Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Оценки вероятности совпадения векторов частот исходов независимых полиномиальных схем, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 1, 59–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:11:07

Оценки вероятности совпадения векторов частот исходов независимых полиномиальных схем

© 1997 г. А. Н. Тимашёв

Рассматривается задача оценки вероятности совпадения векторов частот исходов независимых полиномиальных схем с N исходами и n испытаниями для каждой схемы. Получены локальные предельные теоремы, оценивающие эту вероятность при различных предположениях о росте параметров n, N и о распределениях частот исходов в каждой схеме. В качестве приложения полученных результатов выводятся асимптотические оценки среднего числа совпадающих компонент векторов частот исходов для случая двух независимых полиномиальных схем.

Пусть n — число испытаний, N — число исходов двух полиномиальных схем с векторами вероятностей исходов, равными соответственно $(p_1, \dots, p_N)$ и $(q_1, \dots, q_N)$, где

$$\sum_{k=1}^N p_k = \sum_{k=1}^N q_k = 1, \quad p_k > 0, \quad q_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad N \geq 2.$$

Пусть, далее, случайный вектор $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ имеет полиномиальное распределение с вероятностями исходов $(p_1, \dots, p_N)$, а вектор $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ имеет полиномиальное распределение с вероятностями исходов $(q_1, \dots, q_N)$. Будем предполагать, что случайные векторы $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ и $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ независимы.

Положим

$$P_N(n) = \mathbf{P}\{(\eta_1, \dots, \eta_N) = (\theta_1, \dots, \theta_N)\}. \quad (1)$$

В работе получены локальные предельные теоремы, оценивающие вероятность $P_N(n)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $N \geq 2$. Для равновероятных полиномиальных схем, когда $p_1 = \dots = p_N = q_1 = \dots = q_N = 1/N$, получены асимптотические оценки вероятности $P_N(n)$ при $N \rightarrow \infty$ и $n = o(\sqrt{N})$, а также в центральной области изменения параметров n, N ([1, с. 40]), когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n}{N} \leq \alpha_1 < \infty, \quad (2)$$

где α_0, α_1 — постоянные.

Результаты, соответствующие этим условиям, обобщаются на случай нескольких независимых равновероятных полиномиальных схем.

Заметим, что задача оценки вероятности $P_N(n)$ имеет важное значение в некоторых вопросах передачи информации (например, при организации контроля правильности преобразования и промежуточного хранения информации), при нахождении вероятности совместности некоторых случайных систем уравнений в подстановках и др.

Лемма 1. Для вероятности $P_N(n)$ справедливо интегральное представление в комплексной области

$$P_N(n) = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2\pi i)^N} \oint \cdots \oint \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \left(z_k + \frac{1}{z_k} \right) \right)^{2n} \frac{dz_1 \dots dz_N}{z_1 \dots z_N}. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) осуществляется по пути γ^N в $\mathbb{C}^N$, где γ — окружность $|z| = 1$, пробегаемая в положительном направлении.

Доказательство. Выражение в правой части равенства (3) (без множителя $(n!)^2/(2n)!$) по интегральной теореме Коши равно свободному члену в разложении величины

$$\left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \left(z_k + \frac{1}{z_k} \right) \right)^{2n}$$

по степеням переменных $z_1, \dots, z_N$. Согласно полиномиальной теореме этот свободный член равен

$$\begin{aligned} \sum_{2r_1 + \dots + 2r_N = 2n} (2n)! \prod_{k=1}^N \left(\binom{2r_k}{r_k} \frac{(p_k q_k)^{r_k}}{(2r_k)!} \right) &= \sum_{r_1 + \dots + r_N = n} (2n)! \prod_{k=1}^N \left(\frac{(p_k q_k)^{r_k}}{(r_k!)^2} \right) \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} P_N(n). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из (1) согласно формуле полной вероятности; суммирование осуществляется по всевозможным упорядоченным наборам неотрицательных целых чисел $r_1, \dots, r_N$, в сумме равных n .

