-1}{a'} \left(\frac{\rho^3}{2} \right)^{a'} \right) \quad (25) \\ &= 2^{n/2} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \frac{\rho^3}{8} \alpha^t \sum_{f=1}^{t-1} \beta^f \left(1 + \frac{\rho^3}{2} \right)^{f-1} \right) = 2^{n/2} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \frac{\rho^3 \alpha^t}{8 + 4\rho^3} \frac{\gamma^t - \gamma}{\gamma - 1} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим подсемейство

$$H_0(t) = \{B \in S^+(t, n) : |A + A| < 3|A| - 3\}.$$

Заметим, что если $|A + A| < 3|A| - 3$, то $|A| \geq 3$. Если при этом $|A| = 3$, то множество A является арифметической прогрессией. Пусть

$$H'_0(t) = \{B \in H_0(t) : |A| \geq 4\}, \quad H''_0(t) = \{B \in H_0(t) : |A| = 3\}.$$

Тогда

$$|H_0(t)| = |H'_0(t)| + |H''_0(t)|.$$

Оценим $|H'_0(t)|$. Поскольку $|A + A| \geq 2|A| - 1$, найдется число $p \in [0, a - 3]$ такое, что $|A + A| = 2a - 1 + p$. Из теоремы Фреймана следует, что множество A содержится в арифметической прогрессии P длины $a + p$. Так как $\{n/2 - t\} \in P$, число возможных арифметических прогрессий мощности $a + p$ совпадает с числом возможных разностей d для этих арифметических прогрессий. Поскольку $A \subseteq [n/2 - t, n/2 - 1]$, то $d(a - 1) \leq t - 1$. Следовательно, число возможных прогрессий P не превосходит $t - 1/a - 1$. Заметим, что число множеств $B \in H'_0(t)$ таких, что $B \cap [n/2 - t, n/2 - 1] = A$, не превосходит величины $I(\tilde{G}'_t) 2^{|[n/2+t+1, n-t] \setminus (A+A)|}$. Заметим, что если удалить вершину в графе, максимальная степень вершин которого не превосходит единицы, то число независимых

множество уменьшится в полтора раза, если удаляется вершина степени один, и уменьшится вдвое, если удаляется изолированная вершина. Тогда, если граф $\tilde{G}'_t$ получен из графа G'_t удалением m произвольных вершин, то

$$I(\tilde{G}'_t) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^m I(G'_t). \quad (26)$$

Итак,

$$\begin{aligned} |H'_0(t)| &\leq \sum_P \sum_{A \subseteq P} I(\tilde{G}'_t) 2^{|[n/2+t+1, n-t] \setminus (A+A)|} \\ &\leq 2^{n/2} \sum_{a=4}^t \sum_{p=0}^{a-3} \sum_{P: |P|=a+p} \sum_{A \subseteq P: |A+A|=2a-1+p} I(\tilde{G}'_t) 2^{-|(A+A) \cap [n/2+t+1, n-t]| - 2t} \\ &\leq 2^{n/2} \sum_{a=4}^t \sum_{p=0}^{a-3} \frac{t-1}{a-1} \binom{a+p-1}{a-1} I(\tilde{G}'_t) 2^{-|(A+A) \cap [\frac{n}{2}+t+1, n-t]| - 2t} \\ &\leq 2^{n/2} \sum_{a=4}^t \sum_{p=0}^{a-3} \frac{t-1}{a-1} \binom{a+p-1}{a-1} \frac{I(G'_t) (2/3)^{|n-A \setminus \{n/2-t\}|} (2/3)^{|(A+A) \cap [n-t+1, n-1]|}}{2^{2t} 2^{|(A+A) \cap [n/2+t+1, n-t]|}} \\ &\leq 2^{n/2} \sum_{a=4}^t \sum_{p=0}^{a-3} \frac{t-1}{a-1} \binom{a+p-1}{a-1} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{t-1} \frac{(2/3)^{a-1} (2/3)^{a+p-1}}{2^a} \\ &= 2^{n/2} (t-1) \left(\frac{3}{4}\right)^{t+1} \sum_{a=4}^t \frac{(2/9)^a}{a-1} \sum_{p=0}^{a-3} \binom{a+p-1}{a-1} \left(\frac{2}{3}\right)^p \\ &= \{b = a-1\} = 2^{n/2} \frac{t-1}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^t \sum_{b=3}^t \frac{(2/9)^b}{b} \sum_{p=0}^{b-2} \binom{b+p}{b} \left(\frac{2}{3}\right)^p. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценим

