Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Гущин, Условная предельная теорема со случайным числом слагаемых, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 131–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 06:24:23

Условная предельная теорема со случайным числом слагаемых

© 1997 г. С. Г. Гушин

Для последовательности независимых одинаково распределенных случайных векторов с целыми неотрицательными координатами $(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_s^{(i)}, \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots$, доказывается предельная теорема, позволяющая при $n \rightarrow \infty$ оценить совместное распределение сумм

$$\sum_{i=1}^m \xi_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, s,$$

для случайного m , определяемого условием

$$\sum_{i=1}^m \eta_i = n.$$

1. Пусть

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \eta), \quad (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_s^{(i)}, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

— последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, у которых координаты $\xi_1, \dots, \xi_s$ принимают значения в множестве целых неотрицательных чисел, а координата η — в множестве натуральных чисел. Для каждого n определим события

$$B_m^{(n)} = \{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_m = n\}, \quad m = 1, \dots, n,$$

$$B_n = \bigcup_{m=1}^n B_m^{(n)}.$$

Кроме того, для каждого n при условии, что $P_n = \mathbf{P}(B_n) > 0$, введем вероятностное пространство на множестве B_n с вероятностной мерой $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A \mid B_n)$, где A — произвольное измеримое подмножество множества B_n , и определим на нем случайный вектор

$$\bar{\mu}_n = (\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots, \mu_s^{(n)}),$$

имеющий распределение

$$\mathbf{P}_n\{\bar{\mu}_n = \bar{t}\} = (\mathbf{P}(B_n))^{-1} \sum_{m=1}^n \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^m \xi_j^{(i)} = t_j, \quad j = 1, \dots, s; \sum_{i=1}^m \eta_i = n \right\},$$

где $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_s)$, $t_j = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, s$.

В данной работе изучается предельное поведение случайного вектора $\bar{\mu}_n$ при $n \rightarrow \infty$. Необходимость изучения такого случайного вектора возникает в тех статистических задачах, когда по имеющемуся наблюдению за одним параметром дискретного случайного процесса требуется оценить другие его параметры. Рассмотрим, например, частицу, совершающую скачки на $(s+1)$ -мерной целочисленной решетке, величина которых характеризуется случайным вектором $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \eta)$. Задача состоит в том, чтобы по наблюдаемому в некоторый момент времени значению n последней координаты оценить значения других координат. Существенным отличием такой постановки задачи является тот факт, что число скачков, совершенных частицей к моменту наблюдения, неизвестно и является, вообще говоря, случайной величиной. Отметим, что задача получения предельного распределения для случайных величин $\sum_{i=1}^n \xi_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, s$, при наличии некоторой информации о $\sum_{i=1}^n \eta_i$ и $n \rightarrow \infty$ исследовалась многими авторами (например, [1, 2]), однако возможность случайного суммирования в данных условиях ими не рассматривалась.

Если через λ_n обозначить случайную величину, равную числу слагаемых, то ее распределение задается вероятностями

$$\mathbf{P}_n\{\lambda_n = m\} = (\mathbf{P}(B_n))^{-1} \mathbf{P}\{\eta_1 + \dots + \eta_m = n\}, \quad m = 1, \dots, n.$$

Нетрудно увидеть, что при $n \rightarrow \infty$

$$\lambda_n/n \rightarrow 1/\mathbf{M}\eta \quad (1)$$

по вероятности. Несмотря на это, при исследовании данной задачи не удастся воспользоваться тем большим числом известных результатов, которые получены для случайного суммирования. Это объясняется тем, что при таком подходе задача сводится к случайному суммированию в схеме серий, при котором индекс суммирования зависит от слагаемых случайных векторов, а сами слагаемые являются зависимыми и неодинаково распределенными случайными векторами. Развита для такого рода сложных зависимостей мартингальная техника (см. [3] и библиографию в ней) для данной задачи неприменима, так как не удастся ввести общее вероятностное пространство. Кроме того, из (1) следует, что для достаточно больших n случайный вектор $\bar{\mu}_n$ можно приблизить суммой $n/\mathbf{M}\eta$ слабо зависимых случайных векторов с почти одинаковыми распределениями и воспользоваться центральной предельной теоремой. Однако и на этом пути автору из-за возникших аналитических трудностей не удалось прийти к окончательному результату.

В связи с этим доказательство предельных теорем проводится непосредственно методом характеристических функций с использованием теоремы о неявных функциях.