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для вероятности $P_N(n)$ справедливо интегральное представление в вещественной области

$$P_N(n) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} 2^{2n-N} \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \cos(\pi \varphi_k) \right)^{2n} d\varphi_1 \dots d\varphi_N. \quad (4)$$

Доказательство. Равенство (4) следует из (3), если положить $z_k = \exp(\pi i \varphi_k)$, где $-1 \leq \varphi_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Пусть при $n \rightarrow \infty$ и постоянном $N \geq 2$ вероятности $p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N$ фиксированы, $p_k > 0, q_k > 0, k = 1, 2, \dots, N$. Тогда

$$P_N(n) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \right)^{N-1} \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \right)^{2n+N/2} \prod_{k=1}^N (p_k q_k)^{-1/4} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (5)$$

Доказательство. При условиях теоремы 1 согласно формуле Стирлинга

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} 2^{2n-N} = \sqrt{n\pi} 2^{-N} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (6)$$

Пусть

$$g(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \cos(\pi \varphi_k) \right)^2,$$

где $-1 \leq \varphi_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, N$.

Функция g непрерывна на компакте $[-1, 1]^N$ N -мерного пространства $\mathbf{R}^N$ и имеет на этом компакте три точки максимума: одну внутреннюю $\varphi_1 = \dots = \varphi_N = 0$ и две граничные $\varphi_1 = \dots = \varphi_N = -1$ и $\varphi_1 = \dots = \varphi_N = 1$, причем

$$g(0, \dots, 0) = g(-1, \dots, -1) = g(1, \dots, 1) = \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \right)^2.$$

Для оценки интеграла в (4) используем метод Лапласа в N -мерном случае. Пусть $F_N(n)$ — вклад точки максимума $\varphi_1 = \dots = \varphi_N = 0$ в интеграл

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 (g(\varphi_1, \dots, \varphi_N))^n d\varphi_1 \dots d\varphi_N,$$

тогда асимптотика этого интеграла при условиях теоремы 1 определяется удвоенным вкладом $F_N(n)$ (с точностью до множителя $1 + O(1/n)$), поскольку вклад в интеграл из (4) каждой из двух граничных точек максимума (являющихся стационарными точками функции g) равен половине вклада $F_N(n)$ ([2, с. 83]). Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ из (4) и (6) получаем, что

$$P_N(n) = \sqrt{n\pi} 2^{-(N-1)} F_N(n) (1 + O(1/n)). \quad (7)$$

Положим

$$S(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \ln \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \cos(\pi \varphi_k) \right),$$

где

$$-\frac{1}{2} < \varphi_k < \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

тогда при $n \rightarrow \infty$ (с учетом (7))

$$P_N(n) = \sqrt{n\pi} 2^{-(N-1)} \int_{-1/2}^{1/2} \dots \int_{-1/2}^{1/2} \exp(2nS(\varphi_1, \dots, \varphi_N)) d\varphi_1 \dots d\varphi_N (1 + O(1/n)),$$

так что

$$F_N(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \cdots \int_{-1/2}^{1/2} \exp(2nS(\varphi_1, \dots, \varphi_N)) d\varphi_1 \dots d\varphi_N (1 + O(1/n)). \quad (8)$$

Исходя из (8) и применяя для оценки вклада $F_N(n)$ метод Лапласа в N -мерном случае ([2, с. 74]), получаем, что при условиях теоремы 1

$$F_N(n) = \pi^{N/2} n^{-N/2} |\det S''(0, \dots, 0)|^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \right)^{2n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (9)$$

где

$$S''(0, \dots, 0) = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}(0, \dots, 0) \right\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Легко проверить, что

$$\det S''_N(0, \dots, 0) = (-1)^N \pi^{2N} \prod_{k=1}^N (p_k q_k)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \right)^{-N},$$

поэтому из (9) получаем

$$F_N(n) = \pi^{-N/2} n^{-N/2} \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} \right)^{2n+N/2} \prod_{k=1}^N (p_k q_k)^{-1/4} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (10)$$