$$F(b, p) = \binom{b+p}{b} \left(\frac{2}{3}\right)^p.$$

При $b \geq 3$ и $p \in [0, b-2]$

$$\frac{F(b, p+1)}{F(b, p)} = \frac{2}{3} \frac{b+p+1}{p+1} > 1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \max_{p \in [0, b-2]} F(b, p) &= F(b, b-2) = \binom{2b-2}{b} \left(\frac{2}{3}\right)^{b-2} \\ &\leq \frac{9}{16} \binom{2b}{b} \left(\frac{2}{3}\right)^b \leq \frac{9}{16} \frac{4^b}{\sqrt{3b+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^b \\ &= \frac{9}{16\sqrt{3b+1}} \left(\frac{8}{3}\right)^b. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставив (28) в (27), получаем, что

$$\begin{aligned}
 |H'_0(t)| &\leq 2^{n/2} \frac{t-1}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^t \sum_{b=3}^{t-1} \frac{b-1}{b} \left(\frac{2}{9}\right)^b \frac{9}{16\sqrt{3b+1}} \left(\frac{8}{3}\right)^b \\
 &\leq 2^{n/2} \frac{3}{32\sqrt{10}} (t-1) \left(\frac{3}{4}\right)^t \sum_{b=3}^{t-1} \left(\frac{16}{27}\right)^b \\
 &\leq 2^{n/2} \frac{128t}{2673\sqrt{10}} \left(\frac{3}{4}\right)^t.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Оценим $|H''_0(t)|$. Так как $|A| = 3$ и A является арифметической прогрессией, множество A полностью определяется положением следующего за $\{n/2 - t\}$ элементом $\{n/2 - f\}$, где $f \in [\lfloor t/2 \rfloor + 1, t-1]$. Число множеств, свободных от сумм, при каждом фиксированном A не превосходит величины $I(\tilde{G}'_{t,f}) 2^{|[n/2+t+1, n-t] \setminus (A+A)|}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 |H''_0(t)| &\leq \sum_A I(\tilde{G}'_{t,f}) 2^{|[n/2+t+1, n-t] \setminus (A+A)|} \\
 &\leq 2^{n/2} \sum_{f=\lfloor t/2 \rfloor + 1}^{t-1} I(\tilde{G}'_{t,f}) 2^{-|(A+A) \cap [n/2+t+1, n-t]| - 2t} \\
 &\leq 2^{n/2} \sum_{f=\lfloor t/2 \rfloor + 1}^{t-1} \frac{I(G'_{t,f}) \rho^{|n-A \setminus \{n/2-t\}|} \rho^{|(A+A) \cap [n-t+1, n-1]|}}{2^{2t} 2^{|(A+A) \cap [n/2+t+1, n-t]|}} \\
 &\leq 2^{n/2} \sum_{f=\lfloor t/2 \rfloor + 1}^{t-1} \frac{\rho}{2} \alpha^t \beta^f \frac{\rho^4}{2^3} \\
 &\leq 2^{n/2} \frac{\rho^5}{16(1-\beta)} (\alpha\sqrt{\beta})^t.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Итак,

$$|H_0(t)| \leq 2^{n/2} \left(\frac{128t}{2673\sqrt{10}} \left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{\rho^5}{16(1-\beta)} (\alpha\sqrt{\beta})^t \right). \tag{31}$$

Из (25) и (31) получаем требуемую оценку

$$\begin{aligned}
 s^+(t, n) &= |J_0(t)| + |H_0(t)| \\
 &\leq 2^{n/2} \left(\left(\frac{1}{6} + \frac{128t}{2673\sqrt{10}} \right) \left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{\rho^3 \alpha^t}{8 + 4\rho^3} \frac{\gamma^t - \gamma}{\gamma - 1} + \frac{\rho^5}{16(1-\beta)} (\alpha\sqrt{\beta})^t \right).
 \end{aligned} \tag{32}$$

при четных n .

