Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чашкин, О сложности и глубине схем, реализующих частичные булевы функции, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 53–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:15:01

О сложности и глубине схем, реализующих частичные булевы функции

© 1997 г. А. В. Чашкин

Изучается сложность и глубина схем, реализующих частичные булевы функции в предположении $FP \neq NC$. При этом предположении устанавливается существование частичных булевых функций, для которых не существует схем, сложность и глубина которых одновременно близки к минимально возможным, т.е. у любой схемы, реализующей одну из таких функций, либо глубина, либо сложность значительно превосходит соответственно либо глубину, либо сложность реализуемой функции.

Сложностью $L(f)$ булевой функции f назовем сложность $L(S)$ минимальной схемы S , реализующей эту функцию в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Глубиной $d(S)$ схемы S назовем максимальное число элементов схемы S , лежащих на какой-либо цепи, соединяющей один из входных полюсов S с ее выходным полюсом. Глубиной $d(f)$ функции f назовем глубину самой "неглубокой" схемы, реализующей эту функцию, т.е. $d(f) = \min d(S)$, где минимум берется по всем схемам, реализующим f .

В работе изучается сложность и глубина схем, реализующих частичные булевы функции в предположении $FP \neq NC$. Пусть n — число переменных рассматриваемых функций. Тогда FP — класс функций, вычисляемых последовательно за полиномиальное относительно n время, и NC — класс функций, вычисляемых параллельно за время $(\log_2 n)^{O(1)}$ с полиномиальной, также относительно n , сложностью. В терминах булевых функций и схем из функциональных элементов, реализующих эти функции, гипотеза $FP \neq NC$ может быть сформулирована в виде следующего предположения A :

для любых постоянных c_1, c_2, c_3 найдется такая постоянная $n(c_1, c_2, c_3) > 0$, что при любом $n \geq n(c_1, c_2, c_3)$ существует такая функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, что

- $L(f) \leq n^{c_1}$;
- если схема S реализует функцию f , и $L(S) \leq (L(f))^{c_2}$, то $d(S) \geq (\log_n)^{c_3}$.

Из доказываемой в работе теоремы следует существование частичных функций, для которых не существует схем, сложность и глубина которых одновременно близки к минимально возможным, т.е. у любой схемы, реализующей одну из таких функций, либо глубина, либо сложность значительно превосходит соответственно либо глубину, либо сложность реализуемой функции.

Введем несколько необходимых в дальнейшем определений. Пусть $D_1 \subset D_2 \subseteq \{0, 1\}^n$. Функцию $g: D_1 \rightarrow \{0, 1\}$ назовем сужением функции $h: D_2 \rightarrow \{0, 1\}$ на

область D_1 , если $g(x) = h(x)$ при любом $x \in D_1$. Сужение функции f на область D обозначим f_D , т.е. для функций g и h справедливо равенство $g = h_{D_1}$. Пусть, далее, $N(L, n)$ — число неизоморфных схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, имеющих n входов, один выход, и сложность, не превосходящую L .

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть справедливо предположение А. Тогда для любых постоянных c_1 и c_2 найдется такая постоянная $n(c_1, c_2)$, что при любом $n \geq n(c_1, c_2)$ существует такая область $D \subseteq \{0, 1\}^n$ и такая функция $f: D \rightarrow \{0, 1\}$, что, если схема S реализует функцию f и $L(S) \leq (L(f))^{c_1}$, то $d(S) \geq (d(f))^{c_2}$.

Доказательство теоремы основано на леммах 2 и 3. Доказательство леммы 2 легко извлекается из доказательства теоремы 1 из [1]. В доказательстве леммы 3 используется лемма 1, доказанная в [2] (см. лемму 6 в [2]).

Лемма 1. Пусть a, c и d — положительные целые числа, и b — положительное число. Пусть $\lfloor (2ab)^{1/2} \rfloor \leq d \leq a/2$ и $a > 2b > 5$. Тогда максимальное c , удовлетворяющее неравенству

$$\binom{a}{d} / \binom{a-c}{d} \leq \exp b,$$

не превосходит d .