Обозначим через

$$\Psi(x_1, \dots, x_s, y) := \sum_{(t_1, \dots, t_s, k)} \mathbf{P}\{\xi_1 = t_1, \dots, \xi_s = t_s, \eta = k\} x^{t_1} \dots x^{t_s} y^k$$

производящую функцию для случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_s, \eta)$, через $P_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_s)$ и $P_{\eta}(y)$ их маргинальные производящие функции. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- (А) максимальный шаг распределения случайной величины η равен 1, что эквивалентно тому, что $P_{\eta}(y) \neq 1$ для всех $y \in \mathbb{C}$, $|y| \leq 1$, $y \neq 1$;

(В) функция $\Psi(x_1, \dots, x_s, y)$ является аналитической функцией в некоторой окрестности

$$C((\delta, \theta); (\bar{1}, 0)) = \{(x_1, \dots, x_s, y) : x_j, y \in \mathbb{C}, |x_j - 1| < \delta, j = 1, \dots, s, |y| < \theta\},$$

где $\delta > 0$, $\theta > 1$, $\delta, \theta \in \mathbb{R}$, $\bar{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^s$.

Заметим, что условие В, в частности, выполнено, если совместное распределение случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_s, \eta$ ограничено геометрическим распределением, т.е. если найдется такое $0 < b < 1$, что для любых $k = 1, 2, \dots$ и $t_j = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, s$, выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = t_1, \dots, \xi_s = t_s, \eta = k\} \leq b^{t_1 + \dots + t_s + k}.$$

Следствием условия А является тот важный для нас факт, что, начиная с некоторого натурального числа N , выполняется условие $\mathbf{P}(B_n) > 0$, и, таким образом, $\bar{\mu}_n$ определен для всех $n \geq N$. Перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 1. Если выполнены условия А, В, то при $n \rightarrow \infty$ для любого $j = 1, \dots, s$ имеет место сходимость по вероятности

$$\mu_j^{(n)} / n \rightarrow \mathbf{M}\xi_j / \mathbf{M}\eta.$$

Следует заметить, что величины $a_j = \mathbf{M}\xi_j / \mathbf{M}\eta$, $j = 1, \dots, s$, и ранее играли важную роль в задачах оценивания одних компонент случайного вектора по другим ([2], с.90). Введем вектор случайных величин

$$\bar{\mu}'_n = (\bar{\mu}_1^{(n)}, \bar{\mu}_2^{(n)}, \dots, \bar{\mu}_s^{(n)}),$$

где

$$\bar{\mu}_j^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mu_j^{(n)} - na_j), \quad j = 1, \dots, s.$$

Теорема 2. Если выполнены условия А, В, то при $n \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\bar{\mu}'_n \Rightarrow N(\bar{0}, \Sigma),$$

где $N(\bar{0}, \Sigma)$ — нормально распределенный вектор случайных величин с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей вторых моментов $\Sigma = \|\sigma_{jk}\|$

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} (\mathbf{M}\eta)^{-1}((\mathbf{M}\eta^2 - \mathbf{M}\eta)a_j a_k - a_j \mathbf{M}\eta \xi_k - a_k \mathbf{M}\eta \xi_j + \mathbf{M}\xi_j \xi_k), & j \neq k, \\ (\mathbf{M}\eta)^{-1}((\mathbf{M}\eta^2 - \mathbf{M}\eta)a_j^2 - 2a_j \mathbf{M}\eta \xi_j + \mathbf{M}\xi_j^2), & j = k. \end{cases}$$

2. Прежде чем перейти к доказательству сформулированных теорем, докажем две вспомогательные предельные теоремы для последовательности случайных векторов, производящие функции которых являются коэффициентами разложения отношения аналитических функций.

Рассмотрим последовательность случайных векторов

$$\zeta_n = (\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \dots, \zeta_s^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

с целочисленными неотрицательными координатами, и пусть для некоторой последовательности действительных чисел $c_0, c_1, c_2, \dots$ имеет место равенство

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n \sum_{(t_1, \dots, t_s)} \mathbf{P}\{\zeta_1^{(n)} = t_1, \dots, \zeta_s^{(n)} = t_s\} x^{t_1} \dots x^{t_s} = \frac{H(\bar{x}, y)}{G(\bar{x}, y)},$$

где функции $H(\bar{x}, y)$ и $G(\bar{x}, y)$ удовлетворяют условию В, т.е. являются аналитическими функциями в некоторой окрестности $C((\delta, \theta); (\bar{1}, 0))$, где $\delta > 0$, $\theta > 1$, $\delta, \theta \in \mathbf{R}$.