Оценим $s^+(t, n)$ при нечетных n . Пусть

$$V = [\lceil n/2 \rceil, \lceil n/2 \rceil + t - 1] \cup [n - t, n - 1].$$

Положим

$$G_{t,f} = \mathcal{C}_{\{\lfloor n/2 \rfloor - t, \lfloor n/2 \rfloor - f\}}(V), \quad G_t = \mathcal{C}_{\{\lfloor n/2 \rfloor - t\}}(V).$$

Обозначим $\tilde{G}_{t,f}$ ($\tilde{G}_t$) граф, получающийся из графа $G_{t,f}$ (G_t) при удалении вершин $(\{n\} - (A \setminus \{\lfloor n/2 \rfloor - t\})) \cup (A + A) \cap [n - t, n - 1]$. Заметим, что

$$|(A + A) \cap [\lfloor n/2 \rfloor + t + 1, n - t - 1]| \geq |\{\lfloor n/2 \rfloor - t\} + A| = a$$

и элемент $\{\lfloor n/2 \rfloor + t\}$ не может принадлежать ни одному множеству из $S^+(t, n)$.

Рассмотрим подсемейство

$$J_1(t) = \{B \in S^+(t, n) : |A + A| \geq 3|A| - 3\}.$$

Заметим, что число множеств $B \in J_1(t)$, свободных от сумм, таких, что

$$B \cap [\lfloor n/2 \rfloor - t, \lfloor n/2 \rfloor] = A,$$

не превосходит величины $I(\tilde{G}_{t,f})2^{|\lfloor n/2 \rfloor + t + 1, n - t - 1| \setminus (A + A)}$ при $a \geq 2$. Если же $a = 1$, то $A = \{\lfloor n/2 \rfloor - t\}$ и число множеств, свободных от сумм, с таким A не превосходит величины $I(G_t)2^{\lfloor n/2 \rfloor - 2t - 3}$. Заметим, что граф $G_{t,f}$ изоморфен графу $\Gamma_A(V)$ из теоремы 5. Тогда, если граф $\tilde{G}_{t,f}$ получен из графа $G_{t,f}$ удалением t произвольных вершин, то из теоремы 5 следует, что

$$I(\tilde{G}_{t,f}) \leq 2^{2t} \alpha^t \beta^f \rho^m.$$

Граф G_t представляет собой паросочетание из t ребер, поэтому

$$I(G_t) = 3^t.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |J_1(t)| &\leq I(G_t)2^{\lfloor n/2 \rfloor - 2t - 3} + \sum_A I(\tilde{G}_{t,f})2^{|\lfloor n/2 \rfloor + t + 1, n - t - 1| \setminus (A + A)} \\ &\leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{3^t}{2^{2t+3}} + \sum_{f=0}^{t-1} \sum_{A' \subseteq [\lfloor n/2 \rfloor - f + 1, \lfloor n/2 \rfloor]} \frac{I(\tilde{G}_{t,f})}{2^{2t}} 2^{-|(A + A) \cap [\lfloor n/2 \rfloor + t + 1, n - t - 1]| - 2} \right) \\ &\leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \sum_{f=0}^{t-1} \alpha^t \beta^f \sum_{A' \subseteq [\lfloor n/2 \rfloor - f + 1, \lfloor n/2 \rfloor]} \frac{\rho^{|n - A \setminus \{\lfloor n/2 \rfloor - t\}|} \rho^{|(A + A) \cap [n - t, n - 1]|}}{2^{|(A + A) \cap [\lfloor n/2 \rfloor + t + 1, n - t - 1]| + 2}} \right) \\ &\leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \alpha^t \sum_{f=0}^{t-1} \beta^f \sum_{a'=0}^f \binom{f}{a'} \frac{\rho^{a'+1} \rho^{2a'+1}}{2^{a'+4}} \right) \\ &= 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \frac{\rho^2}{16} \alpha^t \sum_{f=0}^{t-1} \beta^f \sum_{a'=0}^f \binom{f}{a'} \left(\frac{\rho^3}{2} \right)^{a'} \right) \\ &= 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \frac{\rho^2}{16} \alpha^t \sum_{f=0}^{t-1} \beta^f \left(1 + \frac{\rho^3}{2} \right)^f \right) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right)^t + \frac{\rho^2 \alpha^t}{16} \frac{\gamma^t - 1}{\gamma - 1} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим подсемейство

$$H_1(t) = \{B \in S^+(t, n) : |A + A| < 3|A| - 3\}.$$

Заметим, что если $|A + A| < 3|A| - 3$, то $|A| \geq 3$. Если при этом $|A| = 3$, то множество A является арифметической прогрессией. Пусть

$$H'_1(t) = \{B \in H_1(t) : |A| \geq 4\}, \quad H''_1(t) = \{B \in H_1(t) : |A| = 3\},$$