Формула (5) следует из (7) и (10). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1 и

$$p_k = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

то

$$P_N(n) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \right)^{N-1} \left(\prod_{k=1}^N p_k \right)^{-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Следствие 2. Если выполнены условия следствия 1 и

$$p_k = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

то

$$P_N(n) = \left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \right)^{N-1} N^{N/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Теорема 2. Пусть при $n \rightarrow \infty$ и постоянном $N \geq 2$ вероятности p_k, q_k , $k = 1, \dots, N$, меняются так, что

$$\begin{aligned} np_k &\rightarrow \lambda_k > 0, & nq_k &\rightarrow \mu_k > 0, & k &= 1, 2, \dots, N-1, \\ p_N &= 1 - \sum_{k=1}^{N-1} p_k, & q_N &= 1 - \sum_{k=1}^{N-1} q_k. \end{aligned}$$

Тогда

$$P_N(n) = \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_k + \mu_k) \right) \prod_{k=1}^{N-1} I_0 \left(2\sqrt{\lambda_k \mu_k} \right) (1 + o(1)). \quad (11)$$

Здесь

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}$$

— модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода.

Доказательство. Формула полной вероятности для величины $P_N(n)$, приведенная при доказательстве леммы 1, с учетом равенства Парсеваля позволяет утверждать, что

$$P_N(n) = \frac{1}{(2N)^N} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t_1, \dots, t_N)|^2 dt_1 \dots dt_N, \quad (12)$$

где

$$\varphi(t_1, \dots, t_N) = \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{p_k q_k} e^{it_k} \right)^n.$$

Если $n \rightarrow \infty$ и выполнены условия теоремы 2, то

$$\sqrt{p_k q_k} = \frac{\sqrt{\lambda_k \mu_k}}{n} + o(1/n), \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

и

$$\sqrt{p_N q_N} = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_k + \mu_k) + o(1/n).$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $t_k \in [-\pi, \pi]$, $k = 1, 2, \dots, N$,

$$|\varphi(t_1, \dots, t_N)|^2 = \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_k + \mu_k) \right) \prod_{k=1}^{N-1} \exp \left(2\sqrt{\lambda_k \mu_k} \cos(t_k - t_N) \right) (1 + o(1)).$$

Подставляя полученную оценку в (12) и полагая

$$v_k = t_k - t_N, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad v_N = t_N,$$

получаем после очевидных преобразований, что

$$P_N(n) = \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_k + \mu_k) \right) \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp \left(2\sqrt{\lambda_k \mu_k} \cos v_k \right) dv_k \right) (1 + o(1)).$$

Используя известное ([3, с. 61]) интегральное представление для функции Бесселя

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x \cos v) dv$$

и полагая

$$x = 2\sqrt{\lambda_k \mu_k}, \quad v = v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

получаем (11). Теорема 2 доказана.

Теорема 2 допускает обобщение, которое мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 3. Пусть $n \rightarrow \infty$ и выполнены условия теоремы 2, $s_1, \dots, s_N$ — фиксированные целые числа, для которых $s_1 + \dots + s_N = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_k - \theta_k = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, N\} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_k + \mu_k)\right) \\ \times \prod_{k=1}^{N-1} \left(\left(\frac{\lambda_k}{\mu_k}\right)^{s_k/2} I_{s_k}\left(2\sqrt{\lambda_k \mu_k}\right)\right) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь при $s = 0, 1, 2, \dots$

$$I_{-s}(x) = I_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+s}}{k!(k+s)!}$$

и I_s — модифицированная функция Бесселя s -го порядка первого рода.

Доказательство теоремы 3 может быть проведено аналогичными методами.

Заметим, что формула (11) представляет собой частный случай соотношения (13) при $s_1 = \dots = s_N = 0$.