Теорема 3. Пусть функции $H(\bar{x}, y)$ и $G(\bar{x}, y)$ удовлетворяют условию В и уравнение $G(\bar{1}, y) = 0$ имеет в окрестности $C(\theta; 0) = \{y: |y| < \theta, \theta > 1\}$ единственный корень $y = 1$ кратности единица. Тогда при $n \rightarrow \infty$ для любого $j = 1, \dots, s$ имеет место сходимость по вероятности

$$\zeta_j^{(n)} / n \rightarrow G'_{x_j}(\bar{1}, 1) / G'_y(\bar{1}, 1).$$

Обозначим $b_j = G'_{x_j}(\bar{1}, 1) / G'_y(\bar{1}, 1)$ и введем вектор случайных величин

$$\bar{\zeta}'_n = (\bar{\zeta}'_1, \bar{\zeta}'_2, \dots, \bar{\zeta}'_s),$$

где

$$\bar{\zeta}'_j = \frac{1}{\sqrt{n}}(\zeta_j^{(n)} - nb_j), \quad j = 1, \dots, s.$$

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3, то при $n \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\bar{\zeta}'_n \Rightarrow N(\bar{0}, \Sigma),$$

где $N(\bar{0}, \Sigma)$ — нормально распределенный вектор случайных величин с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей вторых моментов $\Sigma = \|\sigma_{jk}\|$,

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} (G'_y)^{-1}(G_{yy}^{(2)} b_j b_k - b_j G_{x_k y}^{(2)} - b_k G_{x_j y}^{(2)} + G_{x_k x_j}^{(2)}), & j \neq k, \\ b_j + (G'_y)^{-1}(G_{yy}^{(2)} b_j^2 - 2b_j G_{x_k y}^{(2)} + G_{x_k x_j}^{(2)}), & j = k, \end{cases}$$

и значения всех функций берутся в точке $(\bar{1}, 1)$.

Заметим, что аналогичная нормальная предельная теорема для вектора

$$\left(\frac{\zeta_1^{(n)} - \mathbf{M}\zeta_1^{(n)}}{\sqrt{\mathbf{D}\zeta_1^{(n)}}}, \dots, \frac{\zeta_s^{(n)} - \mathbf{M}\zeta_s^{(n)}}{\sqrt{\mathbf{D}\zeta_s^{(n)}}} \right)$$

в случае $c_1 = c_2 = \dots = 1$ была доказана в [4], однако изменение коэффициентов, нормирующих случайный вектор $\bar{\zeta}'_n$, позволило получить предельное распределение без дополнительного условия $\mathbf{D}\zeta_s^{(n)} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, которое требуется в [4].

Лемма 1 ([4]). Пусть для функций $G(\bar{x}, y)$ и $H(\bar{x}, y)$ выполнены условия теоремы 3. Тогда существует окрестность $C(\delta'; \bar{1}) = \{x_1, \dots, x_j: |x_j - 1| < \delta', j = 1, \dots, s\}$, такая, что для всех $\bar{x} \in C(\delta'; \bar{1})$ справедливо представление

$$\text{coef}_{y^n} \frac{H(\bar{x}, y)}{G(\bar{x}, y)} = \frac{\rho(x_1, \dots, x_s)}{(g(x_1, \dots, x_s))^{n+1}} + O((1/\theta')^n),$$

где $1 < \theta' < \theta$, функции $\rho(x_1, \dots, x_s)$ и $g(x_1, \dots, x_s)$ являются аналитическими в окрестности $C(\delta'; \bar{1})$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} g(\bar{1}) &= 1; \\ G(\bar{x}, g(\bar{x})) &= 0, & \bar{x} \in C(\delta'; \bar{1}); \\ \rho(\bar{x}) &= -\frac{H(\bar{x}, g(\bar{x}))}{G'_y(\bar{x}, g(\bar{x}))}, & \bar{x} \in C(\delta'; \bar{1}). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Для произвольного $j = 1, \dots, s$ рассмотрим случайную величину $\zeta_j^{(n)}$. Для простоты обозначений индекс j в ходе доказательства будем опускать; тогда

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G(x_j, y) = G(1, \dots, 1, x_j, 1, \dots, 1, y), \\ H(x, y) &= H(x_j, y) = H(1, \dots, 1, x_j, 1, \dots, 1, y). \end{aligned}$$

По лемме 1 для производящей функции случайной величины $\zeta^{(n)}$ справедливо представление

$$P_{\zeta^{(n)}}(x) = c_n^{-1} \left(\frac{\rho(x)}{(g(x))^{n+1}} + O((1/\theta')^n) \right), \quad (2)$$

где для функций $\rho(x)$ и $g(x)$ выполняются все условия, сформулированные в лемме. Устремив $x \rightarrow 1$, а затем $n \rightarrow \infty$, из (1) получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} \rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \quad (3)$$

т.е. при выполнении условий теоремы последовательность c_n должна обязательно сходиться.