так что

$$|H_1(t)| = |H'_1(t)| + |H''_1(t)|.$$

Оценим $|H'_1(t)|$. Поскольку $|A + A| \geq 2|A| - 1$, найдется число $p \in [0, a - 3]$ такое, что $|A + A| = 2a - 1 + p$. Из теоремы Фреймана следует, что множество A содержится в арифметической прогрессии P длины $a + p$. Так как $\{[n/2] - t\} \in P$, число возможных арифметических прогрессий мощности $a + p$ совпадает с числом возможных разностей d для этих арифметических прогрессий. Поскольку $A \subseteq [[n/2] - t, [n/2]]$, то $d(a - 1) \leq t$. Следовательно, число возможных прогрессий P не превосходит $t/(a - 1)$. Заметим, что число множеств $B \in H'_1(t)$ таких, что $B \cap [[n/2] - t, [n/2]] = A$, не превосходит величины $I(\tilde{G}_t) 2^{[[n/2] + t + 1, n - t - 1] \setminus (A + A) }$. Аналогично (26) получаем, что если граф $\tilde{G}_t$ получен из графа G_t удалением m произвольных вершин, то

$$I(\tilde{G}_t) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^m I(G_t).$$

Итак,

$$\begin{aligned} |H'_1(t)| &\leq \sum_P \sum_{A \subseteq P} I(\tilde{G}_t) 2^{[[n/2] + t + 1, n - t - 1] \setminus (A + A) } \\ &\leq 2^{[n/2]} \sum_{a=4}^{t+1} \sum_{p=0}^{a-3} \sum_{P: |P|=a+p} \sum_{A \subseteq P: |A+A|=2a-1+p} \frac{I(\tilde{G}_t)}{2^{2t}} 2^{-|(A+A) \cap [[n/2] + t + 1, n - t - 1]| - 2} \\ &\leq 2^{[n/2]} \sum_{a=4}^{t+1} \sum_{p=0}^{a-3} \frac{t}{a-1} \binom{a+p-1}{a-1} \frac{I(G_t)}{2^{2t}} \frac{(2/3)^{|n-A \setminus \{[n/2]-t\}|} (2/3)^{|(A+A) \cap [n-t, n-1]|}}{2^{|(A+A) \cap [[n/2] + t + 1, n - t - 1]| + 2}} \\ &\leq 2^{[n/2]} \sum_{a=4}^{t+1} \sum_{p=0}^{a-3} \frac{t}{a-1} \binom{a+p-1}{a-1} \left(\frac{3}{4}\right)^t \frac{(2/3)^{a-1} (2/3)^{a+p-1}}{2^{a+2}} \\ &\leq 2^{[n/2]} \left(\frac{3}{4}\right)^t \sum_{a=4}^{t+1} \frac{(2/9)^a}{a-1} \sum_{p=0}^{a-3} \binom{a+p-1}{a-1} \left(\frac{2}{3}\right)^p \\ &= \{b = a - 1\} = 2^{[n/2]} \frac{t}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^t \sum_{b=3}^t \frac{(2/9)^b}{b} \sum_{p=0}^{b-2} \binom{b+p}{b} \left(\frac{2}{3}\right)^p \\ &\leq 2^{[n/2]} \frac{t}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^t \sum_{b=3}^t \frac{b-1}{b} \left(\frac{2}{9}\right)^b \frac{9}{16\sqrt{3b+1}} \left(\frac{8}{3}\right)^b \\ &\leq 2^{[n/2]} \frac{9}{128\sqrt{10}} t \left(\frac{3}{4}\right)^t \sum_{b=3}^t \left(\frac{16}{27}\right)^b \leq 2^{[n/2]} \frac{32t}{891\sqrt{10}} \left(\frac{3}{4}\right)^t. \end{aligned} \quad (34)$$

Оценим $|H''_1(t)|$. Так как $|A| = 3$ и A является арифметической прогрессией, множество A полностью определяется положением следующего за $\{[n/2] - t\}$ элементом