Далее будем рассматривать случай равновероятных полиномиальных схем, когда $p_k = q_k = 1/N$, $k = 1, 2, \dots, N$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 4. При $N \rightarrow \infty$ и $n = o(\sqrt{N})$

$$P_N(n) = n! N^{-n} (1 + O(n^2/N)). \quad (14)$$

Доказательство. В случае равновероятных полиномиальных схем

$$P_N(n) = (n!)^2 N^{-2n} \sum_{r_1 + \dots + r_N = n} \prod_{k=1}^N (r_k!)^{-2}. \quad (15)$$

Так как $r_k! \geq 1$, $k = 1, \dots, N$,

$$\sum_{r_1 + \dots + r_N = n} \prod_{k=1}^N (r_k!)^{-2} \leq \sum_{r_1 + \dots + r_N = n} \prod_{k=1}^N (r_k!)^{-1} = \frac{N^n}{n!},$$

и поэтому

$$P_N(n) \leq n!N^{-n}. \quad (16)$$

Для получения нижней оценки вероятности $P_N(n)$ используем формулу (15). Число слагаемых в сумме в правой части этой формулы равно $\binom{n+N-1}{N-1}$. Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, легко показать, что при условиях

$$x_1 + \dots + x_m = c > 0, \quad x_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \alpha \geq 1,$$

минимум функции

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m x_j^\alpha$$

достигается при $x_j = c/m$, $j = 1, \dots, m$, и этот минимум равен $m(c/m)^\alpha$.

Полагая

$$m = \binom{n+N-1}{N-1}, \quad c = \frac{N^n}{n!}, \quad \alpha = 2$$

и используя это утверждение, получаем оценку

$$\sum_{r_1 + \dots + r_N = n} \prod_{k=1}^N (r_k!)^{-2} \geq \frac{N^{2n}(N-1)!}{n!(n+N-1)!}.$$

С учетом (15) отсюда следует, что

$$P_N(n) \geq \frac{(N-1)!n!}{(n+N-1)!} = \binom{n+N-1}{N-1}^{-1}. \quad (17)$$

Отношение верхней оценки (16) к нижней оценке (17) равно

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{j}{N}\right) = \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n-1} j + O\left(\frac{n^3}{N^2}\right) \right) = 1 + O\left(\frac{n^2}{N}\right).$$

Значит, справедлива формула (14). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ в центральной области (2), тогда

$$P_N(n) = \sqrt{\frac{2\pi n}{\varphi(\alpha)}} \alpha^{2n} \exp(-2n)(Q(z_0))^N z_0^{-(n+1)} (1 + O(N^{-1})), \quad (18)$$

где

$$Q(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{(r!)^2} = I_0(2\sqrt{z}), \quad (19)$$

$z = z_0$ — единственный положительный корень уравнения

$$\frac{zQ'(z)}{Q(z)} = \alpha, \quad (20)$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{Q''(z_0)}{\alpha Q(z_0)} - \frac{\alpha - 1}{z_0^2} > 0. \quad (21)$$

Доказательство. Для обоснования оценки (18) используем метод перевала. Положим

$$P_N(n) = (n!)^2 N^{-2n} S_N(n),$$

тогда согласно (15)

$$S_N(n) = \sum_{r_1 + \dots + r_N = n} \prod_{k=1}^N (r_k!)^{-2}. \quad (22)$$

При $N = 1$ из (22) следует, что $S_1(n) = (n!)^{-2}$. Полагая в (22) $r_N = r$, находим, что

$$S_N(n) = \sum_{r=0}^n (r!)^{-2} S_{N-1}(n-r).$$

Умножая получившееся рекуррентное соотношение на z^n и суммируя по n , получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_N(n) z^n = Q(z) \sum_{m=0}^{\infty} S_{N-1}(m) z^m, \quad N = 1, 2, \dots$$

Поскольку при $N = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_1(n) z^n = Q(z),$$

справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_N(n) z^n = (Q(z))^N$$

при любом комплексном значении z . Значит,

$$S_N(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(Q(z))^N}{z^{n+1}} dz. \quad (23)$$

Интегрирование в (23) осуществляется по окружности с центром в нуле (пробегаемой в положительном направлении). При условиях (2)

$$S_N(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z} \exp(n\omega(z)) dz, \quad (24)$$

где

$$\omega(z) = \frac{1}{\alpha} \ln Q(z) - \ln z$$

(для логарифма выбирается та ветвь, которая принимает вещественные значения на вещественной положительной полуоси).