Характеристическая функция случайной величины $\zeta^{(n)}/n$ имеет вид

$$\varphi_{\zeta^{(n)}/n}(u) = c_n^{-1} \left(\frac{\rho(e^{iu/n})}{(g(e^{iu/n}))^{n+1}} + O((1/\theta')^n) \right) \quad (4)$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (g(e^{iu/n}))^{-(n+1)} &= \exp \left\{ -\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)(g(e^{iu/n}) - 1) \right\} \\ &= \exp \{-iug'(1)\} = \exp \left\{ iu \frac{G'_x(1, 1)}{G'_y(1, 1)} \right\}, \end{aligned}$$

учитывая (3), из (4) окончательно получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\zeta^{(n)}/n}(u) = \exp \left\{ iu \frac{G'_x(1, 1)}{G'_y(1, 1)} \right\},$$

и теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Вновь воспользовавшись леммой 1, получаем следующее выражение для характеристической функции случайного вектора $\bar{\zeta}_n$:

$$\varphi_{\bar{\zeta}_n} = c_n^{-1} \exp \left\{ -i\sqrt{n} \sum_{j=1}^s b_j u_j \right\} \left(\frac{\rho(e^{iu_1/\sqrt{n}}, \dots, e^{iu_s/\sqrt{n}})}{(g(e^{iu_1/\sqrt{n}}, \dots, e^{iu_s/\sqrt{n}}))^{n+1}} + O((1/\theta')^n) \right)$$

где $\bar{u} = (u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{C}^s$, а функции $\rho(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ удовлетворяют всем условиям, сформулированным в лемме. Аналогично доказательству теоремы 3 заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(e^{iu_1/\sqrt{n}}, \dots, e^{iu_s/\sqrt{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

и тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\bar{\zeta}'_n}(\bar{u}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp \left\{ -i\sqrt{n} \sum_{j=1}^s a_j u_j \right\} \left(g(e^{iu_1/\sqrt{n}}, \dots, e^{iu_s/\sqrt{n}}) \right)^{-(n+1)} \right) \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-i\sqrt{n} \sum_{j=1}^s a_j u_j - (n+1)g(e^{iu_1/\sqrt{n}}, \dots, e^{iu_s/\sqrt{n}}) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь разложением

$$\begin{aligned} g(e^{iu_1/\sqrt{n}}, \dots, e^{iu_s/\sqrt{n}}) &= 1 + \sum_{j=1}^s g'_j(\bar{1}) (e^{iu_j/\sqrt{n}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s g_{jk}^{(2)}(\bar{1}) (e^{iu_j/\sqrt{n}}) (e^{iu_k/\sqrt{n}}) + o(1/n) \\ &= \sum_{j=1}^s g'_j(\bar{1}) \frac{iu_j}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s g'_j(\bar{1}) \frac{u_j^2}{n} - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s g_{jk}^{(2)}(\bar{1}) \frac{u_j u_k}{n} + o(1/n) \end{aligned}$$

и выражением для производной неявной функции

$$g'_j(\bar{x}) = -\frac{G'_{x_j}(\bar{x}, y)}{G'_y(\bar{x}, y)}, \quad g'_j(\bar{1}) = -b_j,$$

окончательно получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\bar{\zeta}'_n}(\bar{u}) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^s b_j u_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s g_{jk}^{(2)}(\bar{1}) u_j u_k,$$

а, значит, $\bar{\zeta}'_n \Rightarrow N(\bar{0}, \Sigma)$, где $\Sigma = \|\sigma_{jk}\|$,

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} -g_{jk}^{(2)}(\bar{1}), & j \neq k, \\ b_j - g_{jj}^{(2)}(\bar{1}), & j = k. \end{cases}$$

Используя правила дифференцирования неявной функции, получаем окончательное выражение для элементов матрицы Σ .