Лемма 2. Пусть $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $|D| \geq n$, $f: D \rightarrow \{0, 1\}$. Тогда существует такая постоянная c_4 , что

$$d(f) \leq c_4 \log_2 |D|.$$

Лемма 3. Пусть $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $f: D \rightarrow \{0, 1\}$, $L \geq L(f)$ и

$$D \geq 2 \log_2(N((L-4)/3, n)).$$

Пусть для глубины любой схемы S , реализующей f со сложностью $L(S) \leq L$, справедливо неравенство $d(S) \geq k$. Тогда существует такая область $D' \subseteq D$, что

$$|D'| \leq 2(2|D| \log_2(N((L-4)/3, n)))^{1/2},$$

и глубина любой схемы S , реализующей функцию $f_{D'}$ со сложностью $L(S) \leq (L-4)/3$, удовлетворяет неравенству

$$d(S) \geq k - 3.$$

Доказательство. Введем целый положительный параметр d . Положим

$$d = \lfloor (2|D| \log_2(N((L-4)/3, n)))^{1/2} \rfloor.$$

Рассмотрим множество областей

$$M_d = \{V_i \mid V_i \subseteq D, |V_i| = d\},$$

и сужения функции f на области этого множества. Возможны два случая:

- среди областей $V_i \in M_d$ существует такая область V_j , что глубина любой схемы S , реализующей функцию f_{V_j} со сложностью $L(S) \leq (L-4)/3$, удовлетворяет неравенству $d(S) \geq k-3$;
- для любой области V_i найдется схема S , реализующая функцию f_{V_i} со сложностью $L(S) \leq (L-4)/3$ и глубиной $d(S) \leq k-4$.

В первом случае утверждение леммы очевидно. В качестве D' достаточно взять область V_j .

Рассмотрим второй случай. Так как

$$|M_d| = \binom{|D|}{d},$$

в этом случае существует схема S_1 , сложность и глубина которой не превосходят, соответственно, $(L-4)/3$ и $k-4$, реализующая на D некоторую булеву функцию h , совпадающую с f не менее чем на $\binom{|D|}{d} / N((L-4)/3, n)$ областях множества M_d . Пусть

$$V = D \setminus \left(\bigcup_i V_i \right),$$

где объединение берется по всем областям V_i , на которых $f = h$. Оценим сверху мощность R множества V . Очевидно, R удовлетворяет неравенству

$$\binom{|D|}{d} / \binom{|D|-R}{d} \leq 2^{\log_2 N((L-4)/3, n)}. \quad (1)$$

Из леммы 1 и неравенства (1) следует, что

$$R \leq d. \quad (2)$$

Введем новый параметр d' . Положим

$$d' = \lfloor (2(|D| - R) \log_2(N((L-4)/3, n))^{1/2} \rfloor.$$

Рассмотрим новое множество областей

$$M_{d'} = \{V'_i \mid V'_i \subseteq D, V \subset V'_i, |V'_i| = d' + R\}.$$

Как и ранее, возможны два случая:

- среди областей $V' \in M_{d'}$ существует такая область V'_j , что глубина любой схемы S , реализующей функцию $f_{V'_j}$ со сложностью $L(S) \leq (L-4)/3$, удовлетворяет неравенству $d(S) \geq k-3$;
- для любой области V'_i найдется схема S , реализующая функцию $f_{V'_i}$ со сложностью $L(S) \leq (L-4)/3$ и глубиной $d(S) \leq k-4$.

В первом случае в качестве D' можно взять область V'_j , так как $|V'_j| \leq 2d$ в силу (2). Если имеет место второй случай, то вновь воспользуемся леммой 1. Нетрудно показать, что в этом случае существует некоторая булева функция g , определенная на области D и совпадающая с функцией f не менее чем на $|D| - R$ наборах

области D , причем существует схема S_2 , реализующая функцию g со сложностью, не превосходящей $(L-4)/3$, и имеющая глубину, не превосходящую $k-4$. Пусть наборы, на которых совпадают значения функций f и g , составляют область W , и пусть

$$V' = D \setminus W.$$

Рассмотрим далее такую функцию $z: D \rightarrow \{0, 1\}$, значения которой при любом $x \in V \cup V'$ совпадают с соответствующими значениями функции f . Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$f = hy \vee hz \vee gz = h(g \vee z) \vee yz.$$

Предположим, что существует схема S_3 , реализующая z со сложностью, не превосходящей $(L-4)/3$, и имеющая глубину, не превосходящую $k-4$. В этом случае схема S , состоящая из схем S_1, S_2, S_3 , выходы которых присоединены ко входам схемы, реализующей функцию голосования, реализует функцию f . Нетрудно убедиться в том, что

$$L(S) \leq L, \quad d(S) \leq k-1.$$

Приходим к противоречию. Так как $|V \cup V'| \leq 2d$, лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть c_1, c_2 — произвольные постоянные, большие единицы. В соответствии с предположением А, существует такая постоянная $n(c_1, c_2)$, что при любом $n \geq n(c_1, c_2)$ существует функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, сложность которой не превосходит n^2 , а глубина любой схемы S , реализующей f со сложностью $L(S) \leq n^{2c_1+2}$, ограничена снизу величиной $((\log_2 n)^{c_2+1} + 3 \log_2 n)$. Полагая