Интеграл (24) при условиях (2) асимптотически (с точностью до множителя $1 + O(N^{-1})$) равен вкладу точки перевала z_0 функции ω , являющейся единственным вещественным положительным корнем уравнения (20); при этом функция Q определяется согласно (19). Выбирая радиус окружности, по которой осуществляется интегрирование в (23), равным z_0 , и вычисляя этот вклад стандартными методами ([2, с. 193]), получаем оценку

$$S_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \omega''(z_0)}} (Q(z_0))^N z_0^{-(n+1)} (1 + O(N^{-1})), \quad (25)$$

где

$$\omega''(z_0) = \frac{Q''(z_0)}{\alpha Q(z_0)} - \frac{\alpha - 1}{z_0^2} = \varphi(\alpha) > 0$$

(см. (21)).

Формула (18) следует из соотношения

$$P_N(n) = (n!)^2 N^{-2n} S_N(n),$$

оценки (25) и формулы Стирлинга с учетом условий (2). Теорема 5 доказана.

Предположим теперь, что задано $m \geq 2$ независимых равновероятных полиномиальных схем с N исходами и n испытаниями для каждой схемы. Пусть $(\eta_1, \dots, \eta_N), (\theta_1, \dots, \theta_N), \dots, (\chi_1, \dots, \chi_N)$ — соответствующие векторы частот исходов этих схем, и пусть

$$P_N(n) = \mathbf{P}\{(\eta_1, \dots, \eta_N) = (\theta_1, \dots, \theta_N) = \dots = (\chi_1, \dots, \chi_N)\}. \quad (26)$$

В частности, при $m = 2$ равенство (26) превращается в (1). В этой ситуации теорема 4 обобщается следующим образом.

Теорема 6. Пусть $N \rightarrow \infty$, $n = o(\sqrt{N})$ и $m \geq 2$ фиксировано. Тогда

$$P_N(n) = (n! N^{-n})^{m-1} \left(1 + O\left(\frac{n^2}{N}\right) \right). \quad (27)$$

При доказательстве формулы (27) используются оценки вероятности $P_N(n)$, аналогичные установленным выше при $m = 2$, а именно,

$$\left(\frac{n + N - 1}{N - 1} \right)^{-(m-1)} \leq P_N(n) \leq (n! N^{-n})^{m-1}.$$

Из этих оценок так же, как при доказательстве теоремы 4, выводится (27).

Проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 5, получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ в центральной области (2) и $m \geq 2$ фиксировано. Тогда

$$P_N(n) = \sqrt{\frac{(2\pi n)^{m-1}}{\psi_m(\alpha)}} \alpha^{mn} \exp(-mn) (H_m(z_0))^N z_0^{-(n+1)} (1 + O(N^{-1})), \quad (28)$$

где

$$H_m(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{(r!)^m}, \quad (29)$$

$z = z_0$ — единственный положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} \frac{z H'_m(z)}{H_m(z)} &= \alpha, \\ \psi_m(\alpha) &= \frac{H''_m(z_0)}{\alpha H_m(z_0)} - \frac{\alpha - 1}{z_0^2} > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что при $m = 2$ формула (29) принимает вид (19), а формула (30) вид (21), так что оценка (18) есть частный случай (28).

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим случайную величину $\xi(n, N)$, равную числу совпадающих компонент векторов частот из (1) (случай $m = 2$), т.е.

$$\xi(n, N) = \sum_{k=1}^N I\{\eta_k = \theta_k\}. \quad (31)$$

В равенстве (31) $I\{\eta_k = \theta_k\}$ — индикатор случайного события $\{\eta_k = \theta_k\}$, $k = 1, \dots, N$. Используя доказанные теоремы, можно получить оценки факториальных моментов случайной величины $\xi(n, N)$. Так, например, математическое ожидание $E\xi(n, N)$ случайной величины $\xi(n, N)$ равно

$$E\xi(n, N) = \sum_{k=1}^N P\{\eta_k = \theta_k\}. \quad (32)$$

Случайная величина η_k имеет биномиальное распределение $B(n, p_k)$, а случайная величина θ_k биномиальное распределение $B(n, q_k)$, причем эти случайные величины независимы, $k = 1, \dots, N$. Таким образом, для оценки вероятности $P\{\eta_k = \theta_k\}$ при условиях теоремы 1 достаточно воспользоваться равенством (5), полагая в нем $N = 2$. Следовательно, при условиях теоремы 1 согласно (32)

$$E\xi(n, N) = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^N \frac{\left(\sqrt{p_k q_k} + \sqrt{(1-p_k)(1-q_k)}\right)^{2n+1}}{(p_k q_k (1-p_k)(1-q_k))^{1/4}} (1 + O(n^{-1})).$$