$\{[n/2] - f\}$, где $f \in [t/2, t-1]$. Число множеств, свободных от сумм, при каждом фиксированном A не превосходит величины $I(\tilde{G}_{t,f})2^{|[n/2]+t+1, n-t-1] \setminus (A+A)|}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 |H_1''(t)| &\leq \sum_A I(\tilde{G}_{t,f})2^{|[n/2]+t+1, n-t-1] \setminus (A+A)|} \\
 &\leq 2^{[n/2]} \sum_{f=[t/2]}^{t-1} \frac{I(\tilde{G}_{t,f})}{2^{2t}} 2^{-|(A+A) \cap [n/2]+t+1, n-t-1| - 2} \\
 &\leq 2^{[n/2]} \sum_{f=[t/2]}^{t-1} \alpha^t \beta^f \frac{\rho^{|n-A \setminus \{[n/2]-t\}|} \rho^{|(A+A) \cap [n-t, n-1]|}}{2^{|(A+A) \cap [n/2]+t+1, n-t-1|+2}} \\
 &\leq 2^{[n/2]} \sum_{f=[t/2]}^{t-1} \alpha^t \beta^f \frac{\rho^4}{2^5} \leq 2^{[n/2]} \frac{\rho^4}{32(1-\beta)} (\alpha\sqrt{\beta})^t. \tag{35}
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|H_1(t)| \leq 2^{[n/2]} \left(\frac{32t}{891\sqrt{10}} \left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{\rho^4}{32(1-\beta)} (\alpha\sqrt{\beta})^t \right). \tag{36}$$

Из (34) и (36) получаем требуемую оценку

$$\begin{aligned}
 s^+(t, n) &= |J_1(t)| + |H_1(t)| \\
 &\leq 2^{[n/2]} \left(\left(\frac{1}{8} + \frac{32t}{891\sqrt{10}} \right) \left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{\rho^2 \alpha^t}{16} \frac{\gamma^t - 1}{\gamma - 1} + \frac{\rho^4}{32(1-\beta)} (\alpha\sqrt{\beta})^t \right) \tag{37}
 \end{aligned}$$

при нечетных n .

Пусть

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{3}{4}, & K_0 &= \frac{1}{6}, & K_1 &= \frac{128}{2673\sqrt{10}}, \\
 K_2 &= \frac{\rho^3}{(8+4\rho^3)(\gamma-1)}, & K_3 &= \frac{\rho^5}{16(1-\beta)}, \\
 K_4 &= \frac{1}{8}, & K_5 &= \frac{288t}{8019\sqrt{10}}, \\
 K_6 &= \frac{\rho^2 \alpha^t}{16(\gamma-1)}, & K_7 &= \frac{\rho^4}{32(1-\beta)}.
 \end{aligned}$$

Из (22) и (32) следует, что

$$\begin{aligned}
 \delta_0(\tau) &\lesssim 2 \sum_{t=\tau}^{\infty} 2^{n/2} \left(\left(K_0 + \frac{K_4}{\eta} \right) \eta^t + K_1 t \eta^t + K_5 (t-1) \eta^{t-1} + \left(K_2 + \frac{K_6}{\alpha\gamma} \right) (\alpha\gamma)^t \right. \\
 &\quad \left. - \left(\gamma K_2 + \frac{K_6}{\alpha} \right) \alpha^t + \left(K_3 + \frac{K_7}{\alpha\sqrt{\beta}} \right) (\alpha\sqrt{\beta})^t \right) + \hat{s}(\tau-1, n) \tag{38}
 \end{aligned}$$

для четных n . Заметим, что

$$\sum_{t=\tau}^{\infty} t \eta^t \leq \int_{\tau-1}^{\infty} t \eta^t dt = \frac{\eta^{\tau-1}}{\ln \eta} \left(\frac{1}{\ln \eta} - (\tau-1) \right)$$