$$L = n^{2c_1+2}, \quad k = ((\log_2 n)^{c_2+1} + 3 \log_2 n),$$

и применяя лемму 3 к f , получаем область $V_1 \subseteq \{0, 1\}^n$ и сужение f_{V_1} функции f на эту область, причем глубина любой схемы S , реализующей сужение f_{V_1} , ограничена снизу величиной $k-3$, если $L(S) \leq (L-4)/3$. К полученному сужению вновь применим лемму 3, и т.д. После s -го применения леммы 3 (предположим, что это возможно) получим последовательность вложенных областей

$$V_s \subseteq V_{s-1} \subseteq \dots \subseteq V_1 \subseteq V_0 = \{0, 1\}^n,$$

последовательность

$$f_{V_s}, f_{V_{s-1}}, \dots, f_{V_1}, f_{V_0} = f$$

сужений функции f на эти области, и последовательность

$$L_s, L_{s-1}, \dots, L_1, L_0 = L$$

такие, что

$$|V_i| \leq 2(2|V_{i-1}| \log_2 N((L_{i-1}-4)/3, n))^{1/2}, \quad (3)$$

$$L_i \geq (L_{i-1}-4)/3, \quad (4)$$

и глубина любой схемы S , реализующей f_{V_i} , ограничена снизу величиной

$$k-3i, \quad (5)$$

если $L(S) < L_i$.

Оценим L_t для минимального t , при котором

$$|V_t| \leq 16 \log_2 N(L_0, n).$$

Так как $L_i \leq L_0$, заменяя (3) более слабым неравенством

$$|V_i| \leq 2(2|V_{i-1}| \log_2 N((L_0) - 4)/3, n)^{1/2},$$

видим, что

$$16 \log_2 N(L_0, n) < |V_{t-1}| \leq 4(2^n)^{1/2^{t-1}} \log_2 N(L_0, n);$$

следовательно,

$$2^t < n. \quad (6)$$

Из (4) и (6) следует, что

$$L_t \geq n^{-\log_2 3} L_0 - 6 > n^{2c_1}. \quad (7)$$

В силу леммы 2 и леммы Д.3 из [3]

$$d(f_{V_i}) \leq c_4 \log_2 |V_i| \leq c_4 \log_2 (16 \log_2 N(L_0, n)) \leq c_4 \log_2 (16c_5 L_0 \log_2 L_0) \leq c_6 \log_2 n,$$

где c_5 и c_6 — некоторые постоянные.

Из (5) и (7) следует, что глубина любой схемы S , реализующей функцию f_{V_i} , ограничена снизу величиной $(\log_2 n)^{c_2}$, если $L(S) < L_t$. Очевидно, что, начиная с некоторого n_0 , имеет место неравенство

$$(\log_2 n)^{c_2+1} \geq (c_6 \log_2 n)^{c_2}.$$

Следовательно,

$$(d(f_{V_i}))^{c_2} \leq (\log_2 n)^{c_2+1}.$$

Поэтому глубина любой схемы S , реализующей функцию f_{V_i} , ограничена снизу величиной $(d(f_{V_i}))^{c_2}$, если $L(S) < L_t$.

Таким образом, теорема доказана для $s \geq t-1$. Для завершения доказательства покажем, что лемма 3 может быть использована не менее $t-1$ раза. Предположим, что это не так, т.е. $s < t-1$. В этом случае лемма 3 неприменима к функции f_{V_s} . Так как

$$L_s \geq L_t \geq n^{2c_1} > n,$$

лемма 3 не может быть применена к функции f_{V_s} вследствие невыполнения условия

$$|V_s| \geq 2 \log_2 N((L_{s-1} - 4)/3, n).$$

Однако цепочка неравенств

$$16 \log_2 N(L_0, n) < |V_{t-1}| \leq |V_s| < 2 \log_2 N((L_{s-1} - 4)/3, n) \leq 2 \log_2 N(L_0, n).$$

приводит к противоречию. Следовательно, $s \geq t-1$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Андреев А. Е. О сложности реализации частичных булевых функций схемами из функциональных элементов. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 36–45.
2. Чашкин А. В. О сложности сужений булевых функций. *Дискретная математика* (1996) **8**, №2, 133–150.
3. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. *Пробл. киберн.* (1965) **14**, 31–110.

Статья поступила 30.09.1994.