Если, в частности, $p_k = q_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, то эта оценка принимает более простой вид, а именно,

$$E\xi(n, N) = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{p_k(1-p_k)} (1 + O(n^{-1})).$$

Если, кроме того, $p_k = 1/N$, $k = 1, 2, \dots, N$, то из последней оценки следует, что

$$E\xi(n, N) = \frac{N^2}{2\sqrt{\pi(N-1)n}} (1 + O(n^{-1})).$$

Для оценки вероятности $P\{\eta_k = \theta_k\}$ при условиях (2) в предположении, что $p_k = q_k = 1/N$, $k = 1, \dots, N$, достаточно воспользоваться равенством (11), полагая в нем $N = 2$, $\lambda_1 = \mu_1 = \alpha$. Следовательно, при этих условиях согласно (32)

$$E\xi(n, N) = N \exp(-2\alpha) I_0(2\alpha) (1 + O(n^{-1})).$$

Остаточный член $o(1)$ из (11) при рассматриваемых условиях, как нетрудно показать, можно заменить на $O(n^{-1})$.

Из равенства (32) нетрудно получить точное выражение для математического ожидания случайной величины $\xi(n, N)$, а именно,

$$E\xi(n, N) = \sum_{k=1}^N (1-p_k)^n (1-q_k)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 \beta_k^r, \quad (33)$$

где

$$\beta_k = \frac{p_k q_k}{(1-p_k)(1-q_k)} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

Сумма

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 \beta_k^r$$

есть коэффициент при z^n в разложении выражения $(1+z)^n(1+\beta_k z)^n$ по степеням z , поэтому при $k = 1, 2, \dots, N$

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 \beta_k^r = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^n(1+\beta_k z)^n}{z^{n+1}} dz. \quad (35)$$

Полагая в (35)

$$z = \beta_k^{-1/2} e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

получаем, что при $k = 1, 2, \dots, N$

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 \beta_k^r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2\sqrt{\beta_k} \cos \varphi + \beta_k\right)^n d\varphi. \quad (36)$$

Из равенства (36) вытекают оценки

$$\left(1 - \sqrt{\beta_k}\right)^{2n} \leq \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 \beta_k^r \leq \left(1 + \sqrt{\beta_k}\right)^{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Из этих оценок с учетом (33) и (34) следует, что

$$\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{(1-p_k)(1-q_k)} - \sqrt{p_k q_k}\right)^{2n} \leq \mathbf{E}\xi(n, N) \leq \sum_{k=1}^N \left(\sqrt{(1-p_k)(1-q_k)} + \sqrt{p_k q_k}\right)^{2n}.$$

Если, в частности, $p_k = q_k$, $k = 1, \dots, N$, то

$$\sum_{k=1}^N (1 - 2p_k)^{2n} \leq \mathbf{E}\xi(n, N) \leq N.$$

Если, кроме того, $p_k = 1/N$, $k = 1, \dots, N$, то из последней оценки следует, что

$$N \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2n} \leq \mathbf{E}\xi(n, N) \leq N. \quad (37)$$

Из неравенств (37) получаем, в частности, что если при $N \rightarrow \infty$, $n = O(N^{1-\varepsilon})$, ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, фиксировано, то

$$\mathbf{E}\xi(n, N) = N(1 + O(N^{-\varepsilon})).$$

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Федорюк М. В. *Метод перевала*. Наука, Москва, 1977.
3. Копсон Э. *Асимптотические разложения*. Мир, Москва, 1966.

Статья поступила 18.07.95.