Доказательство теоремы 1. Для произвольного $j = 1, \dots, s$ рассмотрим случайную величину $\mu_j^{(n)}$. Вновь для простоты обозначений индекс j в ходе доказательства будем опускать. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu^{(n)} = t\} &= P_n^{-1} \sum_{m=1}^n \mathbf{P}\left\{ \sum_{i=1}^m \xi^{(i)} = t, \zeta_m = n \right\} \\ &= P_n^{-1} \sum_{m=1}^n \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \mathbf{P}\left\{ \sum_{i=1}^m \xi^{(i)} = t, \eta_i = k_i, i = 1, \dots, m \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{P}_n\{\mu^{(n)} = t\} x^t \\
&= P_n^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} x^t \sum_{m=1}^n \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^m \xi^{(i)} = t, \eta_i = k_i, i = 1, \dots, m\right\} \\
&= P_n^{-1} \sum_{m=1}^n \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \sum_{t=0}^{\infty} x^t \sum_{t_1+\dots+t_m=t} \mathbf{P}\{\xi^{(i)} = t_i, \eta_i = k_i, i = 1, \dots, m\} \\
&= P_n^{-1} \sum_{m=1}^n \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{t_1+\dots+t_m=t} \prod_{i=1}^m \mathbf{P}\{\xi^{(i)} = t_i, \eta_i = k_i\} x^{t_i}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n y^n \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{P}_n\{\mu^{(n)} = t\} x^t \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{t_1+\dots+t_m=t} \prod_{i=1}^m \mathbf{P}\{\xi^{(i)} = t_i, \eta_i = k_i\} x^{t_i} y^{k_i} \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m \sum_{t_i=0}^{\infty} \sum_{k_i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi^{(i)} = t_i, \eta_i = k_i\} x^{t_i} y^{k_i} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi(x, y)^m = \frac{1}{1 - \Psi(x, y)},
\end{aligned}$$

где через $\Psi(x, y)$ обозначена маргинальная производящая функция для случайных величин ξ и η . Так как $\Psi'_y(1, 1) = \mathbf{M}\eta > 0$, $y = 1$ является корнем кратности единица уравнения $\Psi(x, y) = 1$. Тогда, учитывая условия А и В, приходим к выводу, что выполняются все условия теоремы 3,

$$\frac{\mu^{(n)}}{n} \rightarrow \frac{\Psi'_x(1, 1)}{\Psi'_y(1, 1)} = \frac{\mathbf{M}\xi}{\mathbf{M}\eta}$$

по вероятности, и теорема 1 доказана.

Заметим, что из (3) и вида функции $\rho(x)$ следует интересное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (\mathbf{M}\eta)^{-1},$$

которое можно получить и непосредственно.

Доказательство теоремы 2. Аналогично доказательству теоремы 1, получаем следующее равенство для производящей функции случайного вектора $\bar{\mu}_n$:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n y^n \sum_{\bar{t}} \mathbf{P}_n\{\bar{\mu}_n = \bar{t}\} x_1^{t_1} \dots x_s^{t_s} = (1 - \Psi(\bar{x}, y))^{-1}.$$

Тогда по теореме 4 $\bar{\mu}'_n \Rightarrow N(\bar{0}, \Sigma)$, где $\Sigma = \|\sigma_{jk}\|$,

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} (\Psi'_y)^{-1}(\Psi_{yy}^{(2)} a_j a_k - a_j \Psi_{x_k y}^{(2)} - a_k \Psi_{x_j y}^{(2)} + \Psi_{x_k x_j}^{(2)}), & j \neq k, \\ a_j + (\Psi'_y)^{-1}(\Psi_{yy}^{(2)} a_j^2 - 2a_j \Psi_{x_k y}^{(2)} + \Psi_{x_k x_j}^{(2)}), & j = k, \end{cases}$$

где значения всех функций берутся в точке $(\bar{1}, 1)$. Подставляя

$$\Psi'_y = \mathbf{M}\eta, \quad \Psi_{yy}^{(2)} = \mathbf{M}\eta^2 - \mathbf{M}\eta, \quad \Psi_{x_j y}^{(2)} = \mathbf{M}\xi_j \eta, \quad \Psi_{x_j x_k}^{(2)} = \mathbf{M}\xi_j \xi_k, \quad \Psi_{x_j x_j}^{(2)} = \mathbf{M}\xi_j^2 - \mathbf{M}\xi_j,$$

получаем окончательное выражение для элементов матрицы Σ .

Автор выражает благодарность Ю. Н. Горчинскому за внимание к этой работе.

Список литературы

1. Мухамеджанов К. М., Нагаев А. В. Предельные теоремы для условных распределений. В кн.: *Асимптотические задачи теории вероятностей и математической статистики*. АН УзССР, Ташкент, 1990.
2. Боровков А. А. *Асимптотические методы в теории массового обслуживания*. Наука, Москва, 1980.
3. Kubacki K. S. Weak convergence of random sums to infinitely divisible distributions. *Studia Sci. Math. Hungar.* (1987) **22**, 275–285.
4. Левашев М. В. Об одном вероятностном методе в асимптотической теории перечислений. *Докл. АН УССР* (1989) №1, 19–22.

Статья поступила 20.02.1995.