при $\tau \geq 5$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta_0(\tau) \lesssim & 2 \left(\left(K_0 + \frac{K_4}{\eta} \right) \frac{\eta^\tau}{1-\eta} + (K_1 + K_5) \frac{\eta^{\tau-1}}{\ln \eta} \left(\frac{1}{\ln \eta} - (\tau - 1) \right) \right. \\ & + K_5(\tau - 1)\eta^{\tau-1} + \left(K_2 + \frac{K_6}{\alpha\gamma} \right) \frac{(\alpha\gamma)^\tau}{1-\alpha\gamma} - \left(\gamma K_2 + \frac{K_6}{\alpha} \right) \frac{\alpha^\tau}{1-\alpha} \\ & \left. + \left(K_3 + \frac{K_7}{\alpha\sqrt{\beta}} \right) \frac{(\alpha\sqrt{\beta})^\tau}{1-\alpha\sqrt{\beta}} \right) 2^{n/2} + \hat{s}(\tau - 1, n) \end{aligned} \quad (39)$$

для четных n .

Аналогично (39) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta_1(\tau) \lesssim & \left((K_0 + 2K_4) \frac{\eta^\tau}{1-\eta} + (K_1 + 2K_5) \frac{\eta^{\tau-1}}{\ln \eta} \left(\frac{1}{\ln \eta} - (\tau - 1) \right) \right. \\ & + (K_2 + 2K_6) \frac{(\alpha\gamma)^\tau}{1-\alpha\gamma} - (\gamma K_2 + 2K_6) \frac{\alpha^\tau}{1-\alpha} \\ & \left. + (K_3 + 2K_7) \frac{(\alpha\sqrt{\beta})^\tau}{1-\alpha\sqrt{\beta}} \right) 2^{\lceil n/2 \rceil} + \hat{s}(\tau - 1, n) \end{aligned} \quad (40)$$

для нечетных n .

С помощью компьютерных вычислений получаем следующие значения $\hat{s}(t, n)$ при четных n , значения констант округлены в меньшую сторону, ошибка округления меньше $2 \cdot 10^{-19}$:

$$\begin{aligned} \hat{s}(0, n) &= 0,50000000000000000000 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(1, n) &= 0,50000000000000000000 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(2, n) &= 0,46875000000000000000 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(3, n) &= 0,42578125000000000000 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(4, n) &= 0,37805175781250000000 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(5, n) &= 0,32652282714843750000 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(6, n) &= 0,2769298553466796875 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(7, n) &= 0,2333836555480957031 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(8, n) &= 0,1923370957374572753 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(9, n) &= 0,1575666591525077819 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(10, n) &= 0,1282375138252973556 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(11, n) &= 0,1032080980949103832 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(12, n) &= 0,0824521125614410266 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(13, n) &= 0,0658545398964633932 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(14, n) &= 0,0520000763202688176 \cdot 2^{n/2} \\ \hat{s}(15, n) &= 0,0409581499958164840 \cdot 2^{n/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{s}(16, n) &= 0,0322250797588665705 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(17, n) &= 0,0251820205040365063 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(18, n) &= 0,0195932536462369022 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(19, n) &= 0,0152826575903471234 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(20, n) &= 0,0118219584436999197 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(21, n) &= 0,0091419794241655748 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(22, n) &= 0,0070702840128413939 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(23, n) &= 0,0054409024965793161 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(24, n) &= 0,0041793347134469291 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(25, n) &= 0,0032165586647138082 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(26, n) &= 0,0024619989375942666 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(27, n) &= 0,0018844850334054961 \cdot 2^{n/2} \\
\hat{s}(28, n) &= 0,0014429531193466775 \cdot 2^{n/2}
\end{aligned}$$

Компьютерные вычисления дают нам следующие значения $\hat{s}(t, n)$ при нечетных n , значения констант округлены в меньшую сторону, ошибка округления меньше $2 \cdot 10^{-19}$:

$$\begin{aligned}
\hat{s}(0, n) &= 0,375000000000000000 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(1, n) &= 0,359375000000000000 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(2, n) &= 0,332031250000000000 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(3, n) &= 0,296630859375000000 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(4, n) &= 0,257659912109375000 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(5, n) &= 0,221813201904296875 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(6, n) &= 0,186351299285886718 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(7, n) &= 0,154659271240234375 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(8, n) &= 0,1275737285614013671 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(9, n) &= 0,1039209663867950439 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(10, n) &= 0,0836613228311762213 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(11, n) &= 0,0674498094595037400 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(12, n) &= 0,0536445876659854548 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(13, n) &= 0,0425215111918078036 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(14, n) &= 0,0336456624891354749 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(15, n) &= 0,0264331558229038421 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(16, n) &= 0,0206541464784049111 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(17, n) &= 0,0161710680699599373 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(18, n) &= 0,0125653435949654862 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{s}(19, n) &= 0,0097448794496362870 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(20, n) &= 0,0075571228249768368 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(21, n) &= 0,0058358567863906380 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(22, n) &= 0,0044895795221757937 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(23, n) &= 0,0034648427302045102 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(24, n) &= 0,0026583082447854154 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(25, n) &= 0,0020372383962765979 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(26, n) &= 0,0015631619420834605 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
\hat{s}(27, n) &= 0,0011952274596515112 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}
\end{aligned}$$

Из (39) и (40), учитывая ошибку округления для $\hat{s}(t, n)$, получаем, что

$$\begin{aligned}
\delta_0(29) &\lesssim (0,027 + 0,0014429531193466777) \cdot 2^{n/2} \\
&= 0,0284429531193466777 \cdot 2^{n/2}
\end{aligned} \tag{41}$$

и

$$\begin{aligned}
\delta_1(28) &\lesssim (0,022 + 0,0011952274596515114) \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \\
&= 0,0231952274596515114 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}.
\end{aligned} \tag{42}$$

С помощью компьютерных вычислений получаем, что

$$c_0(29) = 5,0709770577851558933 \cdot 2^{n/2} \tag{43}$$

и

$$c_1(28) = 3,8103083138230152559 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}. \tag{44}$$

Значения констант округлены в меньшую сторону, ошибка округления меньше $2 \cdot 10^{-19}$.

Отсюда и из (13), (14), (41) и (42), учитывая ошибку округления в равенствах (43) и (44), получаем, что

$$5,0709 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \lesssim s(n/3, n) \lesssim 5,0995 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \tag{45}$$

при четных n и

$$3,8103 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \lesssim s(n/3, n) \lesssim 3,8336 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \tag{46}$$

при нечетных n . Из оценок (45) и (46) вытекает утверждение теоремы.

Улучшить оценки можно следующими двумя способами. При использовании более производительной вычислительной техники можно определить значения $\hat{s}(t, n)$ при $t > 28$ и, соответственно, значения $c_0(\tau)$, $c_1(\tau)$ при $\tau > 29$. Тогда из (13), (14), (39) и (40) мы получим более точные оценки, поскольку $\delta_0(\tau)$, $\delta_1(\tau)$ убывают по τ . Другой путь состоит в получении более точных оценок для $\delta_0(\tau)$ и $\delta_1(\tau)$, например, с помощью подсчета числа независимых множеств в графах Кэли, порожденных множествами A такими, что $|A| > 2$.

Автор выражает признательность своему научному руководителю А. А. Сапоженко.

Список литературы

1. Cameron P., Erdos P., On the number of integers with various properties. *Number theory: Proc. First Conf. Canadian Number Theory Ass.* de Gruyter, Berlin, 1990, 61–79.
2. Сапоженко А. А., Доказательство гипотезы Камерона–Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм. *Матем. вопросы киберн.* (2003) **12**, 5–14.
3. Alon N., Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups. *Israel J. Math.* (1991) **73**, №2, 247–256.
4. Calkin N., On the number of sum-free sets. *Bull. London Math. Soc.* (1990) **22**, 141–144.
5. Lev V. F., Luczak T., Schoen T., Sum-free sets in abelian groups. *Israel J. Math.* (2001) **125**, 347–367.
6. Сапоженко А. А., О числе множеств, свободных от сумм в абелевых группах. *Вестник Московского унив., Сер. I, Математика, Механика* (2001) 56–62; (2002) 14–18.
7. Омелянов К. Г., Сапоженко А. А., О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел. *Дискретная математика* (2002) **14**, №3, 3–7.
8. Омелянов К. Г., Сапоженко А. А., О числе и структуре множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 11–15.
9. Green B., The Cameron–Erdos conjecture. *Bull. London Math. Soc.* (2004) **36**, 769–778.
10. Фрейман Г. А., Сложение конечных множеств. *Изв. ВУЗов, Математика* (1959) **6** (13), 202–213.
11. Омелянов К. Г., О числе независимых множеств в поврежденных графах Кэли. *Дискретная математика* (2005) **17**, №3, 105–108.

Статья поступила 21.11.2005.